

COUPE ANIMATH DE PRINTEMPS

Mercredi 6 juin 2018

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- ▷ Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Les exercices pour le collège sont ceux de 1 à 5, et ceux pour le lycée sont ceux de 4 à 8.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés des exercices

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Énoncés collègue

Exercice 1. 12 chaises sont numérotées de 1 à 12. Une sauterelle peut sauter de la chaise k à la chaise n si $k - n$ est l'un des quatre nombres $-8, -5, 5, 8$. On sait qu'elle a visité chaque chaise exactement une fois. Quelles sont les positions initiales possibles ?

Exercice 2. a) On pose $A = (1 + 1/2)/2$ et $B = (1 + 1/2 + 1/3)/3$. Montrer que $A > B$.
b) On pose $A = (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/2017)/2017$ et $B = (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/2018)/2018$. Montrer que $A > B$.

Exercice 3. Soit n un entier naturel. On note $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_k = n$ ses diviseurs. On remarque que $n = d_2^2 + d_3^3$. Déterminer toutes les valeurs possibles de n .

Énoncés communs

Exercice 4. Trouver tous les nombres réels a tels que $a + \frac{2}{3}$ et $\frac{1}{a} - \frac{3}{4}$ soient des entiers.

Exercice 5. Sur un demi-cercle de diamètre $[AD]$, on place deux points B et C tels que $AB = BC = 1$. On suppose que $AD = 3$. Calculer la longueur CD .

Énoncés lycée

Exercice 6. Déterminer le plus petit entier N tel que l'on puisse trouver 125 entiers distincts a_1, a_2, \dots, a_{125} sur une ligne de sorte que :

- (1) chacun de ces entiers est strictement positif, et inférieur ou égal à N ;
- (2) chacun des 123 entiers a_2, \dots, a_{124} est strictement plus grand que la moyenne arithmétique de l'entier écrit à sa gauche et de l'entier écrit à sa droite.

N.B. La moyenne arithmétique de a et b est le nombre $\frac{a+b}{2}$.

Exercice 7. Soit $ABCD$ un trapèze avec (AB) et (CD) parallèles, tel que $AB + CD = AD$. Les diagonales (AC) et (BD) se coupent en un point E . La droite passant par E et parallèle à (AB) coupe (AD) en un point F . Montrer que $\widehat{BFC} = 90^\circ$.

Exercice 8. Daphné et Loïs disposent de trois barres de longueur 1 mètre : une blanche, une bleue et une rouge. Daphné casse chacune des deux premières en trois morceaux, et Loïs casse la troisième en trois morceaux. Est-ce que Daphné peut faire en sorte qu'à la fin, quoi que fasse Loïs, elle soit sûre de pouvoir composer trois triangles (non aplatis) avec les neuf morceaux obtenus, de sorte que chaque triangle ait un côté de chaque couleur ?