PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

Envoi de combinatoire

À renvoyer au plus tard le 14 février 2018

Instructions

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- le groupe B est constitué des élèves nés en 2003 ou après ;
- le groupe A est constitué des élèves nés en 2002 ou avant ;
- les exercices classés « groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B ;
- les exercices classés « communs » sont à chercher par tous les élèves ;
- les exercices classés « groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A ;
- les exercices doivent être cherchés de manière individuelle ;
- utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents ;
- respecter la numérotation des exercices ;
- préciser sur chaque copie votre nom en lettres capitales et votre prénom en minuscules.

Préparation Olympique Française de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Exercices du groupe B

Exercice 1. Dans les carrés suivants, on s'autorise à remplacer tous les 0 par des 1 et réciproquement sur toute une ligne ou toute une colonne ou toute une diagonale. Dans chaque cas, peut-on n'obtenir que des 0 ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 1 Dans tous les cas, on va dire que l'on *agit* sur une ligne, une colonne ou une diagonale si on y remplace les 0 par des 1 et réciproquement.
Dans le 1^{er} cas, on remarque que l'on a un nombre impair de 1 : il y en a 9 dans la grille. Or, lors d'une action, la parité du nombre de 1 ne change pas, puisque le nombre de 1 augmente de $+4$, $+2$, 0, -2 ou -4. Par conséquent, on aura toujours un nombre impair de 1. Il est donc impossible de n'obtenir que des 0.
Dans le 2^{nd} cas, on a initialement un nombre pair de 1. Cela dit, parmi les 4 cases du carré 2×2 situé en haut à gauche, on a trois 1. Or, nulle action ne change la parité du nombre de 1 dans ce carré, car chaque action change la valeur de 0 ou 2 cases du carré. On aura donc toujours un nombre impair de 1 dans ce carré, et il est impossible de n'obtenir que des 0.
Dans le $3^{\text{ème}}$ cas, on peut obtenir une grille formée uniquement de 0, par exemple en agissant successivement sur la $1^{\text{ère}}$ colonne, puis la $3^{\text{ème}}$ ligne et enfin la diagonale « nord-ouest / sud-est » :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarques : L'argument utilisé pour traiter le 2^{nd} cas fonctionne également dans le 1^{er} cas. Par ailleurs, l'ordre dans lequel on agit sur des lignes, colonnes ou diagonales n'a aucune importance.
Enfin, on peut en fait montrer, en faisant appel à de l'*algèbre linéaire*, que tester si un tableau peut être transformé en le tableau ne contenant que des 0 peut se faire en utilisant des *invariants*. Ici, il suffit de vérifier que l'on a un nombre pair de 1 dans chacun des ensembles de cases suivants :

- ▷ l'union des $1^{\text{ère}}$ et 2^{nde} lignes ; des $1^{\text{ère}}$ et $3^{\text{ème}}$ lignes ; des $1^{\text{ère}}$ et $4^{\text{ème}}$ lignes ;
- ▷ l'union des $1^{\text{ère}}$ et $2^{\text{ème}}$ colonnes ; des $1^{\text{ère}}$ et $3^{\text{ème}}$ colonnes ;
- ▷ pour chaque $k \in \{2, 3, 4\}$, les cases situées à la fois sur la $1^{\text{ère}}$ ou la $k^{\text{ème}}$ ligne et sur la $1^{\text{ère}}$ ou la $k^{\text{ème}}$ colonne.

Toute autre vérification, par exemple de l'union des $1^{\text{ère}}$ et $4^{\text{ème}}$ colonnes, est rendue inutile par les vérifications déjà effectuées.

Exercice 2. On place les entiers de 1 à 9 dans chacune des cases d'une grille 3×3. Pour $i = 1$, 2 et 3, on note ℓ_i le plus grand entier présent dans la $i^{\text{ème}}$ ligne et c_i le plus petit entier présent dans la $i^{\text{ème}}$ colonne.
Combien existe-t-il de grilles telles que $\min\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\} = \max\{c_1, c_2, c_3\} = 4$?

