PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 28 NOVEMBRE 2018
DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

copies.ofm@gmail.com

Exercice 1. Un pays comprend $2018n+1$ villes, où n est un entier naturel non nul. Certaines paires de villes sont reliées par des lignes directes de chemin de fer, de sorte qu'il y ait au plus une ligne entre deux villes ; chaque ligne va dans les deux sens. La distance entre deux villes A et B est alors le nombre minimal de lignes à prendre pour aller de A à B.

Trouver l'ensemble des entiers n pour lesquels il possible de construire un réseau ferré respectant le critère suivant :

Pour toute ville C et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, 2018\}$, il y a exactement n villes à distance i de C.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Dans toute la suite, on va bien sûr réinterpréter l'énoncé en termes de graphes, et on va montrer que les entiers n recherchés sont les entiers pairs.

Supposons d'abord que l'on dispose d'un entier n et d'un graphe respectant le critère de l'énoncé. Alors tout sommet est de degré n. La somme des degrés des sommets du graphe vaut donc $(2018n+1)n$. Or, cette somme est toujours paire. On en déduit que

$$n \equiv (2018n+1)n \equiv 0 \pmod 2,$$

c'est-à-dire que n est pair.

Réciproquement, si n est pair, on forme d'abord un cycle de $2018n+1$ sommets. Puis on rajoute des arêtes auxiliaires entre deux sommets u et v dès lors que la distance entre u et v (dans notre cycle sans arêtes auxiliaires) est comprise entre 2 et $n/2$. Il est alors aisé de vérifier que ce graphe (avec arêtes auxiliaires) respecte le critère de l'énoncé.

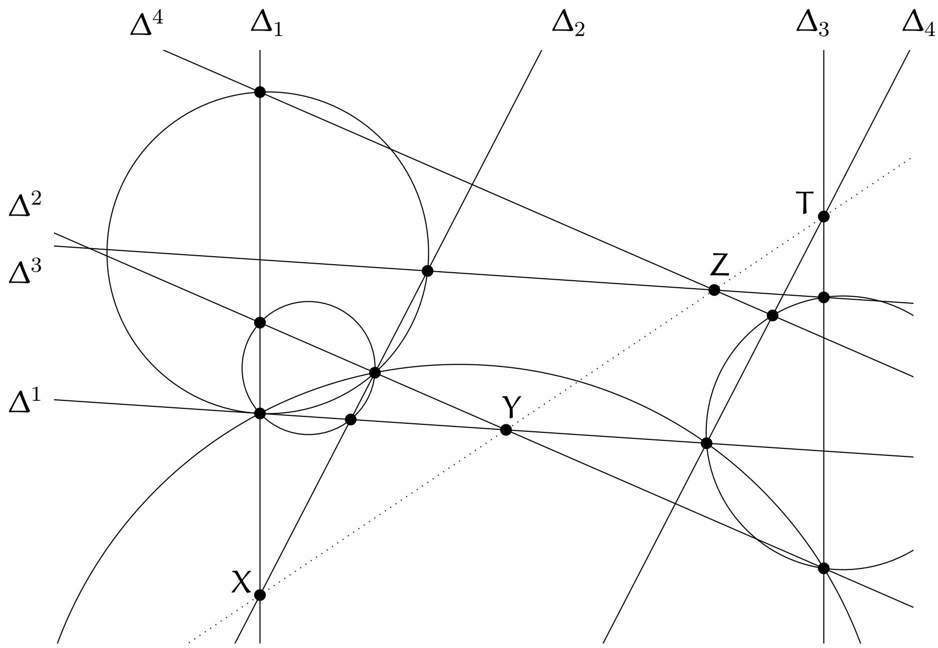
Exercice 2. On dispose, dans le plan, 16 points deux à deux distincts, que l'on note $A_{i,j}$ pour $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ces points vérifient les relations d'alignement et de cocyclicité suivantes :

- ▷ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, les points $A_{i,1}$, $A_{i,2}$, $A_{i,3}$ et $A_{i,4}$ sont alignés ;
- ▷ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, les points $A_{1,j}$, $A_{2,j}$, $A_{3,j}$ et $A_{4,j}$ sont alignés ;
- ▷ les quadrilatères $A_{1,1}A_{1,2}A_{2,2}A_{2,1}$, $A_{2,1}A_{2,2}A_{3,2}A_{3,1}$, $A_{3,1}A_{3,2}A_{4,2}A_{4,1}$, $A_{1,2}A_{1,3}A_{2,3}A_{2,2}$, $A_{1,3}A_{1,4}A_{2,4}A_{2,3}$, $A_{1,1}A_{2,2}A_{2,3}A_{1,4}$ et $A_{1,1}A_{2,2}A_{3,2}A_{4,1}$ sont cycliques.

