PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 5 : POT-POURRI

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 15 MARS 2018

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2003 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés “Groupe B” ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés “Communs” sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés “Groupe A” ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques, 11-13 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris.
olymp@animath.fr

Exercices du groupe B

Exercice 1. Trouver tous les entiers $x, y \geqslant 1$ tels que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2017}.$$

Exercice 2. Adalbert et Babette jouent aux dominos sur une grille rectangulaire de 2 cases de hauteur et 2018 cases de largeur. Adalbert commence en posant un domino de taille 1×2 en position horizontale, de façon à ce qu'il recouvre exactement deux cases de la grille. Puis Babette joue de même un domino 1×2 en position verticale, et ainsi de suite. Le premier qui ne peut plus jouer sans chevaucher un domino déjà posé a perdu. Montrer qu'Adalbert a une stratégie gagnante.

Exercice 3. Soit ABC un triangle équilatéral et P un point de son cercle circonscrit, distinct de A, B et C. Les droites passant par P et parallèles à (BC), (CA) et (AB) intersectent respectivement (AC) en M, (AB) en N et (BC) en Q. Prouver que M, N et Q sont alignés.

Exercices Communs

Exercice 4. Est-il possible de ranger 601 disques de rayon 1 dans une boîte rectangulaire de taille 4×600 sans que deux disques ne se chevauchent (ils peuvent toutefois se toucher) ?

Exercice 5. Soit $\mathcal{C}$ un cercle, P un point extérieur à celui-ci, A et B les points de contact des deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par P. Soit K un point quelconque sur (AB), distinct de A et de B. On appelle T la seconde intersection de $\mathcal{C}$ et du cercle circonscrit au triangle PBK. En outre, on appelle P' le symétrique de P par rapport à A.
Montrer que $\widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$.

Exercice 6. Trouver tous les entiers strictement positifs p, q tels que

$$p2^q = q2^p.$$

Exercices du groupe A

Exercice 7. On définit une suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ ainsi : on choisit $a_0, a_1 \in \mathbb{N}^*$, et pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$a_{n+2} = \left\lfloor \frac{2a_n}{a_{n+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a_{n+1}}{a_n} \right\rfloor,$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier qui ne dépasse pas x. Prouver qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_m = 4$ et $a_{m+1} \in \{3, 4\}$.

Exercice 8. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe un réel A vérifiant $A > f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et telles que pour tous réels x, y, on ait :

$$f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy).$$

Exercice 9. Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en M et N. Soit A et B les points de contact de ces deux cercles avec leur tangente extérieure commune la plus proche de M. Soient C et D les symétriques respectifs de A et B par rapport à M, et E et F les points d'intersection (autres que M) du cercle circonscrit à MCD avec Γ_1 et Γ_2 respectivement. Montrer que les cercles circonscrits à MEF et NEF ont le même rayon.