PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

PRÉPARATION OLYMPIQUE POFM MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE
CORRECTION

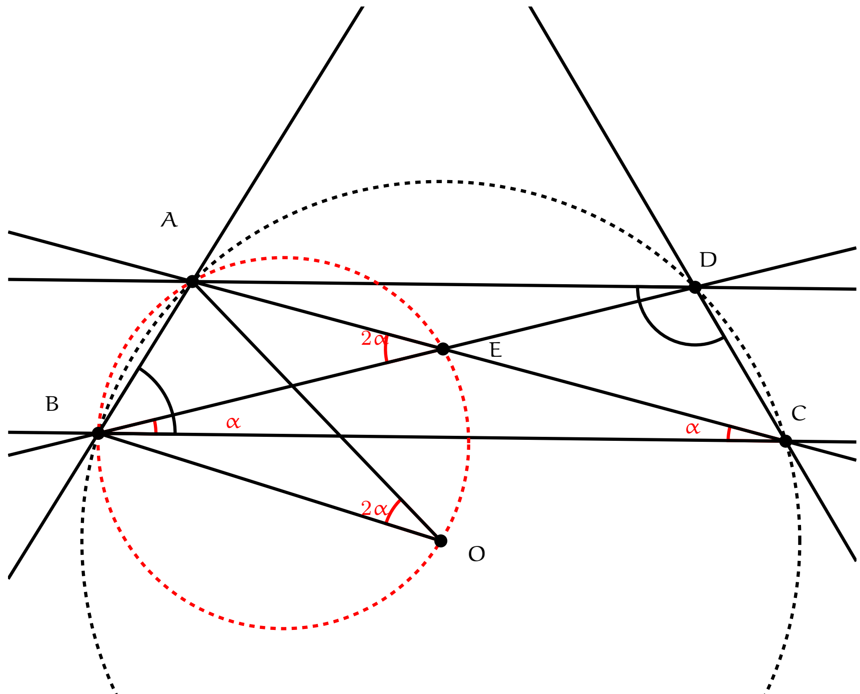
Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Communs” sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.
contact-pofm@animath.fr

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit $ABCD$ un trapèze isocèle avec $(AD)//(BC)$.
(a) Montrer que $ABCD$ admet un cercle circonscrit.
(b) On note O le centre du cercle circonscrit de $ABCD$ et E l'intersection des diagonales. Montrer que O est sur le cercle circonscrit de AEB.

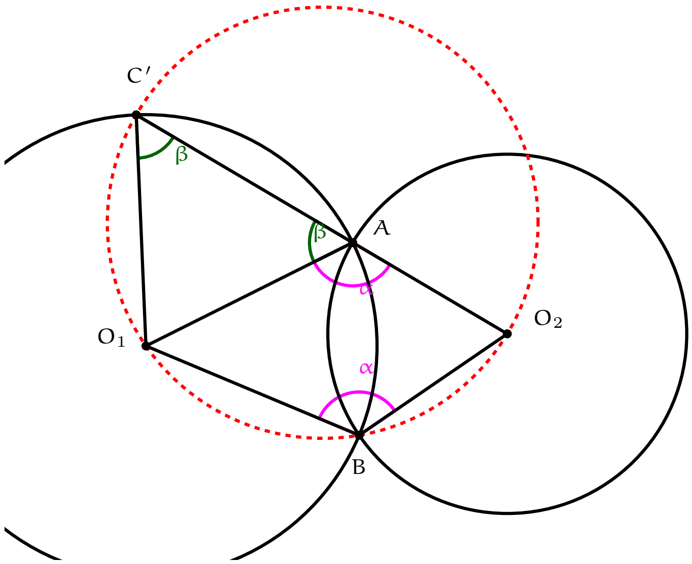


Démonstration. a) $ABCD$ est un trapèze isocèle, ainsi $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$. On sait également que $(AD)//(CB)$, donc $\widehat{DCB} = 180 - \widehat{CDA}$. Avec ces deux égalités on trouve que $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180$, ce qui montre bien que les points A, B, C et D sont sur le même cercle.

b) On va noter α l'angle $\widehat{ACB}$ et on va essayer de calculer différents angles afin d'arriver à la conclusion demandée. On trouve par symétrie que $\widehat{DBC} = \alpha$ également. Ainsi, dans le triangle EBC, sachant que la somme des angles vaut 180, on trouve $\widehat{AEB} = 180 - \widehat{BEC} = \widehat{EBC} + \widehat{ECB} = 2\alpha$. Avec le théorème de l'angle au centre, sachant que l'angle inscrit $\widehat{ACB} = \alpha$, on a $\widehat{AOB} = 2\alpha$. Mais alors, $\widehat{AOB} = 2\alpha = \widehat{AEB}$ ce qui montre bien que les points A, E, O et B sont cocycliques.

□

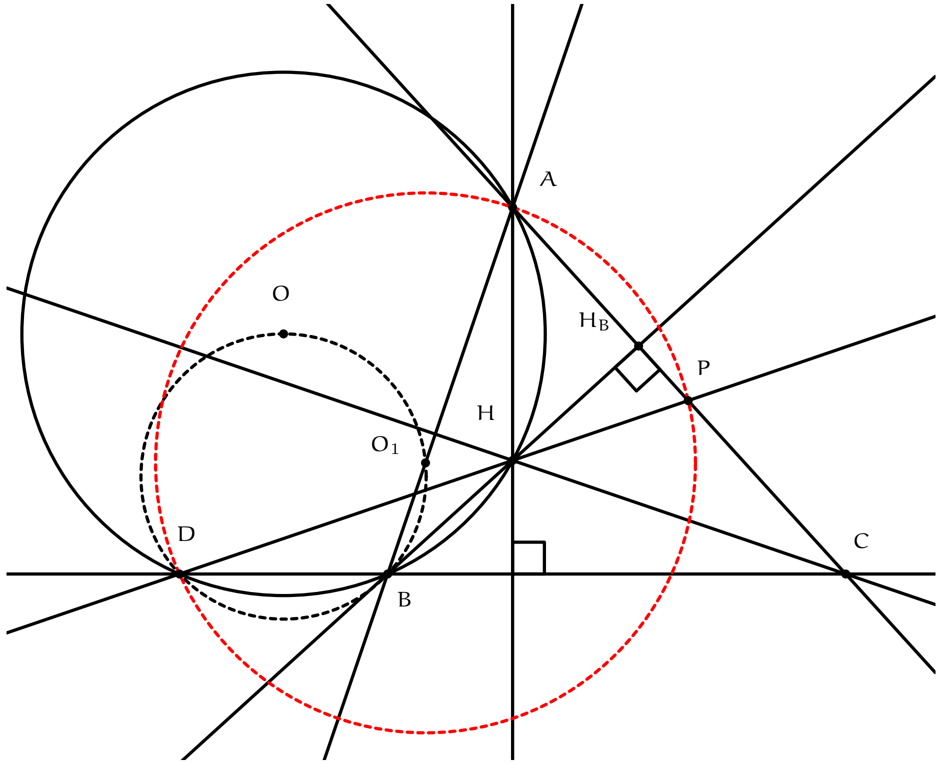
Exercice 2. Soit ω_1 et ω_2 deux cercles de centre O_1 et O_2, on suppose qu'ils se coupent en A et B. Le cercle passant par les points O_1, O_2 et B coupe le cercle ω_1 en C. Montrer que les points C, A et O_2 sont alignés.