Solution de l'exercice 2 Soit G une grille quelconque, et soit i et j les entiers tels que l'entier 4 se trouve sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. On dit que la grille G est *bonne* si $\ell_i = c_j = 4$.
Tout d'abord, si $\min\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\} = \max\{c_1, c_2, c_3\} = 4$, alors $4 = \ell_i = c_j$, donc G est une bonne grille. Réciproquement, si G est une bonne grille, alors, pour tout entier j', la colonne j' comporte un des entiers de la ligne i. Cet entier vaut donc au plus 4, ce qui montre que $c_{j'} \leqslant 4$. De même, pour tout entier i', on a $\ell_{i'} \geqslant 4$. On a donc bien $\min\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\} = \max\{c_1, c_2, c_3\} = 4$.
Par conséquent, on cherche en fait à compter combien il existe de bonnes grilles. Pour construire une bonne grille, il suffit de choisir successivement :

- ▷ les entiers i et j, c'est-à-dire l'emplacement du 4 : on a 9 choix possibles ;
- ▷ chacun des deux autres entiers qui se trouvent sur la ligne i. Comme $l_i = 4$, ces deux entiers doivent être plus petits que 4, donc être choisis dans $\{1, 2, 3\}$. On a 3 manières de choisir le premier (disons le plus à gauche), puis 2 manières de choisir le second ;
- ▷ chacun des deux autres entiers qui se trouvent sur la colonne j. Comme $c_j = 4$, les deux autres entiers doivent être plus grands que 4, donc être choisis dans $\{5, 6, 7, 8, 9\}$. On a 5 manières de choisir le premier, puis 4 manières de choisir le second ;
- ▷ chacun des quatre autres entiers qui restent à placer : on a $4!$ manières de procéder.

Il existe donc $9 \times 3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 4! = 25920$ grilles telles que $\min\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\} = \max\{c_1, c_2, c_3\} = 4$.

Remarque : De manière générale, quelle que soit la taille de la grille, le plus petit des entiers ℓ_i est nécessairement égal au plus grand des entiers c_i. C'est ce que l'on appelle *Théorème du minimax*. Plus d'informations à ce propos sont disponibles sur :

`fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_du_minimax_de_von_Neumann`

Exercice 3. Trouver tous les entiers $n \geqslant 3$ tels que, si $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels strictement positifs tels que $\max(a_1, \ldots, a_n) \leqslant n \cdot \min(a_1, \ldots, a_n)$, alors il existe nécessairement trois de ces réels qui sont les longueurs des côtés d'un triangle acutangle, c'est-à-dire d'un triangle dont les trois angles sont strictement aigus.

Solution de l'exercice 3 Sans perte de généralité, on suppose que $1 = a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. On note alors que trois réels a_i, a_j et a_k, avec $i < j < k$, sont les longueurs des côtés d'un triangle acutangle si et seulement si $a_i^2 + a_j^2 > a_k^2$ (on peut le voir par exemple avec le théorème d'Al-Kashi). Si tel est le cas, alors a_{k-2}, a_{k-1} et a_k sont eux aussi les côtés d'un triangle acutangle. Par conséquent, appelons *obtusangle* une suite de réels $1 = a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ telle que $a_k^2 \geqslant a_{k-2}^2 + a_{k-1}^2$ pour tout $k \in \{3, \ldots, n\}$: le problème revient à chercher les entiers $n \geqslant 3$ tels que, si $a_1, \ldots, a_n$ est une suite obtusangle, alors $a_n > n$.
Or, soit F_n le $n^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci, défini par $F_1 = F_2 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Dans une suite obtusangle $a_1, \ldots, a_n$, on a nécessairement $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2$, c'est-à-dire $F_1 \leqslant a_1^2$ et $F_2 \leqslant a_2^2$. Une récurrence immédiate sur n montre alors que $a_n^2 \geqslant F_n$. Réciproquement, on remarque bien que la suite $a_1, \ldots, a_n$ définie par $a_k = \sqrt{F_k}$ est obtusangle. Par conséquent, les entiers $n \geqslant 3$ recherchés sont ceux tels que $\sqrt{F_n} > n$, c'est-à-dire $F_n > n^2$.
Les premiers termes de la suite de Fibonacci sont $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, $F_{11} = 89$, $F_{12} = 144$, $F_{13} = 233$ et $F_{14} = 377$. On constate donc que $F_n \leqslant n^2$ pour tout $n \leqslant 12$, et que $F_n > n^2$ pour $n = 13$ et $n = 14$. En outre, pour tout entier $n \geqslant 13$ tel que $F_n > n^2$ et $F_{n+1} > (n+1)^2$, on observe que

