COUPE ANIMATH DE PRINTEMPS

Mercredi 6 juin 2018

Corrigé

Exercice 1. 12 chaises sont numérotées de 1 à 12. Une sauterelle peut sauter de la chaise k à la chaise n si $k - n$ est l'un des quatre nombres $-8, -5, 5, 8$. On sait qu'elle a visité chaque chaise exactement une fois. Quelles sont les positions initiales possibles ?

Solution de l'exercice 1 Dans le diagramme ci-dessous, on symbolise chaque chaise par son numéro, et on met un trait entre deux chaises si la sauterelle peut sauter de l'une à l'autre :

$$8 - 3 - 11 - 6 - 1 - 9 - 4 - 12 - 7 - 2 - 10 - 5$$

Il est clair que les seules positions initiales possibles sont 5 et 8.

Exercice 2. a) On pose $A = (1 + 1/2)/2$ et $B = (1 + 1/2 + 1/3)/3$. Montrer que $A > B$.
b) On pose $A = (1+1/2+1/3+1/4+...+1/2017)/2017$ et $B = (1+1/2+1/3+1/4+...+1/2018)/2018$. Montrer que $A > B$.

Solution de l'exercice 2 a) On peut le montrer par un calcul direct, ou bien comme dans b) ci-dessous.
b) On a

$$\begin{aligned}
A - B &= (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + ... + 1/2017)/2017 - (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + ... + 1/2017)/2018 - 1/2018^2 \\
&= (1 + 1/2 + \ldots + 1/2017)(1/2017 - 1/2018) - 1/2018^2 \\
&> (1/2017 - 1/2018) - 1/2018^2 \\
&= 1/(2017 \times 2018^2) \\
&> 0
\end{aligned}$$

Donc $A > B$.

Exercice 3. Soit n un entier naturel. On note $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_k = n$ ses diviseurs. On remarque que $n = d_2^2 + d_3^3$. Déterminer toutes les valeurs possibles de n.

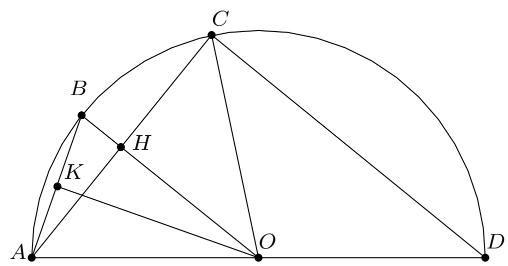
Solution de l'exercice 3 Si $d_2 \neq 2$, alors n est impair, donc d_3 est impair. Or, $d_2^2 + d_3^2$ est pair, ce qui contredit le fait que n est impair. Donc $d_2 = 2$ et n est pair.
Comme $d_3^3 = n - d_2^2$ est pair, on peut écrire $d_3 = 2m$. Alors m est un diviseur de n tel que $1 < m < d_3$, donc $m = 2$, ce qui implique $d_3 = 4$ et $n = 2^2 + 4^3 = 68$.

Exercice 4. Trouver tous les nombres réels a tels que $a + \frac{2}{3}$ et $\frac{1}{a} - \frac{3}{4}$ soient des entiers.

Solution de l'exercice 4 Notons m et n ces deux entiers. Comme $a = m - \frac{2}{3}$ et $\frac{1}{a} = n + \frac{3}{4}$, on a $3a = 3m - 2$ et $\frac{4}{a} = 4n + 3$ donc, en multipliant ces égalités, on obtient $12 = (3m - 2)(4n + 3)$. Comme $4n + 3$ est impair et qu'il divise 12, il est égal à l'un des nombres suivants : $-3, -1, 1, 3$. Le cas $4n + 3 = -3$ est impossible. Si $4n + 3 = -1$ alors $n = -1$ et $3m - 2 = -12$, ce qui est impossible. Le cas $4n + 3 = 1$ est impossible. Reste le cas $4n + 3 = 3$ qui donne $n = 0$ et $3m - 2 = 4$ donc $m = 2$, puis $a = \frac{4}{3}$

Exercice 5. Sur un demi-cercle de diamètre $[AD]$, on place deux points B et C tels que $AB = BC = 1$. On suppose que $AD = 3$. Calculer la longueur CD.

Solution de l'exercice 5



Soit H l'intersection de $[AC]$ avec $[OB]$, où O est le centre du cercle. On a $CD = \sqrt{AD^2 - AC^2}$ avec $AC = 2AH$.
Soit K le milieu de $[AB]$. Le triangle AOB est isocèle en O. On note $\alpha = \widehat{HAB} = \widehat{BOK}$. On a $\cos\alpha = AH/AB = OK/OB$ donc $AH = \frac{2}{3}OK$. De plus, $OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{(3/2)^2 - (1/2)^2} = \sqrt{2}$, donc $AC = \frac{4}{3}\sqrt{2}$, et finalement $CD = \sqrt{9 - 32/9} = 7/3$.

