COUPE ANIMATH D'AUTOMNE

Mercredi 3 octobre 2018

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Les exercices pour le collège sont ceux de 1 à 5, et ceux pour le lycée sont ceux de 4 à 8.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques, 11-13 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris.
contact-pofm@animath.fr

Énoncés des exercices

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.

Énoncés collège

Exercice 1. On répartit 2018 pièces dans b boîtes, et on répartit ces b boîtes dans m maisons, de telle sorte que le nombre de pièces dans chaque maison est strictement inférieur à b. Est-il possible que chaque boîte contienne au moins m pièces ?

Exercice 2. Soit ABC un triangle, O un point à l'intérieur de ce triangle. La droite parallèle à (BC) passant par O coupe $[CA]$ en D, la parallèle à (CA) passant par O coupe $[AB]$ en E, la parallèle à (AB) passant par O coupe $[BC]$ en F. Que vaut la somme de rapports suivante :

$$\frac{BF}{BC}+\frac{AE}{AB}+\frac{CD}{AC}?$$

Exercice 3. On considère un nombre N qui s'écrit sous la forme $30x070y03$, avec x, y des chiffres entre 0 et 9. Pour quelles valeurs de (x, y) l'entier N est-il divisible par 37 ?

Énoncés communs

Exercice 4. Des lapins gris, blancs et bruns sont assis en cercle. Alice demande à tous les lapins blancs qui ont au moins un voisin brun de remuer leurs moustaches : 20 lapins remuent leurs moustaches. Elle demande ensuite à tous les lapins gris qui ont au moins un voisin brun de remuer leurs moustaches : 25 lapins remuent leurs moustaches. Montrer que l'un des lapins ayant remué ses moustaches a en fait deux voisins bruns.

Exercice 5. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, avec $\widehat{ABC} = 90°$, $\widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 80°$. Soient M et N des points de $[AD]$ et $[BC]$ tels que $\widehat{CDN} = \widehat{ABM} = 20°$. Supposons enfin $MD = AB$. Que vaut $\widehat{MNB}$?

Énoncés lycée

Exercice 6. Soit n un entier strictement positif. Soit p un nombre premier tel que :

$$p^3 \text{ divise } (1^3+1)(2^3+1)\cdots((n-1)^3+1)(n^3+1).$$

Montrer que $p \leqslant n+1$.

Exercice 7. Sur un quadrillage 2018×2018 se baladent une mouche et k araignées. À chaque étape, la mouche se déplace sur une case adjacente (c'est-à-dire qui touche par un côté sa case de départ) ou décide de rester sur place, puis de même, chaque araignée se déplace sur une case adjacente ou décide de rester sur place.

(a) Pour quelles valeurs de k les araignées sont-elles sûres d'attraper la mouche, quels que soient les points de départs des $k+1$ bêtes ?

(b) Même question si on remplace la grille 2018×2018 par un pavé $2018 \times 2018 \times 2018$, et les cases par des cubes, deux cubes étant adjacents lorsqu'ils ont une face en commun.

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{R}$. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$af\left(\frac{x}{y}\right)+af\left(\frac{x}{z}\right)-f(x)f\left(\frac{y+z}{2}\right) \geqslant a^2 ?$$