Montrer que le quadrilatère $A_{4,1}A_{3,2}A_{3,3}A_{4,4}$ est lui aussi cyclique.

Note : on dit qu'un quadrilatère est cyclique si ses quatre sommets sont sur un même cercle.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>



Ci-dessous, on notera Δ_i la droite $(A_{i,1}A_{i,2})$ et Δ^j la droite $(A_{1,j}A_{2,j})$. Une figure et une chasse aux angles nous montrent que les droites Δ_1 et Δ_3 sont parallèles, puisque $(\Delta_1, \Delta^1) \equiv (\Delta^2, \Delta_2) \equiv (\Delta_3, \Delta^1) \pmod{180°}$. De même, on sait que $\Delta_2 /\!/ \Delta_4$, que $\Delta^1 /\!/ \Delta^3$ et que $\Delta^2 /\!/ \Delta^4$.

Ce faisant, et sous réserve que le quadrilatère $A_{1,1}A_{1,2}A_{2,2}A_{2,1}$ formé par les droites Δ_1, Δ^1, Δ_2 et Δ^2 soit cyclique, il suffit de définir le point $A_{i,j}$ comme le point d'intersection de Δ_i et Δ^j pour être assuré de nos relations d'alignement, et pour être certain que nos cinq premiers quadrilatères sont cycliques. En particulier, toujours par chasse aux angles, chaque quadrilatère $A_{i,j}A_{i+1,j}A_{i+1,j+1}A_{i,j+1}$ est alors cyclique.

Dans toute la suite, on supposera ces relations d'alignement et de cocyclicité acquises, et on s'intéresse maintenant au quadrilatère $A_{1,1}A_{2,2}A_{2,3}A_{1,4}$. Vu le rôle symétrique qu'il semble jouer avec les quadrilatères $A_{1,1}A_{2,2}A_{3,2}A_{4,1}$ d'une part et $A_{1,1}A_{2,2}A_{3,2}A_{4,1}$ d'autre part, il serait bon de trouver un critère simple qui soit équivalent avec son caractère cyclique.

Or, il ne met en jeu que les droites Δ_1 et Δ_2 d'une part, et les quatre droites Δ^j d'autre part, les paires (Δ^1, Δ^2) et (Δ^3, Δ^4) jouant des rôles symétriques. On en vient alors à considérer les points d'intersection $X = \Delta_1 \cap \Delta_2$, $Y = \Delta^1 \cap \Delta^2$ et $Z = \Delta^3 \cap \Delta^4$, dont la figure semble montrer qu'ils sont alignés. Cela suggère le lemme suivant.

Lemme : Le quadrilatère $A_{1,1}A_{2,2}A_{2,3}A_{1,4}$ est cyclique si et seulement si X, Y et Z sont alignés.

Démonstration : Supposons d'abord X, Y et Z alignés. Le théorème de Thalès indique alors que les quadrilatères $A_{1,1}A_{1,2}A_{2,2}A_{2,1}$ et $A_{1,3}A_{2,3}A_{2,4}A_{3,4}$ sont homothétiques l'un de l'autre, donc que $(A_{2,1}A_{1,2}) /\!/ (A_{2,3}A_{1,4})$. On en déduit que $(A_{1,1}A_{1,4}, A_{1,1}A_{2,2}) \equiv (A_{1,1}A_{1,2}, A_{1,1}A_{2,2}) \equiv (A_{2,1}A_{1,2}, A_{2,1}A_{2,2}) \equiv (A_{2,3}A_{1,4}, A_{2,3}A_{2,2}) \pmod{180°}$, ce qui signifie que $A_{1,1}A_{1,4}A_{2,3}A_{2,2}$ est bien cyclique.

Réciproquement, une fois fixées les droites Δ_1, Δ_2, Δ^1, Δ^2 et Δ^3, le point $A_{4,1}$ puis la droite Δ^4 sont définis de manière unique, donc Z se retrouve nécessairement aligné avec X et Y. $\square$

On en profite aussi pour poser $T = \Delta_3 \cap \Delta_4$. Ici, puisque $A_{1,1}A_{2,2}A_{2,3}A_{1,4}$ et $A_{1,1}A_{2,2}A_{3,2}A_{4,1}$ sont cycliques, le lemme montre l'alignement des points X, Y et Z, et X, Y et T d'autre part. Ainsi, les points T, Y et Z sont alignés, et le lemme montre cette fois-ci que le quadrilatère $A_{4,1}A_{3,2}A_{3,3}A_{4,4}$ est cyclique.

Exercice 3. On dit qu'un entier k est *olympique* s'il existe quatre entiers a, b, c et d, tous premiers avec k, tels que k divise $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$. Soit n un entier quelconque.

Montrer que $n^2 - 2$ est olympique.

