PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 23 FEVRIER 2018
DURÉE : 4 HEURES (14H-18H)

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**

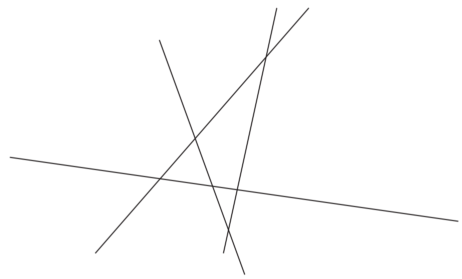
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le probléme.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Régles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Préparation Olympique Française de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

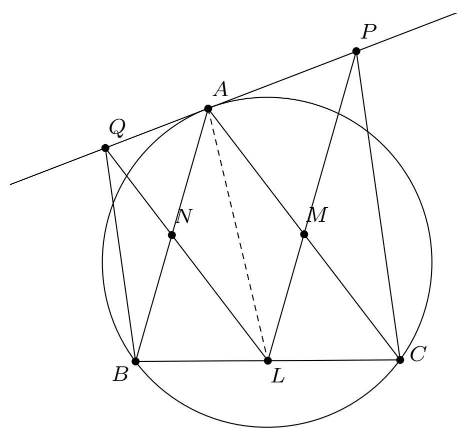
Exercice 1. Soit $n \geq 3$ un entier et considérons n droites en *position générale* (c'est-à-dire que trois droites ne sont jamais concourantes et deux droites jamais parallèles). Combien de triangles sont formés par ces droites?
N.B. Par exemple, dans la figure ci-dessous, il y a 4 triangles.



Solution de l'exercice 1 Si on numérote de 1 à n les n droites, on remarque que chaque triangle est codé par la donnée d'un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$ à trois éléments. Il y a donc $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ triangles.

Exercice 2. Soit ABC un triangle. On note L, M, N les milieux de $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Notons (d) la tangente en A au cercle circonscrit à ABC. La droite (LM) coupe (d) en P, et la droite (LN) coupe (d) en Q. Montrer que (CP) et (BQ) sont parallèles.

Solution de l'exercice 2



On a $(AQ, AB) = (CA, CB) = (LQ, LB)$ donc A, Q, B, L sont cocycliques, et de même A, P, C, M sont cocycliques. On a donc $(CP, BC) = (CP, CL) = (AP, AL) = (AQ, AL) = (BQ, BL) = (BQ, BC)$, donc (CP) et (BQ) sont parallèles.

Exercice 3. Soient p et n des entiers strictement positifs, avec p premier, et $n \geqslant p$. On suppose que $1 + np$ est un carré parfait. Montrer que $n + 1$ est une somme de p carrés parfaits non nuls (non nécessairement distincts).

Solution de l'exercice 3 Soit k tel que $1 + np = k^2$, alors $np = (k-1)(k+1)$.
Premier cas : p divise $k - 1$. Alors on peut écrire $k - 1 = p\ell$, donc $k = p\ell + 1$. En reportant dans l'égalité, on obtient que $n + 1 = p\ell^2 + 2\ell + 1 = (p-1)\ell^2 + (\ell+1)^2$.
Deuxième cas : p divise $k + 1$. On obtient avec la même méthode $n + 1 = p\ell^2 - 2\ell + 1 = (p-1)\ell^2 + (\ell-1)^2$.

Exercice 4. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Pour tout sous-ensemble non vide A de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note $P(A)$ le produit de tous les éléments de A. Par exemple, pour $A = \{2, 4, 7\}$, on a $P(A) = 56$. Déterminer la somme des $\dfrac{1}{P(A)}$ lorsque A parcourt tous les sous-ensembles non vides de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Solution de l'exercice 4 On a l'identité $(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) = 1 + \sum x_i + \sum_{i<j} x_i x_j + \cdots$. En prenant $x_i = \frac{1}{a_i}$, on obtient

$$\sum_{k \geqslant 0} \sum_{a_1 < \cdots < a_k} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} = \left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \cdots \times \frac{n+1}{n} = n + 1.$$

On a donc $1 + \displaystyle\sum_A \frac{1}{P(A)} = n + 1$ donc $\displaystyle\sum_A \frac{1}{P(A)} = n$.