PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 10 JANVIER 2018
DURÉE : 4 HEURES (14H-18H)

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**

- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le probléme.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Régles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Le groupe B est constitué des élèves nés en 2003 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés Groupe B ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- L'exercice classé commun est à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés Groupe A ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Préparation Olympique Française de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Exercices du groupe B

Exercice 1. Pour tout entier naturel n, on note $S(n)$ la somme des chiffres de l'écriture décimale de n. On dit qu'un entier naturel n est *joli* si $S(n) = S(n^2)$. Déterminer toutes les valeurs possibles de $S(n)$ pour les entiers jolis n.

Exercice 2. On fixe un entier naturel $n \geqslant 2$. Déterminer tous les nombres réels $x \geqslant -1$ tels que pour tous nombres réels $a_1, \ldots, a_n \geqslant 1$ on ait

$$\frac{a_1 + x}{2} \times \cdots \times \frac{a_n + x}{2} \leqslant \frac{a_1 a_2 \cdots a_n + x}{2}.$$

Exercice 3. Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. On se donne $2n$ boules. Sur chacune de ces boules est écrit un nombre. On suppose que, à chaque fois que l'on regroupe les boules en n paires, deux de ces paires ont la même somme.
(a) Montrer que quatre de ces boules comportent le même nombre.
(b) Montrer que le nombre de valeurs distinctes inscrites sur les boules est $\leqslant n - 1$.

Exercice commun

Exercice 4. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe d'aire S. On note $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ et $d = DA$. Pour toute permutation x, y, z, t de a, b, c, d, montrer que

$$S \leqslant \frac{1}{2}(xy + zt).$$

Exercices du groupe A

Exercice 5. Déterminer tous les nombres réels a tels qu'il existe une suite infinie de nombres réels strictement positifs $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ vérifiant pour tout n l'égalité

$$x_{n+2} = \sqrt{a x_{n+1} - x_n}.$$

Exercice 6. Dans un pays se trouvent 64 villes. Il existe des routes qui relient certaines paires de villes, mais Bob ne sait pas lesquelles (les routes ne se croisent pas mais peuvent éventuellement passer les unes au-dessus des autres ; de plus, les routes peuvent être parcourues dans les deux sens). Alice, elle, connaît parfaitement le réseau. Bob peut choisir n'importe quelle paire de villes et demander à Alice si elles sont reliées directement par une route. Le but de Bob est de déterminer s'il est possible de voyager de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre (en empruntant éventuellement plusieurs routes successives). Montrer qu'il n'existe aucun algorithme (c'est-à-dire aucune stratégie en fonction des réponses successives d'Alice) lui permettant de le savoir à coup sûr en moins de 2016 questions.