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} > n^2 + (n+1)^2 \geqslant 5n + (n+1)^2 \geqslant 2n + 3 + (n+1)^2 = (n+2)^2.$$

Une récurrence immédiate montre donc que les entiers recherchés sont les entiers $n \geqslant 13$.

Exercices communs

Exercice 4. On dit que deux permutations $a_1, \ldots, a_{4035}$ et $b_1, \ldots, b_{4035}$ des entiers $1, \ldots, 4035$ s'intersectent s'il existe un entier $k \leqslant 4035$ tel que $a_k = b_k$. On dit qu'un ensemble E de permutations est inévitable si chaque permutation des entiers $1, \ldots, 4035$ intersecte une permutation appartenant à E.

a) Montrer qu'il existe un ensemble inévitable contenant 2018 permutations.

b) Existe-t-il un ensemble inévitable contenant 2017 permutations ?

Solution de l'exercice 4

a) Pour tout $i \in \{1, \ldots, 2018\}$, on note $\sigma^{(i)}$ la permutation

$$i+1, i+2, \ldots, 2018, 1, 2, \ldots, i, 2019, 2020, \ldots, 4035.$$

En d'autres termes, $\sigma^{(i)}$ est la permutation telle que :

▷ pour tout $j \leqslant 2018$, $\sigma_j^{(i)}$ est le seul élément de $\{1, \ldots, 2018\}$ tel que $\sigma_j^{(i)} \equiv i+j \pmod{2018}$;

▷ pour tout $j \geqslant 2019$, $\sigma_j^{(i)} = j$.

Alors l'ensemble $E = \{\sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(2018)}\}$ est inévitable. En effet, soit $b_1, \ldots, b_{4035}$ une permutation. Parmi les entiers $b_1, \ldots, b_{2018}$, il y en a au moins un qui est inférieur ou égal à 2018, puisque l'ensemble $\{2019, \ldots, 4035\}$ ne compte que 2017 éléments. Soit i un entier tel que $i \leqslant 2018$ et $b_i \leqslant 2018$, et soit j l'unique élément de $\{1, \ldots, 2018\}$ tel que $j \equiv b_i - i \pmod{2018}$. Alors $b_i \equiv i + j \equiv \sigma_i^{(j)} \pmod{2018}$, et puisque $1 \leqslant b_i, \sigma_i^{(j)} \leqslant 2018$, cela montre que $b_i = \sigma_i^{(j)}$, donc que b intersecte la permutation $\sigma^{(j)}$.

b) Soit E un ensemble contenant 2017 permutations. Pour toute permutation $b_1, \ldots, b_{4035}$, on appelle *collision* de b un entier i tel qu'il existe une permutation a dans E pour laquelle $a_i = b_i$, et on appelle *poids* de b le nombre de collisions de b. On considère alors une permutation b de poids minimum : on va montrer que ce poids est nul.

En effet, supposons ce poids non nul. Soit alors i une collision de b. L'ensemble $\overline{X} = \{x \in \{1, \ldots, 4035\} \mid \exists a \in E \text{ tel que } a_x = b_i\}$ est de cardinal au plus $|E| = 2017$, donc l'ensemble $X = \{x \in \{1, \ldots, 4035\} \mid \forall a \in E, a_x \neq b_i\}$ est de cardinal au moins $4035 - 2017 = 2018$.

On considère alors l'ensemble $Y = \{b_x \mid x \in X\}$, de cardinal au moins 2018 lui aussi. Toujours d'après le principe des tiroirs, il existe un entier $y \in Y$ tel que $a_i \neq y$ pour toute permutation a dans E. Soit $x \in X$ tel que $y = b_x$.