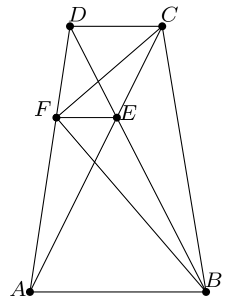
Exercice 6. Déterminer le plus petit entier N tel que l'on puisse trouver 125 entiers distincts $a_1, a_2, \ldots, a_{125}$ sur une ligne de sorte que :
(1) chacun de ces entiers est strictement positif, et inférieur ou égal à N ;
(2) chacun des 123 entiers $a_2, \ldots, a_{124}$ est strictement plus grand que la moyenne arithmétique de l'entier écrit à sa gauche et de l'entier écrit à sa droite.

N.B. La moyenne arithmétique de a et b est le nombre $\dfrac{a+b}{2}$.

Solution de l'exercice 6 Soit $d_i = a_{i+1} - a_i$. Soit m tel que a_m soit le maximum. On a alors $d_1 > d_2 > \cdots > d_{m-1} > 0 > d_m > \cdots > d_{124}$.
Supposons que $d_{m-1} = 1$ et $d_m = -1$. Alors $a_{m-1} = a_{m+1}$, ce qui contredit le fait que les 125 entiers sont tous distincts. On a donc, soit $d_{m-1} \geqslant 2$, soit $d_m \leqslant -2$. Quitte à renverser l'ordre des 125 nombres, on peut supposer que $d_{m-1} \geqslant 2$. On a alors $a_m = a_1 + (d_1 + \cdots + d_{m-1}) \geqslant 1 + \cdots + m$.
De même, $a_m = a_{125} - (d_m + \cdots + d_{124}) \geqslant 1 + (1 + 2 + \cdots + (125 - m))$.
L'un des nombres m ou $125 - m$ est $\geqslant 63$, donc $a_m \geqslant 1 + \cdots + 63 = 2016$.
Ce nombre peut être atteint en prenant $a_1 = 1$ et $d_i = 64 - i$ pour $i \leqslant 62$ et $d_i = 62 - i$ sinon. Vérifions que cette suite de nombres convient :
On a $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{63} = 2016$ et $a_{63} > a_{64} > \cdots > a_{125} = 63$. De plus, s'il existe $i < j$ tels que $a_i = a_j$ alors $i < 63$ et $j > 63$ donc $0 = d_i + \cdots + d_{62} + d_{63} + \cdots + d_{j-1} = 2 + \cdots + (64 - i) - (1 + \cdots + (j - 63))$. Nécessairement, $64 - i > j - 63$, et donc en simplifiant il vient $(j - 63 + 1) + \cdots + (64 - i) = 1$, ce qui est impossible. Donc les 125 entiers sont bien distincts.

Exercice 7. Soit $ABCD$ un trapèze avec (AB) et (CD) parallèles, tel que $AB + CD = AD$. Les diagonales (AC) et (BD) se coupent en un point E. La droite passant par E et parallèle à (AB) coupe (AD) en un point F. Montrer que $\widehat{BFC} = 90°$.

Solution de l'exercice 7



Comme $(FE) \parallel (CD)$, $\frac{AF}{FD} = \frac{AE}{EC}$. Comme $(AB) \parallel (CD)$, les triangles AEB et DEC sont semblables, donc $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{CD}$. On a donc $\frac{AF}{FD} = \frac{AB}{CD}$.
En ajoutant 1 aux deux membres, il vient $\frac{AF+FD}{FD} = \frac{AB+CD}{CD}$, donc $\frac{AD}{FD} = \frac{AD}{CD}$. On en déduit $FD = CD$, puis $AF = AB$. Autrement dit les triangles DFC et ABF sont isocèles en D et en A respectivement.
Comme la somme des angles d'un triangle vaut $180°$, on a $180° = \widehat{BAF} + 2\widehat{AFB}$ et $180° = \widehat{FDC} + 2\widehat{CFD}$. Il vient $\widehat{BFC} = 180° - \widehat{AFB} - \widehat{CFD} = 180° - (90° - \frac{1}{2}\widehat{BAF}) - (90° - \frac{1}{2}\widehat{FDC}) = \frac{1}{2}(\widehat{BAF} + \widehat{FDC}) = \frac{1}{2}(\widehat{BAD} + \widehat{ADC}) = 90°$.

Exercice 8. Daphné et Loïs disposent de trois barres de longueur 1 mètre : une blanche, une bleue et une rouge. Daphné casse chacune des deux premières en trois morceaux, et Loïs casse la troisième en trois morceaux. Est-ce que Daphné peut faire en sorte qu'à la fin, quoi que fasse Loïs, elle soit sûre de pouvoir composer trois triangles (non aplatis) avec les neufs morceaux obtenus, de sorte que chaque triangle ait un côté de chaque couleur ?

Solution de l'exercice 8 Le cassage $(1/2, 1/4, 1/4)$, deux fois, permet à Daphné de s'en sortir : si $x \geq y \geq z$ sont les morceaux de Loïs, $(1/2, 1/2, x)$, $(1/4, 1/4, y)$ et $(1/4, 1/4, z)$ conviennent. En effet, si a et b sont des réels strictement positifs, alors (a, a, b) sont les côtés d'un triangle si et seulement si $b < 2a$.
Ici, on a bien $x < 1$. On a aussi $y < 1/2$ car si $y \geqslant 1/2$ alors $x \geqslant 1/2$, donc $z = 1 - x - y \leqslant 0$, ce qui est impossible.