PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 2 : ARITHMÉTIQUE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 14 DÉCEMBRE 2018

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés 'Juniors" ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés 'Communs" sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés 'Seniors" ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.
contact-pofm@animath.fr

Exercices Juniors

Exercice 1. Trouver le nombre de solutions de $n^2m^6 = 180t + 2$ pour n,m et t des entiers positifs.

Exercice 2. Trouver la somme des entiers n positifs tels que $n^2 + 8n + 44$ soit un carré parfait (le carré d'un entier).

Exercice 3. Un entier n est *parfait* si la somme de ses diviseurs positifs (1 et n compris) est $2n$. Soit $n > 6$ un entier parfait et p son plus petit diviseur premier. Montrer que l'exposant de p dans la décomposition en produit de puissances de nombres premiers de n est pair.

Exercices Communs

Exercice 4. Soit $n \geqslant 3$ un entier. Montrer qu'il existe n entiers 2 à 2 distincts $r_1, \dots, r_n$ strictement positifs tels que chaque r_i divise $r_1 + \cdots + r_n$.

Exercice 5. Soit n un entier positif. Montrer qu'il existe un entier positif m tel que $n! = \varphi(m)$, où φ est la fonction indicatrice d'Euler. (On rappelle que si $p_1, \dots, p_k$ sont les diviseurs premiers 2 à 2 distincts de m, $\varphi(m) = m\big((1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k})\big)$)

Exercice 6. Soit $n \geqslant 3$ un entier, montrer qu'il existe deux entier positifs impairs x et y tels que $7x^2 + y^2 = 2^n$.

Exercices Seniors

Exercice 7. Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier. Montrer qu'il existe un entier relatif n tel que pour tout $x \in \{n-1, n, n+1\}$, $p^2 \nmid x^{p-1} - 1$ et $p \nmid x$.

Exercice 8. Soit P un polynôme à coefficients rationnels de dégré supérieur ou égal à 2, et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels tels que pour tout $n \geqslant 0$, $q_n = P(q_{n+1})$. Montrer que la suite q_n est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 9. Pour m entier positif, on note $d(m)$ le nombre de diviseurs positifs de m (1 et m compris). Soit k un entier strictement positif. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers positifs n tels que n ait exactement k diviseurs premiers distincts et tel que pour tout a,b entiers strictement positifs avec $n = a + b$, $d(n) \nmid d(a^2 + b^2)$.