On considère alors la permutation b' obtenue à partir de b en échangeant les valeurs de b_i et de b_x. Par construction, ni i ni x ne sont des collisions de b'. Les autres collisions de b' sont toutes des collisions de b. Par conséquent, b' est de poids strictement inférieur au poids de b. Ceci contredit la définition de b, ce qui invalide notre supposition et montre donc que nul ensemble contenant 2017 permutations n'est inévitable.

Exercice 5. On considère un tableau de taille 2018×2018 dont chaque case contient un entier naturel non nul. Noémie modifie ces entiers à sa guise, en appliquant les opérations suivantes :

- ▷ choisir une ligne puis multiplier par 2 tous les entiers contenus dans cette ligne ;
- ▷ choisir une colonne puis soustraire 1 à tous les entiers contenus dans cette colonne.

Montrer que, en appliquant ces opérations, Noémie peut se débrouiller pour obtenir un tableau dont chaque case contient l'entier 0.

Solution de l'exercice 5 On va dire qu'une colonne est *positive* si elle ne contient que des entiers naturels non nuls, et est *nulle* si elle ne contient que des 0. Remarquons que, chaque fois que Noémie double les entiers contenus sur une ligne, les colonnes positives restent positives et les colonnes nulles restent nulles. On dit enfin qu'un entier n est une valeur *charnière* si les colonnes 1 à n sont nulles et les colonnes $n+1$ à 2018 sont positives. Notons qu'une grille n'a pas nécessairement de valeur charnière ; ce sera néanmoins le cas de toutes les grilles que nous considérerons.
Initialement, 0 est une valeur charnière. On va montrer que, partant d'une grille ayant une valeur charnière n, Noémie peut appliquer les opérations de l'énoncé pour obtenir une grille ayant $n+1$ pour valeur charnière. Pour ce faire, on appelle *poids* de la $(n+1)^{\text{ème}}$ colonne le plus grand entier qu'elle contient. Si ce poids est strictement supérieur à 1, Noémie le fait baisser comme suit :

- ▷ tout d'abord, elle double les entiers de chacune des lignes dont le $(n+1)^{\text{ème}}$ entier vaut 1 (et vaudra donc 2 après doublement) ;
- ▷ puis elle retranche 1 à tous les entiers de la $(n+1)^{\text{ème}}$ colonne.

Ce faisant, la $(n+1)^{\text{ème}}$ colonne a bien vu son poids diminuer de 1, et n est toujours la valeur charnière de la grille. Enfin, si la $(n+1)^{\text{ème}}$ colonne a un poids de 1, alors Noémie retranche 1 à tous les entiers de cette colonne, et en fait une colonne nulle.
Elle obtient ainsi une grille dont $n+1$ est la valeur charnière. En réitérant ce processus, elle finit par aboutir à une grille dont 2018 est la valeur charnière, ce qui signifie que la grille ne contient que l'entier 0.

Exercice 6. Montrer que, parmi 2048 entiers, on peut toujours en trouver 1024 dont la somme est divisible par 1024.

Solution de l'exercice 6 On va montrer par récurrence sur $n \geqslant 0$ la propriété $P(n)$ selon laquelle, parmi 2^{n+1} entiers, on peut toujours en trouver 2^n dont la somme est divisible par 2^n. Tout d'abord, pour $n = 0$, le résultat est évident, puisque tout entier est divisible par $2^0 = 1$. La propriété $P(0)$ est donc vraie.
On considère maintenant un entier $n \geqslant 0$ tel que $P(n)$ est vraie, et on va montrer $P(n+1)$. Considérons un ensemble de 2^{n+2} entiers quelconques, que l'on coupe arbitrairement en deux tas de 2^{n+1} entiers chacun. Grâce à la propriété $P(n)$, on extrait du premier tas un ensemble E_1 de 2^n entiers dont la somme est divisible par 2^n. De même, on extrait du second tas un ensemble E_2 de 2^n entiers dont la somme est divisible par 2^n. Enfin, parmi les 2^{n+1} entiers n'appartenant ni à E_1 ni à E_2, on extrait de nouveau un ensemble E_3 de 2^n entiers dont la somme est divisible par 2^n.
Les trois ensembles E_1, E_2 et E_3 sont disjoints, et ont des sommes congrues à 0 ou à 2^n modulo 2^{n+1}. Deux de ces sommes sont donc égales modulo 2^{n+1}. L'union des ensembles associés est donc un ensemble de 2^{n+1} entiers dont la somme est divisible par 2^{n+1}, ce qui montre $P(n+1)$ et conclut l'exercice.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit G un graphe orienté infini, dont tout sommet est de degré fini. On suppose que, pour chaque sommet s, le degré entrant de s est strictement inférieur au degré sortant de s. Soit v un sommet de G. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note V_n le nombre de sommets que l'on peut atteindre à partir de v en passant par au plus n arêtes, v compris.
Quelle est la plus petite valeur possible de V_n ?