Démonstration. Pour résoudre cet exercice, on va plutôt introduire dans un premier temps C' la deuxième intersection de la droite (AO_2) avec le cercle ω_1 puis on va montrer que $C = C'$.
On peut décomposer l'angle plat $\widehat{O_2AC'}$ en deux angles : $\widehat{C'AO_1}$ et $\widehat{O_1AO_2}$ dont la somme vaut donc 180 degrés. D'une part, en faisant une symétrie axiale d'axe (O_1O_2), alors les points A et B sont échangés, mais alors l'angle $\widehat{O_1AO_2}$ vaut l'angle $\widehat{O_1BO_2}$. D'autre part, $O_1A = O_1C'$ comme O_1 est le centre du cercle ω_1, ainsi le triangle O_1AC' est isocèle en O_1, et on trouve que $\widehat{O_2C'O_1} = \widehat{AC'O_1} = \widehat{C'AO_1} = 180 - \widehat{O_1AO_2} = 180 - \widehat{O_1BO_2}$, donc en particulier, $\widehat{O_2C'O_1} = 180 - \widehat{O_2BO_1}$, ce qui démontre bien que les points O_1, B, O_2 et C' sont cocycliques. Ainsi, si on reprend la définition du point C, on obtient que O_1, O_2, B et C sont cocycliques et que C' est sur ω_1, donc que $C' = C$, mais comme les points A, O_2 et $C' = C$ sont alignés on a entre autre que A, O_2 et C sont alignés.

□

Exercice 3. Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Le cercle circonscrit de ABH, de centre O, recoupe la droite (BC) en D, la droite (DH) intersecte la droite (AC) en P. Montrer que le centre du cercle circonscrit de APD est sur le cercle circonscrit de ODB.



Démonstration. Une construction soigneuse nous permet de conjecturer que le centre du cercle APD est également sur la droite (AB), c'est donc tout naturellement que l'on introduit O_1, le point de la droite (AB) qui est à égale distance de A et de D, c'est alors un bon candidat pour être le centre du cercle APD.

Étape 1. O_1 est le centre du cercle de APD.

Démonstration. On introduit H_B le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC, on pose alors $x = \widehat{H_BPH}$. Comme le triangle HH_BP est droit en H_B, on a $\widehat{H_BHP} = 90 - \widehat{H_BPH} = 90 - x$. Mais d'autre part, $x = \widehat{H_BBP} = \widehat{DHB}$, ce dernier angle vaut l'angle $\widehat{DAB} = x$ par cocyclicité des points A, H, B et D.
On note M le milieu du segment $[AD]$, alors M et O_1 sont sur la médiatrice du segment $[AD]$, donc $(MO_1) \perp (AD)$, et ainsi $\widehat{MO_1A} = 90 - \widehat{MAO_1}$.
Or $O_1A = OD$, donc $\widehat{AO_1D} = 2x = 2\widehat{APD}$. On a maintenant d'une part que $\widehat{AO_1D} = 2\widehat{APD}$ mais d'autre part que $OA = O_1D$, on voudrait en déduire que O_1 est bien le centre du cercle circonscrit de APD. Mais par angle au centre c'est bien le cas. □

Étape 2. O_1 est sur le cercle ODB.

Démonstration. On remarque que les points O, M et O_1 sont sur la (même) médiatrice de $[AC]$, ils sont donc alignés. On trouve ainsi l'angle $\widehat{OO_1D} = x$. Mais d'autre part, $\widehat{DOB} = 2\widehat{DAB} = 2(90 - x)$. Comme le triangle ODB est isocèle en O, on peut calculer l'angle $\widehat{OBD}$ qui vaut ainsi x. Mais alors, $\widehat{OO_1D} = x = \widehat{OBD}$, ce qui conclut l'étape 2.

□

On sait que O_1 est le centre du cercle APD et sur le cercle ODB, donc le centre du cercle de APD est bien sur le cercle ODB ce qui conclut.

□

Exercices Communs

Exercice 4. Soit ABC un triangle, H le pied de la hauteur issue de A, L le pied de la bissectrice issue de B et M le milieu de $[AB]$. On suppose que dans le triangle HLM on a les deux propriétés : (AH) est une hauteur et (BL) est une bissectrice. Montrer que (CM) est une médiane.

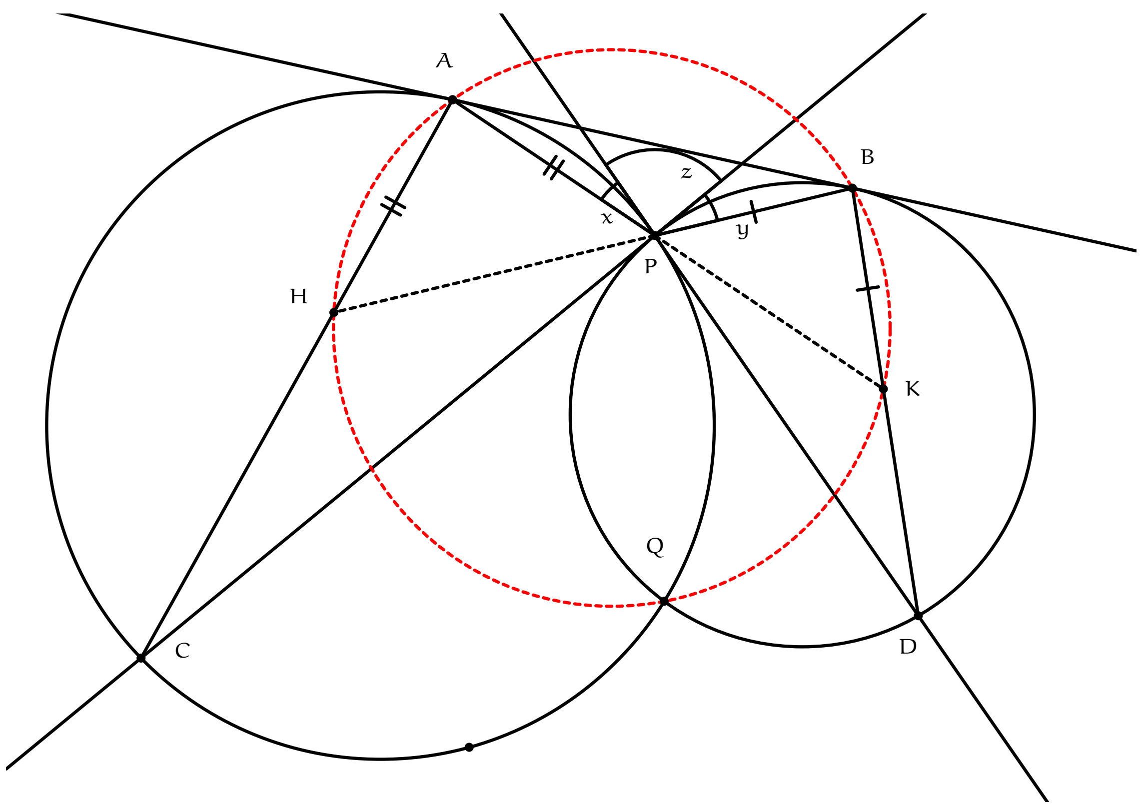
Démonstration. On prend le triangle ABC, on va démontrer qu'il est équilatéral, en utilisant les deux propriétés, la troisième découlera.

On a $(AH) \perp (ML)$ et $(AH) \perp (BC)$, donc $(BC)//(ML)$. On trouve ainsi que L est le milieu de $[AC]$. Cependant, $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC}$ ce qui montre que $AB = BC$, et (BL) est une bissectrice, une hauteur et une médiane.

Il faut maintenant que (BL) bissecte $\widehat{MLH}$, ou encore (AC) comme bissectrice extérieure, donc par chasse aux angles $\beta = \widehat{HLC} = \widehat{MLA} = \alpha$. Donc $\alpha = \beta$ et ABC est équilatéral, donc en particulier (CM) est la médiane dans MHL.