Solution de l'exercice 3 Soit $p_1^{\alpha_1} \cdots p_\ell^{\alpha_\ell}$ la décomposition de $n^2 - 2$ en produits de facteurs premiers. Grâce au théorème Chinois, il nous suffit en fait de montrer que chacun des entiers $p_i^{\alpha_i}$ est olympique.

Supposons tout d'abord que $p_i = 2$. Puisque $n^2 - 2 \equiv \{2, 3\} \pmod 4$, on sait que $\alpha_i \leqslant 1$. Or, il est clair que 2 est olympique, puisque $1 + 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 2$.

On considère maintenant un diviseur premier p impair de $n^2 - 2$. Puisque 2 n'est pas carré modulo 3 ou 5, on sait en fait que $p \geqslant 7$. Par ailleurs, si p^α est olympique, alors p l'est clairement lui aussi. Réciproquement, si p est olympique (et impair), le lemme de Hensel montre que les puissances $4^{\text{èmes}}$ modulo p^k sont exactement les entiers dont les résidus (modulo p) sont des puissances $4^{\text{èmes}}$ modulo p, et il s'ensuit que p^α est également olympique.

On se ramène donc à montrer que tout nombre premier $p \geqslant 7$ tel que 2 soit un carré modulo p est olympique. On va procéder par disjonction de cas, selon la valeur de p modulo 4 ou 8.

Cependant, on rappelle d'abord le petit théorème de Fermat, qui stipule que l'ordre $\omega_p(x)$ d'un élément inversible modulo p doit diviser $p - 1$. On rappelle également que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

contient un élément d'ordre $p-1$, comme l'indique le Théorème 17 du cours d'Arithmétique de la POFM sur les propriétés de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On en déduit le lemme suivant.

Lemme : Les puissances $k^{\text{èmes}}$ sont les éléments x dont l'ordre $\omega_p(x)$ divise $(p-1)/\delta$, où $\delta = \mathrm{PGCD}(k, p-1)$.

Démonstration : Soit z un élément d'ordre $p-1$. Les puissances $k^{\text{èmes}}$ sont les éléments de la forme $z^{ak+b(p-1)}$, avec a et b entiers, c'est-à-dire les éléments de la forme $z^{c\delta}$ avec c entier. L'ordre de ces éléments modulo p divise clairement $(p-1)/\delta$.

Réciproquement, $\omega_p(x)$ divise $(p-1)/\delta$ si et seulement si x est une des racines du polynôme $P(X) = 1 - X^{(p-1)/\delta}$. Or, les éléments de la forme $z^{c\delta}$ constituent déjà $(p-1)/\delta$ racines de $P(X)$. Par conséquent, les puissances $k^{\text{èmes}}$ sont exactement les racines de $P(X)$, ce qui conclut la preuve du lemme. $\square$

On procède enfin à la disjonction de cas annoncée ci-dessus.

1. Si $p \equiv 1 \pmod 8$, et puisque -1 est d'ordre 2, c'est une puissance $4^{\text{ème}}$. Comme $0 \equiv 1 + 1 + (-1) + (-1) \pmod p$, l'entier p est olympique.
2. Si $p \equiv 5 \pmod 8$, alors -1 est un carré. Soit i et $-i$ ses racines carrées. Elles sont d'ordre 4, donc ce ne sont pas des carrés. Or, $(1+i)^2 \equiv 2i \pmod p$. Puisque l'ensemble des carrés est clos par produit et par inverse (donc par division), 2 n'est donc pas un carré, ce qui signifiait en fait que p ne divisait pas $n^2 - 2$. Ce cas s'avère donc impossible.
3. Si $p \equiv 3 \pmod 4$, alors être une puissance $4^{\text{ème}}$ revient en fait à être un carré. Il suffit donc de montrer que 0 est somme de quatre carrés non nuls modulo p.

   On va d'abord montrer que c'est une somme de ℓ carrés non nuls, avec $2 \leqslant \ell \leqslant 4$. En effet, soit Q l'ensemble des carrés. Notons que $|Q| = (p+1)/2$, puisque tout carré non nul a exactement deux racines carrés modulo p. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et par principe des tiroirs, l'ensemble $(k-Q) \cap Q$ est non vide, ce qui signifie que k est somme de deux carrés. Si $k \neq 0$, l'un de ces carrés est même non nul. Mais alors, en écrivant $0 \equiv k + (-k) \pmod p$, on peut bien écrire 0 comme une somme de quatre carrés dont au moins deux sont non nuls.

   Puis, en vertu de l'identité $k^2 \equiv (3k/5)^2 + (4k/5)^2 \pmod p$, tout carré non nul est en fait somme de deux carrés non nuls. Par conséquent, 0 est bien somme de quatre carrés non nuls, ce qui signifie que p est olympique.