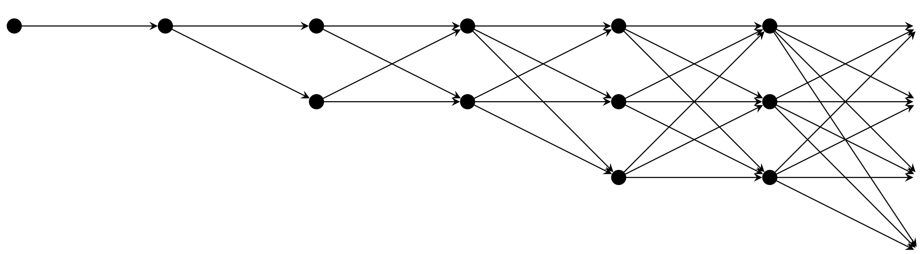
<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note E_n l'ensemble des sommets atteints en passant par n arêtes de G ou moins, et F_n l'ensemble $E_n \setminus E_{n-1}$, c'est-à-dire l'ensemble des sommets atteints en passant par n arêtes de G au minimum. En outre, on note a_n le nombre d'arêtes (x, y) telles que $x, y \in E_n$, et b_n le nombre d'arêtes (x, y) telles que $x \in E_n$ et $y \notin E_n$. Remarquons qu'il s'agit exactement des arêtes (x, y) telles que $x \in F_n$ et $y \in F_{n+1}$.
Par construction, on sait que a_n est inférieur ou égal à la somme des degrés entrants des sommets de E_n, tandis que $a_n + b_n$ est égal à la somme des degrés sortants des sommets de E_n. Par conséquent, on a $a_n + b_n \geqslant a_n + |E_n|$, donc $b_n \geqslant |E_n|$. Le principe des tiroirs indique alors que l'un des sommets de F_n au moins est de degré sortant $b_n/|F_n|$ ou plus, donc que $|F_{n+1}| \geqslant b_n/|F_n| \geqslant |E_n|/|F_n|$. Cela montre en particulier que

$$|E_{n+2}| = |E_{n+1}| + |F_{n+2}| \geqslant |E_{n+1}| + |E_{n+1}|/|F_{n+1}| = |E_n| + |F_{n+1}| + (|E_n| + |F_{n+1}|)/|F_{n+1}|.$$

L'inégalité arithmético-géométrique montre que $|F_{n+1}| + |E_n|/|F_{n+1}| \geqslant 2\sqrt{|E_n|}$, d'où l'on déduit en fait que $|E_{n+2}| \geqslant |E_n| + 2\sqrt{|E_n|} + 1$.
On remarque alors que $E_0 = F_0 = \{v\}$, donc que $|E_0| = |F_0| = 1$, et donc que $|E_1| = |E_0| + |F_1| \geqslant 1 + |E_0|/|F_0| = 2$. On montre alors par récurrence sur n que $|E_{2n}| \geqslant (n+1)^2$ et que $|E_{2n+1}| \geqslant (n+1)(n+2)$. Tout d'abord, c'est vrai pour $n = 0$. Par ailleurs, si ces deux égalités sont vraies pour un entier $n \geqslant 0$, alors :

- ▷ $|E_{2n+2}| \geqslant |E_{2n}| + 2\sqrt{|E_{2n}|} + 1 \geqslant (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 = (n+2)^2$;
- ▷ $|E_{2n+3}| \geqslant |E_{2n+1}| + 2\sqrt{|E_{2n+1}|} + 1 > (n+1)(n+2) + 2(n+1) + 1 = (n+2)(n+3) - 1$, donc $|E_{2n+3}| \geqslant (n+2)(n+3)$.