□

Exercice 5. Soit ω_1 et ω_2 deux cercles qui se coupent en P et Q. On suppose que la tangente commune à ω_1 et ω_2, la plus proche de P, touche les cercles ω_1 et ω_2 en A et B respectivement. Les tangentes en P aux cercles ω_1 et ω_2 recoupe ω_2 et ω_1 en D et C respectivement. On pose H et K sur les segments $[AC]$ et $[BD]$ de tel sorte que $AH = AP$ et $BK = BP$. Montrer que les points A, B, K, Q et H sont sur le même cercle.



Démonstration. On conjecture sur une bonne figure que les points H, P et B sont alignés, de même pour les points K, P et A.

Lemme. Les points H, P et B sont alignés, ainsi que les points K, P et A.

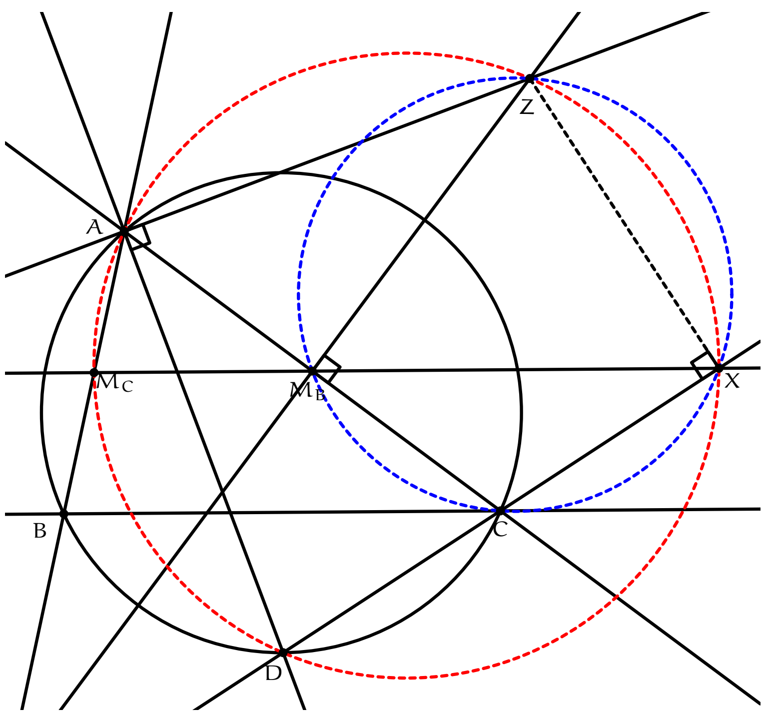
On note $x = \widehat{PAB}$, $y = \widehat{ABP}$ et $z = \widehat{CPD}$. Comme la droite (PC) est tangente à ω_2 on sait que l'angle que la tangente forme avec la droite (PB) est également x, de la même manière l'angle entre (PC) et (AP) est y (il s'agit de choisir les bonnes orientations). z est l'angle entre les deux tangentes. Dans ce cas $\widehat{APB} = x+y+z$ et au total les angles du triangle ABP sont x, y et $x+y+z$, cela montre que $2x+2y+z = 180$.

Par angle à la tangente l'angle $\widehat{CAP} = z$, mais $AH = AP$ donc les triangle AHP est isocèle en A, et $\widehat{AHP} = \widehat{APH} = \frac{180-z}{2} = \frac{2x+2y}{2} = x+y$, alors l'angle $\widehat{HPB} = \widehat{HPA} + \widehat{APB} = x+y+x+z+y = 2x+2y+z = 180$, ce qui montre bien que les points H, P et B sont alignés. Le raisonnement symétrique montre que K, P et A sont alignés.

On a trouvé dans la preuve du lemme que $\widehat{AHB} = \widehat{AHP} = x+y$, mais alors par symétrie $\widehat{BKA} = \widehat{BKP} = x+y$, et par angle à la tangente, $\widehat{PQA} = x$ et $\widehat{PQB} = y$, donc $\widehat{AQB} = x+y$, on a ainsi $\widehat{AHB} = \widehat{BKA} = \widehat{BQA}$ ce qui montre bien que les points A, H, Q, K et P sont cocycliques.

□

Exercice 6. Soit ABC un triangle, D est le milieu de l'arc BC du cercle ABC ne contenant pas A, Z est l'unique point sur la bissectrice extérieure de $\widehat{BAC}$ tel que $ZA = ZC$. Montrer que le cercle ADZ passe par le milieu du côté de [AB].



Démonstration. **Preuve 1 :**

On note $\alpha = \widehat{BAC}$, on pose M_B le milieu de [AB] et M_C le milieu de [AC]. On note X l'intersection des droites (M_BM_C) et (DC).

Alors comme $(M_BM_C)//(BC)$, on trouve $\widehat{M_BXC} = \widehat{BCD} = \widehat{BAD} = \frac{\alpha}{2}$, l'avant-dernière égalité découle du fait que les points A, B, C et D sont cocycliques et que D est le pôle sud de A dans le triangle ABC. On calcule maintenant que $\widehat{CAZ} = 90 - \frac{\alpha}{2}$, Z et M_B sont sur la médiatrice de $[AC]$ donc $(ZM_B) \perp (AC)$, et on trouve alors $\widehat{AZM_B} = \widehat{CZM_B} = \frac{\alpha}{2}$, mais alors $\widehat{CZM_B} = \widehat{CXM_B}$, ce qui montre que les points Z, M_B, C et X sont cocycliques.

Comme Z, M_B, C et X sont cocycliques et $\widehat{ZM_BC} = 90$ on doit avoir $\widehat{ZCX} = 90$. On a de plus, $\widehat{DAZ} = 90$, ce qui montre que les points A, Z, X et D sont cocycliques.

On a également, $\widehat{M_BAD} = \frac{\alpha}{2} = \widehat{M_BXD}$ ce qui montre que les points A, M_B, D et X sont cocycliques. Mais dans ce cas : A, M_B, D, X et Z sont cocycliques. Donc en particulier, le cercle ADZ passe par le milieu du segment [AB].

Preuve 2 :

On va présenter ici une méthode un peu plus générale que la méthode précédente, il s'agit de composer trois similitudes et d'en trouver certaines propriétés.

On pose $S_{Z,\mu,r}$ la similitude directe de centre Z, d'angle μ (orienté) et de rapport r.

Alors, $S_{M_B,180,1}$ fixe M_B échange A et B elle échange également D avec une point appelé D'.

On trouve par chasse aux angles immédiate que $\widehat{AZC} = \alpha$.
$S_{Z,\alpha,1}$ fixe Z, envoie alors A sur C.

On trouve par chasse aux angles que $\widehat{CDB} = 180 - \alpha$. Donc $S_{D,180-\alpha,1}$ fixe D et envoie C sur B.

