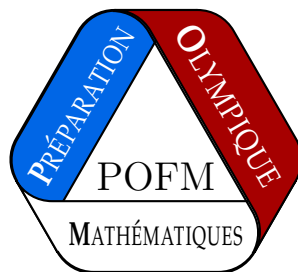


# PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 28 MARS 2018

DURÉE : 4 HEURES (14H-18H) **Ne pas diffuser sur internet**

## Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- ▷ Le groupe B est constitué des élèves nés le 21 décembre 2002 au plus tôt. Le groupe A est constitué des autres élèves.
- ▷ Les exercices 1 à 4 ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- ▷ Les exercices 5 à 7 ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Préparation Olympique Française de Mathématiques  
Animath  
Institut Henri Poincaré  
11-13 rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05

## Exercices du groupe B – Énoncés et solutions

**Exercice 1.** Les entiers  $1, 2, \dots, 2018$  sont écrits au tableau. On effectue alors 2017 opérations comme suit : choisir deux nombres  $a$  et  $b$ , les effacer, et écrire  $a + b + 2ab$  à la place. À la fin, il ne reste qu'un seul entier sur le tableau.

Quelles sont les valeurs que son chiffre des unités peut prendre ?

*Solution de l'exercice 1* Puisqu'il y a 1009 nombres impairs entre 1 et 2018, on sait que la somme des entiers initialement inscrits au tableau est impaire. En outre, l'un de ces entiers est congru à 2 (mod 5). Une récurrence immédiate permet alors de montrer que, après chaque opération, la somme des entiers écrits sur le tableau reste impaire, et l'un de ces entiers est congru à 2 (mod 5). Par conséquent, le dernier entier écrit sur le tableau est congru à 1 (mod 2) et à 2 (mod 5), c'est-à-dire à 7 (mod 10).

**Exercice 2.** Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$ , tel que  $\widehat{BAC} = 100^\circ$ . Soit  $D$  le point d'intersection de  $(AC)$  et de la bissectrice de  $\widehat{ABC}$ .

Montrer que  $BC = AD + BD$ .

*Solution de l'exercice 2* D'après la loi des sinus, notons que  $BD \leq BC$  si et seulement si  $\sin(\widehat{BCD}) \leq \sin(\widehat{BDC})$ . Puisque  $\widehat{BDC} = 130^\circ$  et  $\widehat{BCD} = 40^\circ$ , on a bien  $BD \geq BC$ . Soit  $E$  le point de  $[BC]$  tel que  $BD = BE$ , et soit  $A'$  le symétrique de  $A$  par rapport à  $(AD)$ .

La loi des sinus indique alors que

$$CE = \frac{\sin(\widehat{CDE})}{\sin(\widehat{ECD})} DE = \frac{\sin(\widehat{CDE})}{\sin(\widehat{ECD})} \times \frac{\sin(\widehat{EA'D})}{\sin(\widehat{A'ED})} A'D = \frac{\sin(40^\circ) \sin(80^\circ)}{\sin(40^\circ) \sin(80^\circ)} AD = AD.$$

On en déduit que  $BC = CE + BE = AD + BD$ .

**Exercice 3.** Trouver tous les entiers naturels non nuls  $k, \ell$  tels que  $2^k + 3^\ell$  soit un carré parfait.

*Solution de l'exercice 3* Une première idée est de considérer l'équation de l'énoncé modulo  $n$ , où  $n$  est un nombre pas trop grand tel que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ne contienne pas trop de résidus quadratiques. Dans ces conditions,  $n = 3$  et  $n = 8$  semblent de bons candidats, car les carrés modulo 3 sont 0 et 1, alors que les carrés modulo 8 sont 0, 1 et 4.

Puisque  $k \geq 1$  et  $\ell \geq 1$ , on a donc  $2^k \equiv 1 \pmod{3}$  et  $3^\ell \equiv 1 \pmod{8}$ , ce qui signifie que  $k$  et  $\ell$  sont pairs. En posant  $a = k/2$ ,  $b = \ell/2$  et  $c = \sqrt{2^k + 3^\ell}$ , on remarque alors que  $(c - 2^a)(c + 2^a) = c^2 - 2^k = 3^\ell$  est une puissance de 3.

