PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 23 FEVRIER 2018
DURÉE : 4 HEURES (14H-18H)

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**

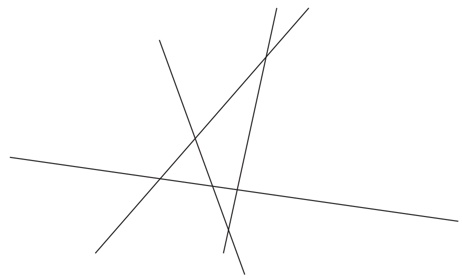
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le probléme.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Régles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Préparation Olympique Française de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Exercice 1. Soit $n \geq 3$ un entier et considérons n droites en *position générale* (c'est-à-dire que trois droites ne sont jamais concourantes et deux droites jamais parallèles). Combien de triangles sont formés par ces droites?
N.B. Par exemple, dans la figure ci-dessous, il y a 4 triangles.



Exercice 2. Soit ABC un triangle. On note L, M, N les milieux de $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Notons (d) la tangente en A au cercle circonscrit à ABC. La droite (LM) coupe (d) en P, et la droite (LN) coupe (d) en Q. Montrer que (CP) et (BQ) sont parallèles.

Exercice 3. Soient p et n des entiers strictement positifs, avec p premier, et $n \geqslant p$. On suppose que $1 + np$ est un carré parfait. Montrer que $n+1$ est une somme de p carrés parfaits non nuls (non nécessairement distincts).

Exercice 4. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Pour tout sous-ensemble non vide A de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note $P(A)$ le produit de tous les éléments de A.
Par exemple, pour $A = \{2, 4, 7\}$, on a $P(A) = 56$.
Déterminer la somme des $\dfrac{1}{P(A)}$ lorsque A parcourt tous les sous-ensembles non vides de $\{1, 2, \ldots, n\}$.