PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 10 JANVIER 2018
CORRIGÉ

Exercice 1. Pour tout entier naturel n, on note $S(n)$ la somme des chiffres de l'écriture décimale de n. On dit qu'un entier naturel n est *joli* si $S(n) = S(n^2)$. Déterminer toutes les valeurs possibles de $S(n)$ pour les entiers jolis n.

Solution de l'exercice 1 Modulo 9, $S(n)$ vérifie l'équation $x^2 = x$. On vérifie en testant $x = 0, 1, \ldots, 8$ que les seules solutions (modulo 9) sont 0 et 1, donc $S(n)$ est nécessairement congru à 0 ou 1 modulo 9. Réciproquement, on vérifie que si $n = 10^k - 1 = 99\cdots9$ (k fois) alors $n^2 = 99\cdots9800\cdots01$ (avec $k-1$ chiffres 9 et $k-1$ chiffres 0), donc $S(n) = S(n^2) = 9k$. De même, si $n = 2\times10^k - 1 = 199\cdots9$ alors $n^2 = 399\cdots9600\cdots01$ donc $S(n) = S(n^2) = 9k+1$.
On en conclut que les valeurs possibles de $S(n)$ sont les entiers naturels congrus à 0 ou à 1 modulo 9.

Exercice 2. On fixe un entier naturel $n \geqslant 2$. Déterminer tous les nombres réels $x \geqslant -1$ tels que pour tous nombres réels $a_1, \ldots, a_n \geqslant 1$ on ait

$$\frac{a_1 + x}{2} \times \cdots \times \frac{a_n + x}{2} \leqslant \frac{a_1 a_2 \cdots a_n + x}{2}.$$

Solution de l'exercice 2 En prenant $a_i = 1$ pour tout i, on obtient la condition $\left(\frac{1+x}{2}\right)^n \leqslant \frac{1+x}{2}$. Notons $y = \frac{1+x}{2}$. Par hypothèse, $y \geqslant 0$. Comme $y^n \leqslant y$, on a $y^{n-1} \leqslant 1$ donc $y \leqslant 1$, ce qui implique $x \leqslant 1$.
Réciproquement, montrons que tout $x \in [-1, 1]$ convient. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$ l'inégalité est évidente. Supposons qu'elle soit vraie au rang $n-1$. Le membre de gauche de l'inégalité est alors inférieur ou égal à $\dfrac{a+x}{2} \times \dfrac{b+x}{2}$, où $a = a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$ et $b = a_n$. Il suffit alors de montrer que $\left(\frac{a+x}{2}\right)\left(\frac{b+x}{2}\right) \leqslant \left(\frac{ab+x}{2}\right)$. En développant, l'inégalité devient $(a+b-2)x + x^2 \leqslant ab$. Comme $a+b-2 \geqslant 0$, et comme $x \leqslant 1$ et $x^2 \leqslant 1$, le membre de gauche de l'inégalité est majoré par $(a+b-2)+1$, donc suffit de montrer que $(a+b-2)+1 \leqslant ab$, ou encore que $0 \leqslant ab - a - b + 1$. Or, on a $ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)$. Comme $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$, l'inégalité $(a-1)(b-1) \geqslant 0$ est bien vérifiée.

Exercice 3. Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. On se donne $2n$ boules. Sur chacune de ces boules est écrit un nombre. On suppose que, à chaque fois que l'on regroupe les boules en n paires, deux de ces paires ont la même somme.

(a) Montrer que quatre de ces boules comportent le même nombre.
(b) Montrer que le nombre de valeurs distinctes inscrites sur les boules est $\leqslant n-1$.

Solution de l'exercice 3 (a) On note $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{2n}$ les valeurs prises par les $2n$ boules dans l'ordre décroissant. On les apparie ainsi : (a_1, a_2), (a_3, a_4),... Comme il existe $i < j$ impairs tels que $a_i + a_{i+1} = a_j + a_{j+1}$, et comme $a_i \geqslant a_{i+1} \geqslant a_j \geqslant a_{j+1}$, on a $a_i = a_{i+1} = a_j = a_{j+1}$.
(b) Supposons qu'il y ait au moins n valeurs distinctes, que l'on ordonne par ordre décroissant $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. On ordonne les autres boules dans l'ordre décroissant $c_1 \geqslant \cdots \geqslant c_n$. On forme les n paires (b_i, c_i), et on constate que si $i < j$ alors $b_i + c_i > b_j + c_j$, ce qui contredit le fait que deux de ces sommes doivent être égales.

Exercice 4. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe d'aire S. On note $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ et $d = DA$. Pour toute permutation x, y, z, t de a, b, c, d, montrer que

$$S \leqslant \frac{1}{2}(xy + zt).$$

Solution de l'exercice 4 Si x et y sont adjacents, sans perte de généralité on se ramène à montrer que $S \leqslant \frac{1}{2}(ab + cd)$. Cela découle de $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC.\sin\widehat{ABC} \leqslant \frac{1}{2}ab$, et de même $S_{CDA} \leqslant \frac{1}{2}cd$. Si x et y sont des côtés opposés, on doit montrer que $S \leqslant \frac{1}{2}(ac + bd)$. Soit A' le symétrique de A par rapport à la médiatrice de $[BD]$. Alors $BA'D$ est isométrique à DAB. On applique ce qui précède à $A'BCD$, ce qui donne $S = S_{BAD} + S_{BCD} = S_{BA'D} + S_{BCD} = S_{A'BCD} \leqslant \frac{1}{2}(A'B.BC + CD.DA') = \frac{1}{2}(ac + bd)$.