Puisque  $\text{PGCD}(3, c - 2^a, c + 2^a)$  divise  $\text{PGCD}(3, 2^{a+1}) = 1$ , l'un des facteurs  $c - 2^a$  et  $c + 2^a$  vaut nécessairement  $3^\ell$ , tandis que l'autre vaut 1. Le facteur  $c + 2^a$  est le plus grand des deux, ce qui montre que  $c - 2^a = 1$  et  $c + 2^a = 3^\ell$ , donc que  $2^{a+1} = 3^\ell - 1 = 9^b - 1 = (3^b - 1)(3^b + 1)$ .

De même, puisque  $3^b - 1$  et  $3^b + 1$  sont pairs et que  $\text{PGCD}(2, 3^b - 1, 3^b + 1)$  divise 2, l'un des facteurs  $3^b - 1$  et  $3^b + 1$  vaut nécessairement  $2^a$ , tandis que l'autre vaut 2. Par conséquent,  $3^b - 1 = 2$  et  $3^b + 1 = 2^a$ , ce qui montre que  $a = 2$  et  $b = 1$ , ou encore  $k = 4$  et  $\ell = 2$ .

Réciproquement, si  $(k, \ell) = (4, 2)$ , on a bien  $2^k + 3^\ell = 2^4 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2$ . Ceci montre que la paire  $(k, \ell) = (4, 2)$  est la seule solution du problème.

**Exercice 4.** Soit  $a, b, c, d$  des réels tels que  $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$ .

Montrer que

$$ab^3 + bc^3 + cd^3 + da^3 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2.$$

Solution de l'exercice 4 Une première idée est de considérer les sommes « symétriques » l'une de l'autre  $S_1 = ab^3 + bc^3 + cd^3 + da^3$  et  $S_2 = a^3b + b^3c + c^3d + d^3a$ . On constate alors que

$$S_1 - S_2 = (d^3 - b^3)(c - a) + (c^3 - a^3)(b - d) = (d - b)(c - a)(d^2 + bd + d^2 - c^2 - ac - a^2) \geq 0.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz indique alors que  $S_1^2 \geq S_1S_2 \geq (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2)^2$ , ce qui conclut.

Solution alternative Tout d'abord, si  $a = 0$ , il nous suffit de démontrer que  $bc^2(c - b) + cd^2(d - c) \geq 0$ , ce qui est immédiat. On suppose donc que  $0 < a$ . Afin de se libérer de la contrainte selon laquelle  $a \leq b \leq c \leq d$ , on utilise alors un changement de variables. On pose  $x = b/a - 1$ ,  $y = c/b - 1$ ,  $z = d/c - 1$  : il nous reste à montrer, dès lors que  $x, y, z \geq 0$ , que  $P(x, y, z) \geq 0$ , avec

$$P(x - 1, y - 1, z - 1) = (x^2 + x^3y^3 + x^3y^4z^3 + yz) - (x + x^3y^2 + x^3y^4z^2 + xy^2z^2).$$

Une première idée est de vérifier si les coefficients de  $P(x, y, z)$  sont tous positifs ou nuls. En considérant d'abord les puissances maximales en  $x$  puis en  $z$ , on calcule alors :

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= (x + 1)^3(y + 1)^2(y + (y + 1)(z + 1)^2z) + (x + 1)^2 - \\ &\quad (x + 1)(1 + (y + 1)^2(z + 1)^2) + (y + 1)(z + 1) \\ &= x^2A(x, y, z) + xB(y, z) + (y + 1)zC(y, z) + (y + 1)y^2, \text{ où} \\ A(x, y, z) &= (x + 3)(y + 1)^2(y + (y + 1)(z + 1)^2z) + 1, \\ B(y, z) &= (3y^3 + 5y^2 + y) + (y + 1)^2(3zy(z + 1)^2 + 3z^3 + 5z^2 + z) \text{ et} \\ C(y, z) &= (y + 1)^2z^2 + 2y(y + 1)z + y^2 + y + 1, \end{aligned}$$

ce qui conclut.