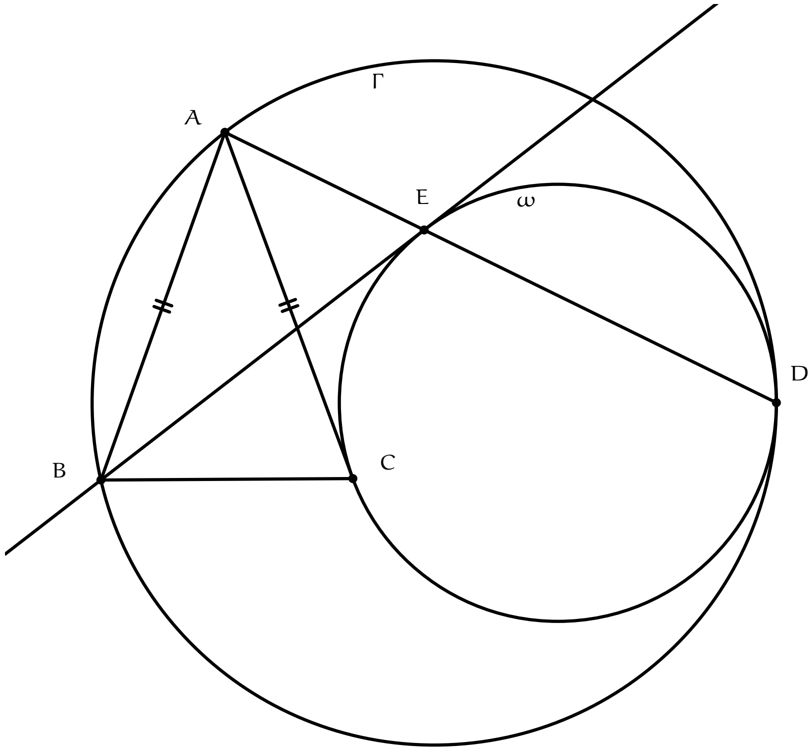
On effectue alors $T = S_{M_B,180,1} + S_{Z,\alpha,1} + S_{D,180-\alpha,}$, cette transformation est également une similitude directe de rapport $1 \times 1 \times 1$ et d'angle $180 + 180 - \alpha + \alpha = 360$, le résultat est donc une translation, mais T envoie B sur B, une translation qui a un point fixe est l'identité donc T est en fait l'identité. Mais la transformation T envoie D sur D' puis D' sur D'' et D'' sur $D''' = D$, D'' est envoyé sur $D''' = D$ par la similitude de centre D donc $D'' = D''' = D$, ainsi la similitude de centre Z envoie D' sur D, donc en particulier $ZD' = ZD$ et $\widehat{D'ZD} = \alpha$. Dans le triangle $A'DZ$, le point M_B est le pied de la hauteur, bissectrice, etc..., donc en particulier, $\widehat{M_BZC} = \frac{\alpha}{2} = \widehat{M_BAD}$, ce qui conclut.

Cette deuxième approche peut sembler longue mais elle est beaucoup plus général et peut s'appliquer à d'autre configurations que le cas particulier que l'on vient de voir.

$\square$

Exercices Seniors

Exercice 7. Soit ABC un triangle isocèle en A, Γ est un cercle tangent à (AC) en C à l'extérieur du triangle ABC. On note ω le cercle passant par A et B et tangent intérieurement à Γ en D. E est la seconde intersection de (AD) et de Γ, montrer que (BE) est tangente à Γ.



Démonstration. **Preuve 1 :**

On note I_A l'inversion de centre A et de rayon $r = AB = AC$, ainsi, B et C sont fixe par I_A, la puissance de A par rapport au cercle ω est exactement le rayon au carré donc les cercle ω est fixe par inversion. Cela montre que D et E sont échangés dans I_A. Mais alors le cercle Γ passant par A, B et D va être envoyé sur une droite passant par B et E et tangente au cercle ω, cela conclut.

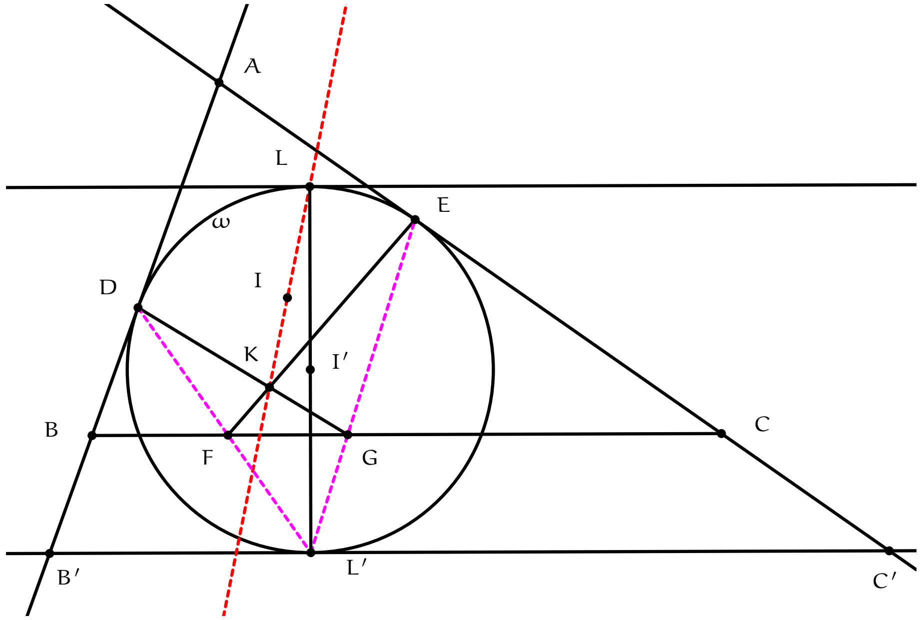
Preuve 2 :

On construit B', le deuxième point de Γ, tel que $AB = AB' = AC$. Alors, on veut démontrer que l'intersection, E' des droites (BB') et (AD) est sur ω.

On a $\widehat{BDA} = x$ et $\widehat{ABB'} = x$. Par isocélité de ABB' en A, on trouve $\widehat{AB'B} = x$. Donc les triangles ABD et AEB sont semblables, on trouve alors $AB^2 = AE \times AD$. Donc E' est sur ω, ce qui montre que $E' = E$. L'homothetie de centre D qui envoie le cercle ω sur le cercle Γ envoie ainsi le point E sur le point A et donc la tangente en E à ω sur la tangente en A à Γ?. Il se trouve que comme $AB = AB'$, la tangente en A à Γ est parallèle à la droite (BB'), mais la tangente en E à ω doit être parallèle à la tangente en A à Γ. Cela montre que la tangente en E à ω et (BB') ne sont en fait qu'une seule et même droite et cela conclut.

□

Exercice 8. Soit ADE un triangle isocèle en A. Soit le cercle ω, tangent aux droites (AD) et (AE) en D et E. Soit B et C deux points au delà de D et E sur les droites (AD) et (AE). On suppose que $BC > BD + CE$. Finalement, soit F et G deux points sur le segment $[BC]$ de tel sorte que $BD = BF$ et $CG = CE$, les droites (DG) et (FE) se coupent en K, la tangente à ω parallèle à (BC) et entre A et (BC) touche ω en L. Montrer que le centre du cercle inscrit de ABC est sur (KL).



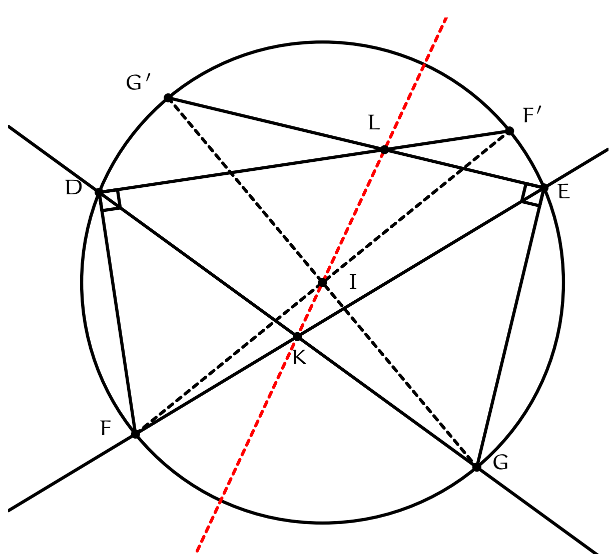
Démonstration. Soit B' et C' deux points sur les demi-droites $[AD]$ et $[AC]$ au delà de D et E de tel sorte que $(B'C')//(BC)$ et que $(B'C')$ soit tangente à ω en L'.

Lemme. D, F et L' sont alignés de même pour E, G et L'.

On a $(BF)//(B'L')$ et $DB = BF$, ainsi que $DB' = B'L'$, donc $DBF \sim DB'L'$, par Thalès. On obtient que D, F et L' sont alignés, le raisonnement symétrique montre que E, G et L' sont alignés.

