# Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le probléme.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Régles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- ▷ Le groupe B est constitué des élèves nés le 21 décembre 2002 au plus tôt. Le groupe A est constitué des autres élèves.
- ▷ Les exercices 1 à 3 ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- ▷ L'exercice 4 est à chercher par tous les élèves.
- ▷ Les exercices 5 et 6 ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Préparation Olympique Française de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

# Exercices du groupe B – Énoncés

*Exercice 1.* Trouver tous les triplets $(a, b, c)$ de réels strictement positifs tels que

$$\begin{cases} a\sqrt{b} - c = a, \\ b\sqrt{c} - a = b, \\ c\sqrt{a} - b = c. \end{cases}$$

*Exercice 2.* Trouver toutes les paires $(m, n)$ d'entiers strictement positifs telles que

$$m! + n! = m^n.$$

*Remarque.* On rappelle que $n!$ désigne l'entier $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

*Exercice 3.* Soit $ABCD$ un trapèze tel que $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles. On suppose que $AD < CD$ et que $ABCD$ est inscrit dans un cercle $\Gamma$. Soit $P$ sur $\Gamma$ tel que $(DP)$ est parallèle à $(AC)$. La tangente à $\Gamma$ en $D$ recoupe $(AB)$ en $E$, et les cordes $[BP]$ et $[CD]$ s'intersectent en $Q$. Montrer que $EQ = AC$.

# Exercice commun aux groupes A et B – Énoncé

*Exercice 4.* Soit $n \geqslant 1$. Un grand carré de côté $n$ est découpé en $n^2$ petits carrés de côté $1$. On veut colorier en rouge ou bleu chacun des $(n+1)^2$ sommets des petits carrés de telle manière que chacun des petits carrés a exactement $2$ sommets rouges. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?

# Exercices du groupe A – Énoncés

*Exercice 5.* Déterminer tous les entiers $n \geqslant 2$ vérifiant la propriété suivante : pour tous entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dont la somme n'est pas divisible par $n$, il existe un indice $i$ tel qu'aucun des nombres

$$a_i, a_i + a_{i+1}, \ldots, a_i + \cdots + a_{i+n-1}$$

n'est divisible par $n$ (pour $i > n$, on pose $a_i = a_{i-n}$).

*Exercice 6.* Soit $ABC$ un triangle avec $AB \neq AC$, et soit $\omega$ le cercle $A$-exinscrit à $ABC$. On note $D$, $E$ et $F$ les points de tangence de $\omega$ avec $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Le cercle circonscrit à $AEF$ recoupe $(BC)$ en $P$ et $Q$. On note $M$ le milieu de $[AD]$. Montrer que le cercle circonscrit à $MPQ$ est tangent à $\omega$.

*Remarque.* On rappelle que le cercle $A$-exinscrit à $ABC$ est l'unique cercle tangent au segment $[BC]$, à la demi-droite $[AB)$ au-delà de $B$ et à la demi-droite $[AC)$ au-delà de $C$.