## Exercices du groupe A – Énoncés et solutions

**Exercice 5.** Soit  $n$  un entier naturel impair, et soit  $a_1, \dots, a_n$  des entiers naturels non nuls. On note  $A$  le produit des entiers  $a_i$ , et  $d$  leur plus grand diviseur commun.

Montrer que

$$\text{PGCD}(a_1^n + A, a_2^n + A, \dots, a_n^n + A) \leq 2d^n.$$

Solution de l'exercice 5 Pour tout  $i$ , on pose  $b_i = a_i/d$ , de sorte que  $\text{PGCD}(b_1, \dots, b_n) = 1$ , et on pose également  $B = b_1 \times \dots \times b_n$  et  $\Delta = \text{PGCD}(b_1^n + B, b_2^n + B, \dots, b_n^n + B)$ . Alors  $\text{PGCD}(a_1^n + A, a_2^n + A, \dots, a_n^n + A) = d^n \times \Delta$ , et il reste à démontrer que  $\Delta \leq 2$ .

On considère alors un éventuel facteur premier  $p$  de  $\Delta$ . Si  $p$  divise un des entiers  $b_i$ , alors il divise  $B$  également, donc il divise chaque entier  $b_j$ , ce qui est absurde. Par conséquent,  $p$  ne divise aucun des entiers  $b_i$ , et ne divise pas  $B$  non plus. Cela montre que  $\Delta$  est premier avec  $B$ . Or, puisque  $b_1^n \equiv b_2^n \equiv \dots \equiv b_n^n \equiv -B \pmod{\Delta}$ , alors  $B^n \equiv b_1^n \times \dots \times b_n^n \equiv (-1)^n B^n \equiv -B^n \pmod{\Delta}$ . Par conséquent,  $\Delta$  divise  $2B^n$ . On en déduit que  $\Delta$  divise 2, ce qui conclut.

**Exercice 6.** Soit  $q$  un nombre réel. Margaret a écrit 10 nombres réels, deux à deux distincts, sur une ligne. Puis elle ajoute trois lignes comme suit :

- ▷ sur la 2<sup>nd</sup>e ligne, elle écrit tous les nombres de la forme  $a - b$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels (non nécessairement distincts) de la 1<sup>ère</sup> ligne ;
- ▷ sur la 3<sup>ème</sup> ligne, elle écrit tous les nombres de la forme  $qab$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels (non nécessairement distincts) de la 2<sup>nd</sup>e ligne ;
- ▷ sur la 4<sup>ème</sup> ligne, elle écrit tous les nombres de la forme  $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ , où  $a, b, c$  et  $d$  sont des réels (non nécessairement distincts) de la 2<sup>nd</sup>e ligne.

Trouver tous les réels  $q$  tels que, quels que soient les 10 nombres écrits sur la 1<sup>ère</sup> ligne, chaque nombre de la 3<sup>ème</sup> ligne soit également sur la 4<sup>ème</sup> ligne.

Solution de l'exercice 6 On va dire qu'un réel  $q$  est *bon* s'il a la propriété demandée dans l'énoncé. Tout d'abord, il est clair que, si  $q$  est bon, alors  $-q$  l'est aussi, et réciproquement. D'autre part,  $q = 0$  est manifestement bon. On cherche donc les bons réels  $q > 0$ , s'il y en a.

Soit  $\lambda$  un grand nombre réel et soit  $\varepsilon = 1/\lambda$ . On suppose que Margaret a écrit dix nombres  $x_1, \dots, x_{10}$  tels que  $0 \leq x_1 < \dots < x_8 \leq \varepsilon$ ,  $x_9 = 1$  et  $x_{10} = \lambda$ . Alors la 2<sup>nd</sup>e ligne contient les nombres  $\pm\lambda$  et  $\pm 1$ , ainsi que des éléments de l'ensemble  $\Omega_2 = [0, 1] \cup [\lambda - \varepsilon, \lambda]$  et leurs opposés. En particulier, Margaret écrit donc les réels  $q\lambda^2$  et  $q\lambda$  sur la 3<sup>ème</sup> ligne.