On remarque que ω est le cercle inscrit de $AB'C'$. La tangente en L et la tangente en L' sont deux droites parallèles, donc le segment $[LL']$ est un diamètre de ω, ainsi $\widehat{L'EL} = 90$ et $\widehat{L'DL} = 90$.

Comme I est le centre du cercle inscrit de ABC, I est l'intersection des bissectrices des angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ et $\widehat{CAB}$ ou encore par isocélité des triangles DBF, GCE et EAD que I est l'intersection des médiatrices de $[DF]$, $[GE]$ et $[ED]$, le fait que ces médiatrices soient concourantes nous amène à dire que le quadrilatère $DEFG$ est cyclique et de centre du cercle circonscrit I.

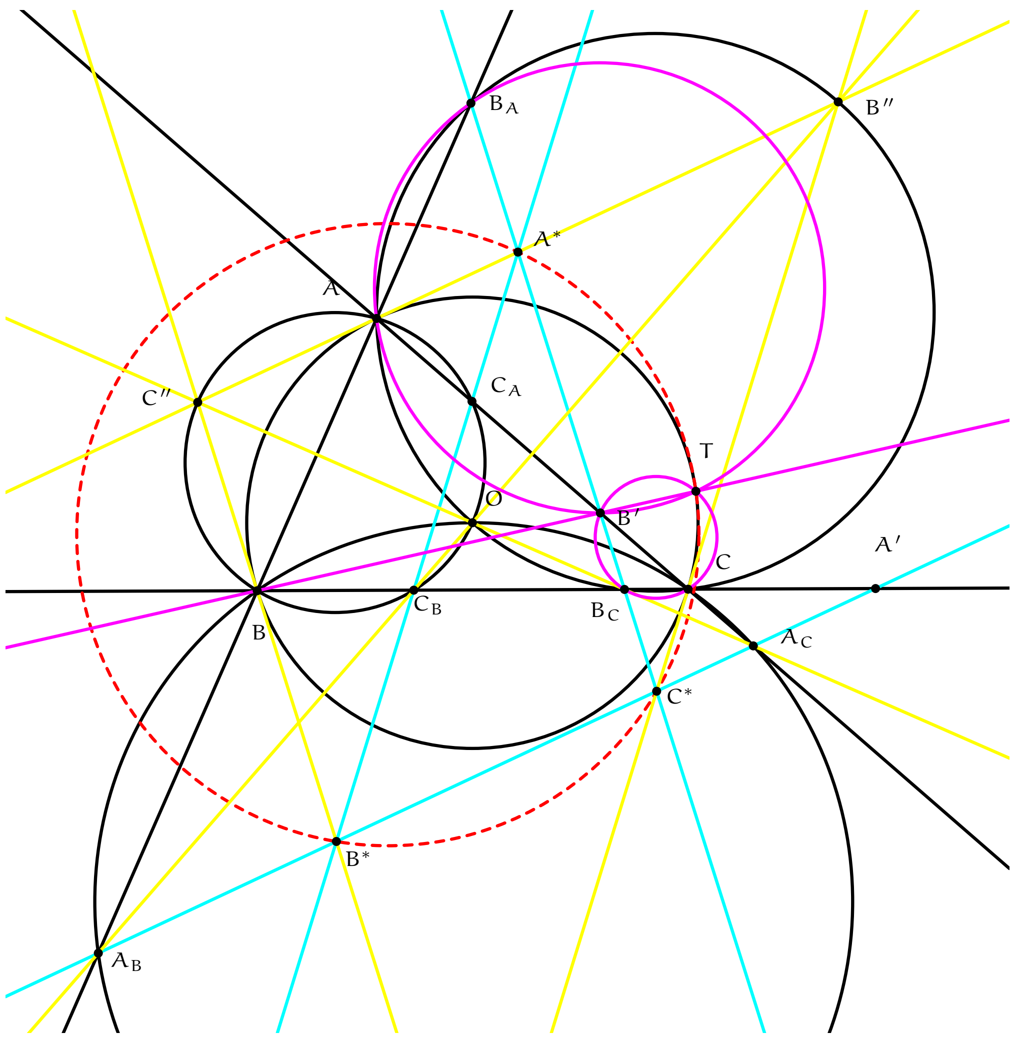


On va isoler maintenant le cercle DEFG, le point I, le point L et le point K, en sachant que I est le centre du cercle DEFG, que K est l'intersection des diagonales et que L est tel que $\widehat{\mathrm{L'EL}} = 90$ et $\widehat{\mathrm{L'DL}} = 90$.

On intersecte maintenant la droite (EL) avec le cercle EDFG en $\mathrm{G'}$, et la droite (DL) également avec le cercle EDG et en $\mathrm{F'}$. En sachant que $\widehat{\mathrm{L'EL}} = 90$ et $\widehat{\mathrm{L'DL}} = 90$ on trouve que $\mathrm{G'}$ (resp. $\mathrm{D'}$) est le point diamétralement opposé à G (resp. D) dans le cercle EDFG, donc I est l'intersection des droites $\mathrm{GG'}$ et $\mathrm{DD'}$. On numérote les points $\mathrm{G'}$, G, D, $\mathrm{F'}$, F et E comme 1, 2, 3, 4, 5 et 6 et appliquer Pascal comme les 6 points sont sur le même cercle, alors $(\mathrm{G'G}) \cap (\mathrm{F'F})$, $(\mathrm{GD}) \cap (\mathrm{FE})$ et $(\mathrm{DF'}) \cap (\mathrm{EG'})$ ($(12) \cap (45)$, $(23) \cap (56)$ et $(34) \cap (61)$) sont alignés ce qui démontre bien que les points K, I et L sont alignés.

□

Exercice 9. Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. On note $\mathrm{A_B}$ et $\mathrm{A_C}$ les autres intersections du cercle BOC avec (AB) et (AC) et $(\ell_1) = (\mathrm{A_B A_C})$, on définit de la même manière $\mathrm{B_C}$, $\mathrm{B_A}$, $\mathrm{C_A}$ et $\mathrm{C_B}$ ainsi que (ℓ_2) et (ℓ_3). On note $\mathrm{A^*B^*C^*}$ le triangle formé par les droites (ℓ_1), (ℓ_2) et (ℓ_3). Montrer que les cercles circonscrits des triangle ABC et $\mathrm{A^*B^*C^*}$ sont tangents.



Démonstration. Dans cet exercice nous allons d'abord donner une preuve en chasse aux angles uniquement avant de faire un lien avec le point de Feuerbach. La preuve que nous allons donner démontre en outre plusieurs propriétés du point de Feuerbach que nous énoncerons à la fin.

On note A', l'intersection des droites (BC) et (A_BA_C), on dfinit de la même manière les points B' et C'.
On note T l'intersection des cercles circonscrits de AB_AB' et ABC, on veut démontrer au final que T est le point de tangence des cercles $A^*B^*C^*$ et ABC.

Lemme 1. T est également sur le cercle circonscrit de $B'B_CC$.

Démonstration. En chasse aux angles : $(B'T, TC) = (B'T, AT) + (AT, TC)$ d'après le relation de Chasles, en utilisant la cocyclicité des points T, A, B_A et B' ainsi que celle des points T, A, B et C, on trouve $(B'T, AT) + (AT, TC) = (B'B_A, AB_A) + (AB, BC) = (B'B_A, AB) + (AB, BC) = (B'B_A, BC) = (B'B_C, B_CC)$, ainsi $(B'T, TC) = (B'B_C, B_CC)$, donc les points T, B', B_C et C sont cocycliques, ce qui conclut la preuve du lemme.

□

Lemme 2. les points B', B et T sont alignés.

