PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

Envoi de combinatoire

À renvoyer au plus tard le 14 février 2018

Instructions

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- ▷ le groupe B est constitué des élèves nés en 2003 ou après ;
- ▷ le groupe A est constitué des élèves nés en 2002 ou avant ;
- ▷ les exercices classés « groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B ;
- ▷ les exercices classés « communs » sont à chercher par tous les élèves ;
- ▷ les exercices classés « groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A ;
- ▷ les exercices doivent être cherchés de manière individuelle ;
- ▷ utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents ;
- ▷ respecter la numérotation des exercices ;
- ▷ préciser sur chaque copie votre nom en lettres capitales et votre prénom en minuscules.

Préparation Olympique Française de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Exercices du groupe B

Exercice 1. Dans les carrés suivants, on s'autorise à remplacer tous les 0 par des 1 et réciproquement sur toute une ligne ou toute une colonne ou toute une diagonale. Dans chaque cas, peut-on n'obtenir que des 0 ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. On place les entiers de 1 à 9 dans chacune des cases d'une grille 3×3. Pour $i = 1$, 2 et 3, on note ℓ_i le plus grand entier présent dans la $i^{\text{ème}}$ ligne et c_i le plus petit entier présent dans la $i^{\text{ème}}$ colonne.
Combien existe-t-il de grilles telles que $\min\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\} = \max\{c_1, c_2, c_3\} = 4$?

Exercice 3. Trouver tous les entiers $n \geqslant 3$ tels que, si $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels strictement positifs tels que

$$\max(a_1, \ldots, a_n) \leqslant n \cdot \min(a_1, \ldots, a_n),$$

alors il existe nécessairement trois de ces réels qui sont les longueurs des côtés d'un triangle acutangle, c'est-à-dire d'un triangle dont les trois angles sont aigus.

Exercices communs

Exercice 4. On dit que deux permutations $a_1, \ldots, a_{4035}$ et $b_1, \ldots, b_{4035}$ des entiers $1, \ldots, 4035$ s'intersectent s'il existe un entier $k \leqslant 4035$ tel que $a_k = b_k$. On dit qu'un ensemble E de permutations est inévitable si chaque permutation des entiers $1, \ldots, 4035$ intersecte une permutation appartenant à E.

a) Montrer qu'il existe un ensemble inévitable contenant 2018 permutations.

b) Existe-t-il un ensemble inévitable contenant 2017 permutations ?

Exercice 5. On considère un tableau de taille 2018×2018 dont chaque case contient un entier naturel non nul. Noémie modifie ces entiers à sa guise, en appliquant les opérations suivantes :

- choisir une ligne puis multiplier par 2 tous les entiers contenus dans cette ligne ;
- choisir une colonne puis soustraire 1 à tous les entiers contenus dans cette colonne.

Montrer que, en appliquant ces opérations, Noémie peut se débrouiller pour obtenir un tableau dont chaque case contient l'entier 0.

Exercice 6. Montrer que, parmi 2048 entiers, on peut toujours en trouver 1024 dont la somme est divisible par 1024.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit G un graphe orienté infini, dont tout sommet est de degré fini. On suppose que, pour chaque sommet s, le degré entrant de s est strictement inférieur au degré sortant de s. Soit v un sommet de G. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note V_n le nombre de sommets que l'on peut atteindre à partir de v en passant par au plus n arêtes, v compris.
Quelle est la plus petite valeur possible de V_n ?

Exercice 8. Patricia a placé 2018 points dans le plan, de sorte que les distances entre 2 points quelconques soient deux à deux distinctes. Elle colorie alors chacun de ses 2018 points, en faisant attention à ce que ; pour chaque point P, les points Q et R placés le plus près et le plus loin de P sont de la même couleur que P.
Combien de couleurs, au plus, Patricia a-t-elle pu utiliser ?

Exercice 9. On dit qu'un ensemble B d'entiers est un intervalle d'entiers s'il existe des entiers $i \leqslant j$ tels que $B = \{i, i+1, \ldots, j\}$, et on note $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles d'entiers. Par ailleurs, si $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ est un ensemble d'entiers, avec $a_1 < \ldots < a_k$, on pose

$$f(A) = \max_{1 \leqslant i < k} (a_{i+1} - a_i) \text{ et } g(A) = \max_{B \subseteq A, B \in \mathcal{I}} |B|.$$

On rappelle que la notation $|B|$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble B. Si A est vide ou est un singleton, on pose également $f(A) = 0$. Enfin, pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit

$$F(n) = \sum_{A \subseteq \{1,\ldots,n\}} f(A) \text{ et } G(n) = \sum_{A \subseteq \{1,\ldots,n\}} g(A).$$

Montrer qu'il existe un entier naturel m tel que $F(n) > G(n)$ pour tout entier $n \geqslant m$.