On considère alors un nombre de la 4<sup>ème</sup> ligne, de la forme  $z = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ , et tel que  $z \geq 0$ . Chacun des réels  $a^2, b^2, c^2, d^2$  appartient à l'ensemble  $\{0, \lambda^2\} + \{-2\lambda, 0\} + [0, 2]$ , donc  $z$  appartient à l'ensemble  $\Omega_4 = \{0, \lambda^2, 2\lambda^2\} + \{-4\lambda, -2\lambda, 0, 2\lambda, 4\lambda\} + [-4, 4]$ .

Si  $q$  est bon, alors  $q\lambda^2$  et  $q\lambda$  appartiennent à  $\Omega_4$ , donc en faisant tendre  $\lambda$  vers  $+\infty$  on en déduit respectivement que  $q \in \{1, 2\}$  et que  $q \in \{2, 4\}$ . Cela montre que seul  $q = 2$  est susceptible d'être bon.

Réciproquement, si  $q = 2$ , tout nombre de la 3<sup>ème</sup> est de la forme  $2(a - b)(c - d)$  avec  $a, b, c, d$  des réels de la 1<sup>ère</sup> ligne. Puisque  $2(a - b)(c - d) = (a - d)^2 + (b - c)^2 - (a - c)^2 - (b - d)^2$ , ce nombre est figure également sur la 4<sup>ème</sup> ligne. Par conséquent, les bons réels sont  $-2, 0$  et  $2$ .

**Exercice 7.** Soit  $ABC$  un triangle acutangle non isocèle. Soit  $O$  le centre du cercle circonscrit à  $ABC$  et  $H$  l'orthocentre de  $ABC$ . Soit  $P$  et  $Q$  les points d'intersection respectifs de  $(AO)$  avec  $(BH)$  et  $(CH)$ .

Montrer que le centre du cercle circonscrit à  $PQH$  se situe sur une médiane du triangle  $ABC$ .

Solution de l'exercice 7 Soit  $\Omega$  le cercle circonscrit à  $ABC$ ,  $\omega$  le cercle circonscrit à  $PQH$ , et  $X$  le centre de  $\omega$ . Puisque  $B$  et  $C$  jouent des rôles symétriques, on va montrer que  $X$  se trouve sur la médiane issue de  $A$ . Soit alors  $M$  le point d'intersection des droites  $(AX)$  et  $(BC)$  : montrons que  $M$  est le milieu de  $[BC]$ , c'est-à-dire que  $\widehat{CMO} = 90^\circ$ .

Tout d'abord, une simple chasse aux angles montre que  $\widehat{QHP} = \widehat{CAB}$ ,  $\widehat{HPQ} = \widehat{ABC}$  et  $\widehat{PQH} = \widehat{PHA} = \widehat{BCA}$ . Les triangles  $ABC$  et  $HPQ$  sont donc semblables, et il existe une similitude  $s$  telle que  $s(A) = H$ ,  $s(B) = P$ ,  $s(C) = Q$  et  $s(O) = X$ .

D'autre part, puisque  $\widehat{PQH} = \widehat{PHA}$  on sait que  $(AH)$  est tangente à  $\omega$  en  $H$ . Par conséquent, si on pose  $S = s^{-1}(A)$ , alors on sait que  $S$  est le point d'intersection de  $(BC)$  et de la tangente à  $\Omega$  en  $A$ . Puisque  $s$  envoie  $BSO$  sur  $PAX$ , on en déduit que  $\widehat{MSO} = \widehat{BSO} = \widehat{XAP} = \widehat{MAO}$ , donc que les points  $M, S, O$  et  $A$  sont cocycliques. Or,  $\widehat{SAO} = 90^\circ$ . Il s'ensuit que  $\widehat{SMO} = 90^\circ$  également, ce qui conclut.