Ceci conclut notre récurrence.
Réciproquement, supposons que les sommets du graphe G sont les paires (a, b) telles que $0 \leqslant 2b \leqslant a$, et dont les arêtes sont les paires $((a, b), (a+1, b'))$. Alors chaque sommet (a, b) est de degré entrant $\lceil a/2 \rceil$ et de degré sortant $\lceil a/2 \rceil + 1$. Par ailleurs, si v est le sommet $(0, 0)$, alors E_n est l'ensemble des sommets (a, b) tels que $a \leqslant n$, ce qui montre que $|E_{2n}| = \sum_{k=0}^{n-1} 2(k+1) + (n+1) = (n+1)^2$ et que $|E_{2n+1}| = |E_{2n}| + (n+1) = (n+1)(n+2)$.
Par conséquent, on peut affimer que la plus petite valeur possible de $V_n = |E_n|$ est $(n+2)^2/4$ si n est pair, ou bien $(n+1)(n+3)/4$ si n est impair, c'est-à-dire $\lfloor (n+2)^2/4 \rfloor$ dans tous les cas.

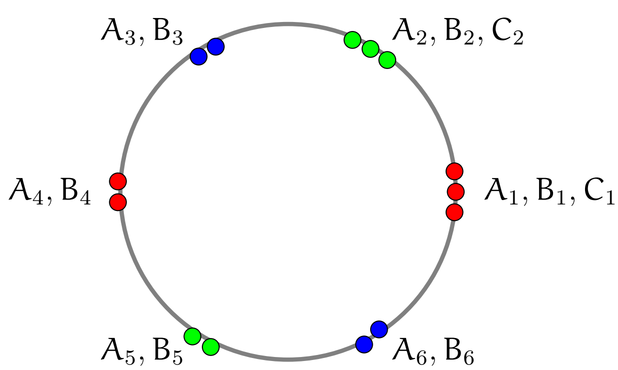


Exercice 8. Patricia a placé 2018 points dans le plan, de sorte que les distances entre 2 points quelconques soient deux à deux distinctes. Elle colorie alors chacun de ses 2018 points, en faisant attention à ce que ; pour chaque point P, les points Q et R placés le plus près et le plus loin de P sont de la même couleur que P.
Combien de couleurs, au plus, Patricia a-t-elle pu utiliser ?

Solution de l'exercice 8 On va montrer que Patricia a pu utiliser un maximum de 504 couleurs.
Tout d'abord, dès qu'une couleur sert à colorier un sommet v, elle sert aussi à colorier les sommets le plus proche et le plus éloigné de v, c'est-à-dire 3 sommets au moins.
Supposons maintenant que deux couleurs, au moins, n'ont servi à colorier que 3 sommets chacune. On appelle ces sommets respectivement A_1, A_2, A_3 et B_1, B_2, B_3. Sans perte de généralité, on suppose que $A_1A_2 < A_2A_3 < A_3A_1$ et que $B_1B_2 < B_2B_3 < B_3B_1$. Alors A_2 est le sommet le plus proche de A_3 et B_3 est le sommet le plus éloigné de B_2, donc $A_2A_3 < B_2A_3 < B_2B_3$. On montrerait de même que $B_2B_3 < A_2A_3$, aboutissant à une contradiction. Notre supposition était donc fausse, et au plus une couleur n'a servi à colorier que 3 sommets.
Si Patricia a utilisé k couleurs, elle a donc colorié au moins $4k - 1$ sommets. Cela montre que $4k - 1 \leqslant 2018$, donc que

$$k \leqslant \left\lfloor \frac{2018+1}{4} \right\rfloor = 504.$$

Réciproquement, voici une figure d'une construction possible pour 14 au lieu de 2018. Nous détaillons ci-dessous la construction pour 2018.