Démonstration. On regarde les cercles $B'TCB_C$, $AB'TB_A$ et ACB_AB_C (tous ces points sont cocycliques d'après le lemme précédent), leurs axes radicaux sont $(B'T)$, (B_AA) et (B_CC), ce qui montre par concourance des axes radicaux que les points B, B' et T sont alignés.

□

Lemme 3. (AA^*) est tangente au cercle circonscrit de ABC.

Démonstration.

Lemme 3.1. O, C_A et B_A sont alignés.

Démonstration. On va démontrer que C_A est sur la médiatrice de $[BC]$.

On a $(C_AO, BC) = (C_AO, AC) + (AC, BC) = (C_AO, AC_A) + (AC, BC) = (AB, AO) + (AC, BC) = 90$ (car la hauteur issue d'un sommet d'un triangle et la droite reliant ce somet avec le centre du cercle circonscrit sont conjugués isogonales), ce qui montre que (C_AO) et (BC) sont perpendiculaires, mais O est sur le médiatrice de $[BC]$ donc C_A également.

De manière symétrique, B_A est sur la médiatrice de $[BC]$ et ainsi O, B_A et C_A sont alignés. □

Lemme 3.2. Le triangle $A^*C_AB_A$ est isocèle en A^*.

Démonstration. $(A^*C_A, C_AB_A) = (C_BC_A, C_AO) = (C_BB, BO) = (CB, BO) = (OC, BC) = (OB_A, B_CB_A) = (CB_A, B_AA^*)$

Donc $A^*B_AC_A$ est isocèle en A^*. □

De plus, les angles en B_A et B des triangles $A^*B_AC_A$ et BCO sont égaux, ce qui montre en fait que $A^*B_AC_A \sim OBC$.

Ainsi, $(C_AA^*, A^*B_A) = 2(C_AA, AB_A)$ et A^* est le centre du cercle circonscrit de AB_AC_A. Mais dans ce cas $(A^*A, AC) = (AA^*, AC_A) = 90 - (C_AB_A, B_AA) = 90 - (OB_A, B_AA) = 90 - (OC, CA) = (AB, BC)$ (on utilise toujours le fait que la hauteur issue d'un sommet d'un triangle et la droite reliant ce somet avec le centre du cercle circonscrit sont conjugués isogonales)

Donc (AA^*) est bien une tangente de ABC.

□

Lemme 4. Les points C_B, B_C, T, A et A^* sont cocycliques.

Démonstration.

Étape 1. C_B, B_C, A et A^* sont cocycliques.

Démonstration. On calcule l'angle (C_BA, B_CA) :

$(C_BA, AB_C) = (C_BA, AO) + (AO, AB_C) = (C_BB, BO) + (CO, CB_C)$ par cocyclicité des points C_BBAO et AOB_CC, $(C_BB, BO) + (CO, CB_C) = (CB, BO) + (CO, CB) = (CO, BO) = 2(CA, AB)$, donc $(C_BA, AB_C) = 2(CA, AB)$, on trouve également que $(C_BA^*, A^*B_C) = 2(CA, AB)$ d'après le lemme 3.2, ainsi $(C_BA, AB_C) = (C_BA^*, A^*B_C)$, ainsi les points C_B, B_C, A et A^* sont cocycliques. □

Étape 2. T est sur le cercle circonscrit de C_B, B_C, A et A^*.

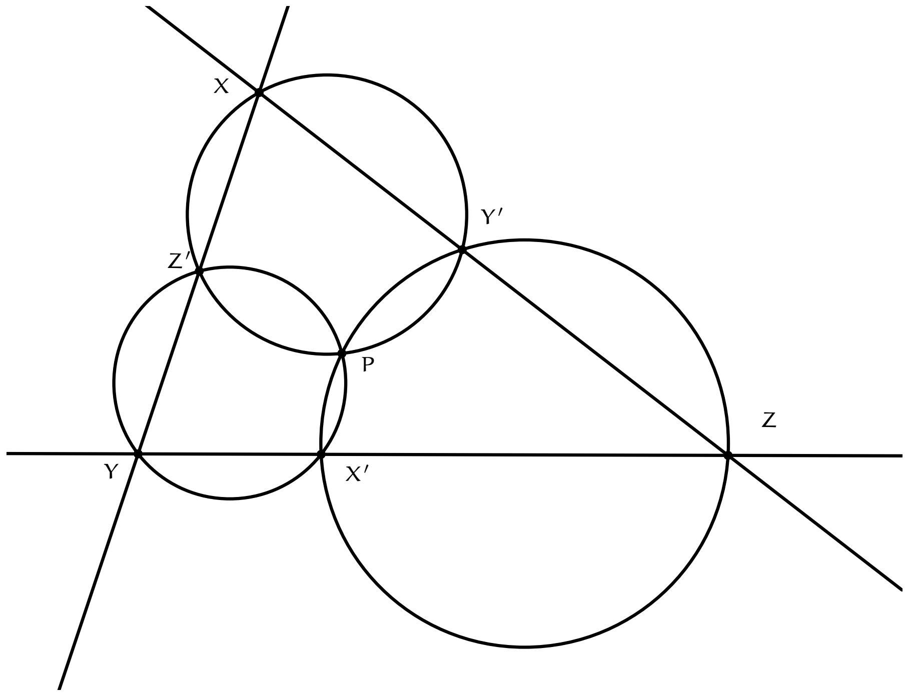
Démonstration. $(A^*B_C, B_CT) = (B'B_C, B_CT) = (B'C, CT) = (B'C, CT) = (AC, CT) = (AA, AT) = (AA^*, AT)$, où la droite (AA) désigne ici la tangente en A au cercle ABC, d'après les lemmes 1 et 3, alors les points A^*, B_C, T et A sont cocycliques.

□

En conclusion, les points C_B, B_C, T, A et A^* sont cocycliques.

On a de manière symétrique C^*, A_B, B_A, T et C. □

Comme T est sur le cercle $C_BB_CTAA^*$ on peut échanger les rôles de B et C, de la même manière on peut échanger les rôles de A et B en sachant que les points $C^*A_BB_ATC$ sont cycliques. On peut trouver la cocyclicité des quadrilatères suivants : $AB'TB_A$, $BC'TC_A$, $CA'TA_C$, $BA'TA_B$, $AC'TC_A$, $CB'TB_C$, on trouve la cyclicité des pentagones suivants : $AA^*TC_AB_A$, $CC^*TB_CA_C$ et $BB^*TA_BC_B$, mais également B, B' et T sont alignés, $AA'T$ et $CC'T$ alignés, ainsi que OC_AB_C, OB_CA_C et OC_BA_B. Après avoir compris un peu mieux l'exercice et les différentes propriétés de la figure on peut conclure.
On rappelle avant tout le théorème de Miquel dont la démonstration en chasse aux angles est laissée au lecteur :



Soit XYZ un triangle, X', Y' et Z' des points sur les côtés YZ, XY et ZX, alors les cercles $YX'Z'$, $XY'Z'$ et $X'Y'Z$ sont concourants en P.

On pose dans un premier temps : $X, Y, Z = A_C, B', C^*$ et $X', Y', Z' = B_C, A', C$. Alors les cercles circonscrits de CA_CA', $B'B_CC$ et B_CC^*A' se coupent en T, car T est sur les cercles circonscrits de CA_CA' et $B'B_CC$. Ainsi, T, B_C, C^* et A' sont cocycliques.

En posant $X, Y, Z = A', C_B, B^*$ et $X', Y', Z' = A^*, C^*, B_C$. Alors B_CC^*A', $C_BB_CA^*$ et $A^*B^*C^*$ sont concourantes en T également (car T est déjà sur les cercles circonscrits de B_CC^*A' et $C_BB_CA^*$). Cela démontre ainsi que le point T est sur le cercle circonscrit de $A^*B^*C^*T$.