Exercice 5. Déterminer tous les nombres réels a tels qu'il existe une suite infinie de nombres réels strictement positifs $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ vérifiant pour tout n l'égalité

$$x_{n+2} = \sqrt{ax_{n+1} - x_n}.$$

Solution de l'exercice 5 Si $a > 1$, on peut prendre la suite constante égale à $a - 1$. Supposons $a \leqslant 1$. Comme la racine carré est bien définie, on a nécessairement $ax_{n+1} - x_n > 0$, donc déjà $a \geqslant 0$, et de plus $x_{n+1} \geqslant ax_{n+1} > x_n$. Par conséquent, la suite est strictement croissante.
Comme $x_{n+1} \leqslant x_{n+2} \leqslant \sqrt{x_{n+1} - x_n} < \sqrt{x_{n+1}}$, on en déduit que $x_n < 1$ pour tout n. De plus, $x_{n+1}^2 \leqslant x_{n+1} - x_n$ donc $x_{n+1} \geqslant x_{n+1}^2 + x_n \geqslant x_n x_0 + x_n = (1 + x_0)x_n$, ce qui montre que $x_n \geqslant (1 + x_0)^n x_0$ pour tout n. Ceci contredit que $x_n \leqslant 1$.

Exercice 6. Dans un pays se trouvent 64 villes. Il existe des routes qui relient certaines paires de villes, mais Bob ne sait pas lesquelles (les routes ne se croisent pas mais peuvent éventuellement passer les unes au-dessus des autres ; de plus, les routes peuvent être parcourues dans les deux sens). Alice, elle, connaît parfaitement le réseau. Bob peut choisir n'importe quelle paire de villes et demander à Alice si elles sont reliées directement par une route. Le but de Bob est de déterminer s'il est possible de voyager de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre (en empruntant éventuellement plusieurs routes successives). Montrer qu'il n'existe aucun algorithme (c'est-à-dire aucune stratégie en fonction des réponses successives d'Alice) lui permettant de le savoir à coup sûr en moins de 2016 questions.

Solution de l'exercice 6
On remarque que $2016 = 64 \times 63/2 = \binom{64}{2}$, donc il y a exactement 2016 paires de villes. Le réseau routier est un graphe non orienté ayant 64 sommets. Chaque paire de villes correspond à une

question, et on veut savoir si en moins de 2016 questions Bob peut déterminer si le graphe est connexe. Supposons par l'absurde que Bob possède un algorithme en moins de 2016 questions : par conséquent, pour tout graphe ayant 64 sommets, si Bob suit son algorithme en posant une suite de questions $Q_1, Q_2, \dots$ et s'arrête à une question Q_n dès qu'il peut conclure à coup sûr si le graphe est connexe ou non, alors $n \leqslant 2015$ (l'entier n dépend du graphe). Remarquons que la réponse à Q_n est nécessairement "oui" si le graphe est connexe et "non" si le graphe est non connexe, sinon Bob aurait déjà pu conclure à la question Q_{n-1}.
On part du graphe G_0 ne possédant aucune arête. Bob, en utilisant son algorithme, pose une suite de questions $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n_0}$ à Alice.
La question Q_{n_0} correspond à une paire de villes. Soit G_1 le graphe consistant à rajouter une arête entre ces deux villes. En suivant son algorithme, Bob pose à nouveau les questions $Q_1, \dots, Q_{n_0}$, et d'autres questions $Q_{n_0+1}, \dots, Q_{n_1}$. On a bien $n_1 > n_0$ car, pour le graphe G_1, la réponse à Q_{n_0} est "oui", et la réponse à Q_{n_1} est "non" puisque le graphe G_1 n'est pas connexe.
On continue la procédure, et on construit ainsi une suite de graphes $G_0, G_1, G_2, \dots$, chaque graphe étant construit à partir du précédent en rajoutant une arête, jusqu'à obtenir un graphe connexe G_k. Comme $n_{k-1} > n_{k-1} > \cdots > n_0 \geqslant 1$, on a $n_{k-1} \geqslant k$ donc $k \leqslant 2015$.
Or, G_k possède k arêtes, donc il existe une paire de villes X et Y qui ne sont pas reliées directement. En revanche, comme G_k est connexe on peut aller de X vers Y en suivant un chemin consistant en des arêtes de G_k. Soit j le plus grand indice tel que l'une des arêtes A de ce chemin appartient à G_j mais pas à G_{j-1}. Soit G' le graphe obtenu en enlevant l'arête A au graphe G_k et en ajoutant l'arête XY, alors la réponse aux questions $Q_1, \dots, Q_{n_{j-1}}$ est la même pour G' que pour G_{j-1}. Or, Bob a pu conclure à coup sûr que G_{j-1} n'est pas connexe, donc G' ne l'est pas non plus.
Mais ceci est contradictoire car, G_k étant connexe, G' l'est aussi.