Patricia construit un 1008-gone régulier. Elle numérote ses sommets dans le sens des aiguilles d'une montre, de A_1 à A_{1008}, puis elle les bouge très légèrement, de manière à ce que les distances entre points A_i soient deux à deux distinctes : de telles perturbations peuvent être choisies de manière à être arbitrairement petites. Ensuite, à proximité immédiate de chaque point A_i, et toujours en faisant en sorte que les distances entre points soient deux à deux distinctes, elle place un point B_i. Enfin, elle place à proximité de A_1 et de A_2 deux points C_1 et C_2.
Alors, pour chaque sommet X_i, où $X \in \{A, B, C\}$, le sommet le plus proche est l'un des autres sommets X_i, et le sommet le plus éloigné est l'un des sommets X_{504+i} (si $1 \leqslant i \leqslant 504$) ou X_{i-504} (si $505 \leqslant i \leqslant 1008$). Patricia utilise donc des couleurs numérotées de 1 à 504, et peint de la couleur k les sommets X_k et X_{k+504}. La première phrase du paragraphe montre que ce coloriage respecte bien les conditions de l'énoncé, et Patricia a donc bien pu utliser 504 couleurs, ce qui conclut l'exercice.

Remarque : Comme à l'exercice 2, l'argument utilisé pour montrer que 504 couleurs au plus étaient disponibles fait appel au théorème du minimax : la plus grande des distances minimales d'un point aux autres points est égale à la plus petite des distances maximales d'un point aux autres points. Ici, on a utilisé ce résultat sur les points A_2, A_3, B_2 et B_3.

Exercice 9. On dit qu'un ensemble B d'entiers est un intervalle d'entiers s'il existe des entiers $i \leqslant j$ tels que $B = \{i, i+1, \ldots, j\}$, et on note $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles d'entiers. Par ailleurs, si $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ est un ensemble d'entiers, avec $a_1 < \ldots < a_k$, on pose

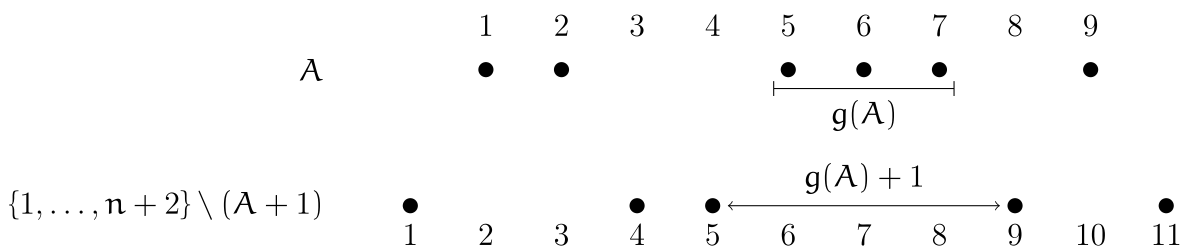
$$f(A) = \max_{1 \leqslant i < k} (a_{i+1} - a_i) \text{ et } g(A) = \max_{B \subseteq A, B \in \mathcal{I}} |B|.$$

On rappelle que la notation $|B|$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble B. Si A est vide ou est un singleton, on pose également $f(A) = 0$. Enfin, pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit

$$F(n) = \sum_{A \subseteq \{1,\ldots,n\}} f(A) \text{ et } G(n) = \sum_{A \subseteq \{1,\ldots,n\}} g(A).$$

Montrer qu'il existe un entier naturel m tel que $F(n) > G(n)$ pour tout entier $n \geqslant m$.

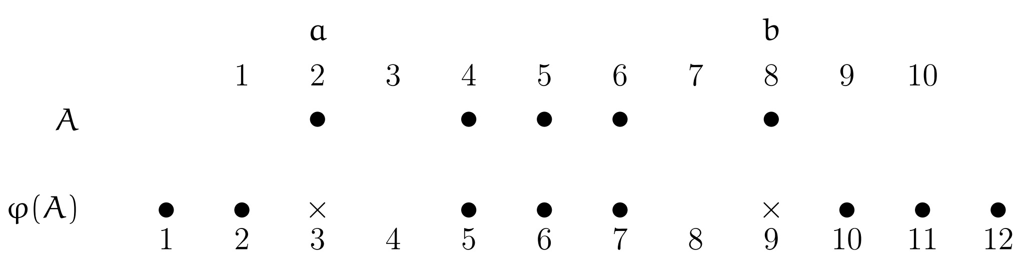
<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Dans toute cette soluion, on notera E_n l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$ et S_n l'ensemble des parties A de $\{1, \ldots, n\}$ telles que $\{1, n\} \subseteq A$. Si A est un ensemble et k un entier, on notera également $A + k$ l'ensemble $\{x + k \mid x \in A\}$.
Pour un ensemble $A \in E_n$ donné, $f(A)$ est la plus grande différence entre des éléments successifs de A, tandis que $g(A) + 1$ est la plus grande différence entre des éléments successifs de $\{0, \ldots, n+1\} \setminus A$, ou encore de $\{1, \ldots, n+2\} \setminus (A+1)$.



