PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 14 NOVEMBRE 2018

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Communs” sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.
`contact-pofm@animath.fr`

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit $ABCD$ un trapèze isocèle avec $(AD)//(BC)$.
(a) Montrer que $ABCD$ admet un cercle circonscrit.
(b) On note O le centre du cercle circonscrit de $ABCD$ et E l'intersection des diagonales. Montrer que O est sur le cercle circonscrit de AEB.

Exercice 2. Soit ω_1 et ω_2 deux cercles de centre O_1 et O_2, on suppose qu'ils se coupent en A et B. Le cercle passant par les points O_1, O_2 et B coupe le cercle ω_1 en C. Montrer que les points C, A et O_2 sont alignés.

Exercice 3. Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Le cercle circonscrit de ABH, de centre O, recoupe la droite (BC) en D, la droite (DH) intersecte la droite (AC) en P. Montrer que le centre du cercle circonscrit de APD est sur le cercle circonscrit de ODB.

Exercices Communs

Exercice 4. Soit ABC un triangle, H le pied de la hauteur issue de A, L le pied de la bissectrice issue de B et M le milieu de $[AB]$. On suppose que dans le triangle HLM on a les deux propriétés : (AH) est une hauteur et (BL) est une bissectrice. Montrer que (CM) est une médiane.

Exercice 5. Soit ω_1 et ω_2 deux cercles qui se coupent en P et Q. On suppose que la tangente commune à ω_1 et ω_2, la plus proche de P, touche les cercles ω_1 et ω_2 en A et B respectivement. Les tangentes en P aux cercles ω_1 et ω_2 recoupe ω_2 et ω_1 en D et C respectivement. On pose H et K sur les segments $[AC]$ et $[BD]$ de tel sorte que $AH = AP$ et $BK = BP$. Montrer que les points A, B, K, Q et H sont sur le même cercle.

Exercice 6. Soit ABC un triangle, D est le milieu de l'arc BC du cercle ABC ne contenant pas A, Z est l'unique point sur la bissectrice extérieure de $\widehat{BAC}$ tel que $ZA = ZC$. Montrer que le cercle ADZ passe par le milieu du côté de $[AB]$.

Exercices Seniors

Exercice 7. Soit ABC un triangle isocèle en A, Γ est un cercle tangent à (AC) en C à l'extérieur du triangle ABC. On note ω le cercle passant par A et B et tangent intérieurement à Γ en D. E est la seconde intersection de (AD) et de Γ, montrer que (BE) est tangente à Γ.

Exercice 8. Soit ADE un triangle isocèle en A. Soit le cercle ω, tangent aux droites (AD) et (AE) en D et E. Soit B et C deux points au delà de D et E sur les droites (AE) et (AD). On suppose que $BC > BD + CE$. Finalement, soit F et G deux points sur le segment $[BC]$ de tel sorte que $BD = BF$ et $CG = CE$, les droites (DG) et (FE) se coupent en K, la tangente à ω parallèle à (BC) et entre A et (BC) touche ω en L. Montrer que le centre du cercle inscrit de ABC est sur (KL).

Exercice 9. Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. On note A_B et A_C les autres intersections du cercle BOC avec (AB) et (AC) et $(\ell_1) = (A_BA_C)$, on définit de la même manière B_C, B_A, C_A et C_B ainsi que (ℓ_2) et (ℓ_3). On note $A^*B^*C^*$ le triangle formé par les droites (ℓ_1), (ℓ_2) et (ℓ_3). Montrer que les cercles circonscrits des triangle ABC et $A^*B^*C^*$ sont tangents.