On va maintenant démontrer que les cercles circonscrits de ABC et $A^*B^*C^*$ sont tangents en T. On introduit (t) la tangente en T au cercle ABC, on va démontrer que (t) est également tangente au cercle $A^*B^*C^*$.
On a $(C^*T, t) = (C^*T, TC) + (TC, t) = (C^*A_B, A_BC) + (TB, BC)$ (par cocyclicité et angle tangent). Or, $(C^*A_B, A_BC) = (BA, AC) + (AB, BC)$ par chasse au angle direct, mais $(BC', C'C_B) = (BA, AC) + (AB, BC)$ également. Ainsi, $(C^*T, t) = (BC', C'C_B) + (TB, BC) = (BT, TC_B) + (TB, BC) = (BC, TC_B) = (TB^*, B^*C^*)$.
Ce qui conclut la preuve de l'exo.

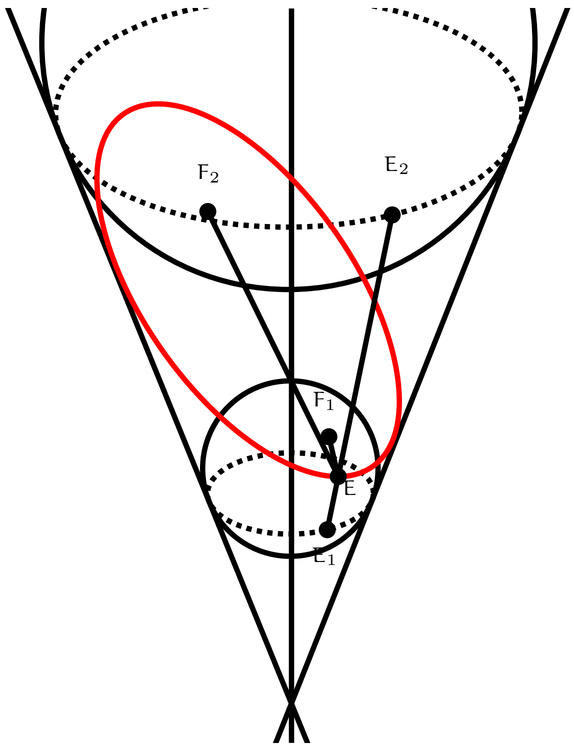
Remarque. Il est également possible de démontrer, avec des outiles plus ava,cés, que les droites (AB), (BC), (CA), (A^*B^*), (B^*C^*) et (C^*A^*) sont tangentes à une même parabole $\mathcal{P}$ de foyer T et de directrice la droite qui relie O et le centre du cercle circonscrit de $A''B''C''$.

Démonstration. On va commencer par quelques lemmes sur les paraboles

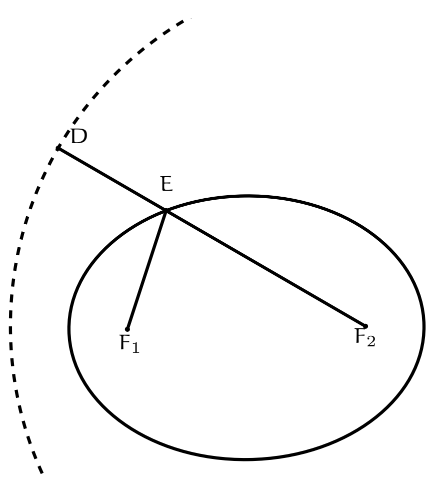
Lemme. pour toute parabole il existe un foyer et une directrice tel que pour tout point P de la parabole, la distance de P au foyer et à la droite soit la même.

Démonstration. On va démontrer le résultat suivant sur les ellipses : chaque ellipse admet deux foyers, appelés F_1 et F_2 tel que pour chaque point E de l'ellipse $F_1E + F_2E$ est constante.

on rappelle qu'une conique est une section conique c'est-à-dire que l'on coupe un cône avec un plan quelconque et que l'on regarde les points d'intersection du plan et de la conique dans le plan du plan en question.



On peut prendre les deux sphères tangentes au cône et au plan à la fois, la sphère du bas touche le plan en un point F_1 et la sphère du haut touche le plan en un point F_2, alors pour un point E sur l'ellipse (en rouge sur le dessin), la droite F_1E est une tangente à la sphère du bas, la droite E_1E également car elle appartient au cône et que la phère est tangente au cône. Ainsi, $EF_1 = EE_1$, de la même manière $EF_2 = EE_2$, ainsi $EF_1 + EF_2 = E_1E_2$ et E_1E_2 est clairement une constante pour tout les points E. Donc $EF_1 + EF_2$ est constant, ce qui conclut.



On contruit maintenant le point D tel que $EF_1 = ED$ et que les points D, E te F_2 soient alignés. Alors pour tout E sur l'ellipse on trouve que $F_2D = F_1E + F_2E$ est une constante, donc quand E bouge sur l'ellipse, le point D bouge sur une cercle de centre F_2.

On cherche maintenant à contruire une ellipse, pour construire une ellipse l'intersection du plan et de la conique ce fait de manière parallèle à un des "côtés" du cône, dans ce cas le point F_2 est envoyé à l'infini. Regardons ce qu'il advient de notre point D précédent, il bouge sur un cercle de centre un point à l'infini donc une droite, pour construire le point E, il s'agit maintenant de prendre le point sur un rayon du cercle (c'est-à-dire une droite perpendiculaire au lieu des points D dans notre cas) et de prendre le point sur cette droite qui à la même distance à D et à F_1, autrement dit il existe un point F_1 et une droite (d) tel que pour tout point de la parabole la distance à la droite (appelée directrice) et au point soit la même. □

Lemme. Soit $\mathcal{P}$ une parabole et (t) une tangente à $\mathcal{P}$ en E, alors le symétrique de F par rapport à (t) est sur la directrice de la parabole.

Démonstration. Soit E_1 la projection orthogonale de E sur la directrice, alors $FE = EE_1$, on note E' le symétrique de F par rapport à (t), on a alors $EE' = EF = EE_1$, comme EE_1 est la distance de E à la parabole la droite, le point E' est du même côté de la directrice que la parabole. On prend maintenant G le point de la parabole tel que (GE') est perpendiculaire à la directrice, alors en notant G_1 la projection orthogonale de G sur la directrice, on a d'une part : $FG = GG_1 = GE'$ donc $E' = G_1$ est E' est sur la directrice. Ce qui conclut. □

Lemme. Soit (t_1), (t_2) et (t_3) trois tangentes à une parabole $\mathcal{P}$ de foyer F, alors le cercle circonscrit du triangle formé par (t_1), (t_2) et (t_3) passe par F également.

Démonstration. Les trois symétriques de F par rapport aux trois droites sont sur la directrice, donc alignés, ce qui montre d'après Steiner que le point F est sur le cercle circonscrit du triangle induit par les trois tangentes et de plus que l'orthocentre de ce triangle est sur la directrice. □

Il existe une unique conique tangente à cinq droites, en prenant la coniques tangentes aux droites (AB), (BC), (CA) et (B_AB_C) et la droite à l'infini on trouve une parabole tangente aux quatres premiers droites, d'après le lemme précédent le foyer est sur les cercles circonscrits de $B'B_CC$ et $B'AB_A$, il s'agit donc de F (B' est sur les tangentes donc ne peut pas être le foyer de la parabole). De la même manière on arrive à démontrer que finalement les 6 droites (AB), (BC), (CA), (A^*B^*), (B^*C^*) et (C^*A^*) sont tangentes à une même parabole $\mathcal{P}$ de foyer T et de directrice la droite qui relie O et le centre du cercle circonscrit de $A''B''C''$. □

□

Lien avec le point de Feuerbach

On pose que l'intersection des tangentes en B et C sont A''. On définit de la même manière B'' et C'', alors le cercle ABC est le cercle inscrit de $A''B''C''$, on va montrer que le cercle $A^*B^*C^*$ est le cercle d'Euler du triangle $A''B''C''$, on va ici montrer que les points A^*, B^* et C^* sont les milieux des côtés de $A''B''C''$. On sait déjà que les droites (AA^*), (BB^*) et (CC^*) sont des tangentes au cercle circonscrit de ABC, ce qui montre que les points A^*, B^* et C^* sont sur les côtés du triangles $A''B''C''$, il faut maintenant démontrer qu'ils sont les milieux des côtés.
Pour conclure on va démontrer les deux lemmes suivants.