On a donc $g(A) + 1 = f(\{1, \ldots, n+2\} \setminus (A+1))$. Or, quand A parcourt l'ensemble E_n, $\{1, \ldots, n+2\} \setminus (A+1)$ parcourt S_{n+2}. On a donc

$$G(n) = \sum_{A \in S_{n+2}} (f(A) - 1).$$

On souhaite alors comparer $F(n)$ à la somme $\sum_{A \in S_{n+2}} f(A)$. Pour ce faire, on introduit la bijection $\varphi : E_n \mapsto S_{n+2}$ définie comme suit : $\varphi(\emptyset) = \{1, \ldots, n+2\}$ et, si A est une partie non vide de $\{1, \ldots, n\}$, de minimum a et de maximum b, alors $\varphi(A) = \{1, \ldots, a\} \cup \{x+1 \mid x \in A \text{ et } a < x < b\} \cup \{b+2, \ldots, n+2\}$.



Notons que, à partir de $\varphi(A)$, on peut calculer a et b, donc retrouver A lui-même, de sorte que φ est injective. Puisque E_n et S_{n+2} sont tous deux de cardinal 2^n, φ est donc bien une bijection.

En outre, remarquons que, pour tout $A \in E_n$ tel que $|A| \geqslant 2$, de minimum a et de maximum b, on a $f(\varphi(A)) \leqslant f(A) + 1$, avec égalité si et seulement si $a + f(A)$ est le deuxième plus petit élément de A, ou $b - f(A)$ est le deuxième plus grand élément de A. D'autre part, si $|A| \leqslant 1$, alors $f(A) = 0$ et $f(\varphi(A)) \leqslant 2$.
On dit alors qu'un ensemble $A \in E_n$ est *bon* si $|A| \geqslant 2$ et si $f(\varphi(A)) \leqslant f(A)$, et note e_n le nombre de bons ensembles de E_n. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{A \in S_{n+2}} f(A) = \sum_{A \in E_n} f(\varphi(A)) &\leqslant \sum_{A \in E_n, |A| \geqslant 2, A \text{ bon}} f(A) + \sum_{A \in E_n, |A| \geqslant 2, A \text{ pas bon}} (f(A)+1) + \sum_{A \in E_n, |A| \leqslant 1} 2 \\ &\leqslant \sum_{A \in E_n, |A| \geqslant 2} (f(A)+1) - e_n + 2(n+1) = \sum_{A \in E_n} (f(A)+1) - e_n + n + 1.\end{aligned}$$

Or, si $n \geqslant 5$, tout ensemble A de la forme $\{1, 2, n-1, n\} \cup (X+3)$, où X est un élément de E_{n-5}, est nécessairement bon, puisque $f(A) \geqslant 2$. Il existe donc au moins 2^{n-5} bons ensembles dans E_n, ce qui montre que $e_n \geqslant 2^{n-5}$. En particulier, on a $e_{10} \geqslant 2^5 = 32 > 10 + 1$, et une récurrence immédiate montre que $e_n > n + 1$ pour tout $n \geqslant 10$. Il s'ensuit que, si $n \geqslant 10$, alors

$$\begin{aligned}G(n) = \sum_{A \in S_{n+2}} f(A) - |S_{n+2}| &\leqslant \sum_{A \in E_n} (f(A)+1) - e_n + n + 1 - |S_{n+2}| \\ &\leqslant F(n) + |E_n| - e_n + n + 1 - |S_{n+2}| = F(n) - e_n + n + 1 < F(n).\end{aligned}$$