Lemme 1. Soit ABC un triangle, D, E et F les points de tangence du cercle inscrit sur les côtés, BC, CA et AB. On note également les points X la projection orthogonale de C sur la bissectrice issue de B, alors les points X, E et F sont alignés.

Démonstration. Il y a une projection orthogonale donc on peut penser à la droite de Simson. On note alors Y le point d'intersection des droites (CX) et (AB), on sait que le cercle passant par A, C et I est le cercle antarctique et ainsi le symétrique de C par rapport à la bissectrice issue de B est également sur ce cercle par symétrie axiale le long de la bissectrice, qui passe par le centre, alors les points A, Y, C et I sont cocycliques, donc d'après la droite de Simson, les projections orthogonales de I sur les trois côtés du triangle sont alignés, il s'agit alors des points E, F et X ce qui montre le lemme.

$\square$

Lemme 2. On note toujours D le point de tangence du cercle inscrit de ABC sur BC et D' le point de tangence du cercle A-exinscrit (de centre I_A) de ABC sur BC, on note alors X et Y les projections respectives de B et C sur (AI), alors les points D, D', X et Y sont cocycliques de diamètre $[DD']$.

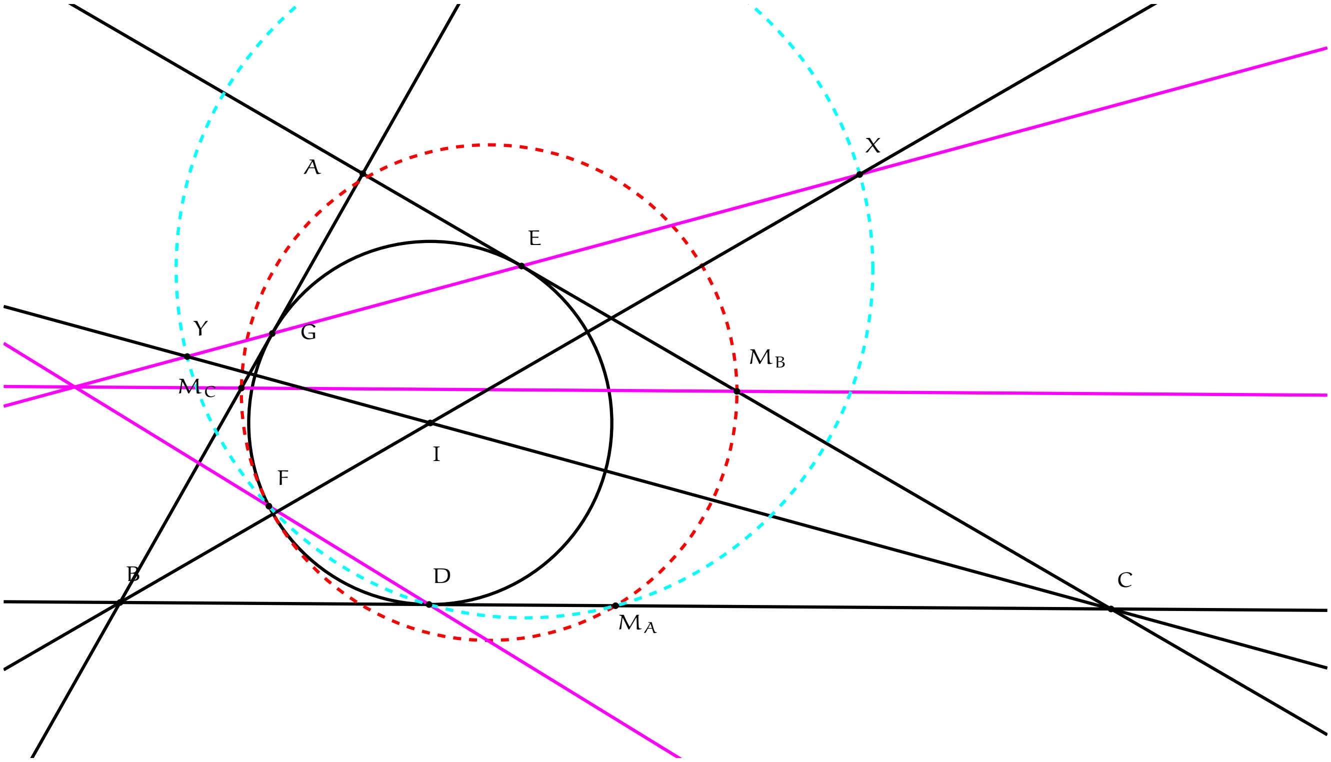
Démonstration. On va de ce fait montrer que $\widehat{DXD'} = 90$, en prenant (AI) et (BC) comme droites de référence, on trouve par cocyclicité des points D', B, X et I_A, grâce aux angles droits, que $(XD')\backslash\backslash(BI_A)$, de la même manière $(XD)\backslash\backslash(BI)$, par passage aux antiparallèle $(XD', XD) = (BI_A, BI) = 90$ ce qui démontre bien que X est sur le cercle de diamètre $[DD']$, de la même manière Y est sur le cercle de diamètre $[DD']$, ce qui montre le lemme 2. On remarque ici que le milieu du côté $[BC]$ est également le milieu de $[DD']$, et ainsi le centre du cercle passant par D', D, X et Y.

$\square$

Nous pouvons maintenant conclure et montrer que cet exercice est équivalent au point de Feuerbach. En effet, d'après le lemme 1, le point A_C est la projection orthogonale de A'' sur $(C''O)$, de la même manière B_C est la projection orthogonale de B'' sur $(C''O)$, cela montre, d'après le lemme 2 que le centre du cercle circonscrit de B_CA_CC est le milieu de $A''B''$, or d'après la preuve précédente le centre du cercle B_CA_CC est C^* qui est ainsi le milieu de $A''B''$. Ainsi le cercle $A^*B^*C^*$ est le cercle d'Euler et ABC le cercle inscrit. L'exercice montre alors que le cercle d'Euler et le cercle inscrit sont tangents, le point de tangence est appelé point de Feuerbach.

Propriétés du point de Feuerbach

On peut alors trouver les propriétés suivantes sur le point de Feuerbach : Soit ABC un triangle, D, E et G les points de tangence du cercle inscrit avec les côtés BC, CA et AB. On note M_A, M_B et M_C les milieux des côtés BC, CA et AB. Alors en posant F le point de Feuerbach, on trouve que les droites (DF), (EG) et M_BM_C sont concourantes. On trouve également la propriété suivante : le cercle passant par les points D, F et M_A passe également par X et Y intersections de (BI) et (CI) avec la droite (EG). La dernière remarque revient à dire que le point de Feuerbach est le foyer d'une conique tangente aux droites DE, EG, GD, M_AM_B, M_BM_C et M_CM_A, on a aussi vu que la directrice de cette conique est la droite passant par l'orthocentre du triangle $M_AM_BM_C$, (soit O le centre du cercle circonscrit) de ABC et l'orthocentre de DEG. Il est possible de démontrer que cette droite est en fait la droite (OI) (exercice laissé au lecteur).


A
E
X
Y
G
M_B
M_C
I
F
B
D
C
M_A