Préparation Olympique Française de Mathématiques 2017-2018

Envoi Numéro 3

À renvoyer au plus tard le 14 Janvier

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2003 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés “Groupe B” ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés “communs” sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés “Groupe A” ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques, 11-13 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris.
olymp@animath.fr

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geqslant \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

Attention, il y a bien un "moins" dans le membre de droite !

Solution de l'exercice 1 En multipliant les deux membres par abc, l'inégalité à montrer se réécrit

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2bc + 2ac - 2ab.$$

En passant $2ab$ de l'autre côté, on peut factoriser. L'inégalité à montrer devient

$$(a+b)^2 + c^2 \geqslant 2(a+b)c.$$

En passant tout à gauche, l'inégalité est finalement équivalente à

$$(a+b-c)^2 \geqslant 0,$$

qui est bien toujours vraie. De plus, on a égalité si et seulement si $c = a + b$.

Exercice 2.

1. Soient a, b et c trois nombres réels tels que

   $$|a| \geqslant |a+b|, |b| \geqslant |b+c| \text{ et } |c| \geqslant |c+a|.$$

   Montrer que $a = b = c = 0$.
2. Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que

   $$|a| \geqslant |a+b|, |b| \geqslant |b+c|, |c| \geqslant |c+d| \text{ et } |d| \geqslant |d+a|.$$

   A-t-on forcément $a = b = c = d = 0$?

Solution de l'exercice 2

1. Parmi les trois nombres, il y en a au moins deux de même signe. On peut supposer que ce sont a et b et qu'ils sont positifs, les autres cas se traitant de la même manière. On a alors
$$a = |a| \geqslant |a+b| = a+b \geqslant a,$$
donc on a égalité partout, donc $b = 0$. Comme $|b| \geqslant |b+c|$, on a donc $0 \geqslant |c|$, donc $c = 0$. Finalement, comme $|c| \geqslant |c+a|$, on a $0 \geqslant |a|$ donc $a = 0$ donc les trois nombres sont nuls.
2. Non. Par exemple, on peut prendre $a = c = 1$ et $b = d = -1$. On a alors
$$a+b = b+c = c+d = d+a = 0$$
donc la condition est vérifiée, bien que les nombres choisis soient non nuls.

Exercice 3. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x et y, on ait
$$f(xf(y)) + x = f(x)f(y+1).$$

Solution de l'exercice 3 En prenant $x = 0$, on obtient $f(0) = f(0)f(y+1)$ pour tout y, donc soit $f(0) = 0$, soit $f(y+1) = 1$ pour tout y. Dans le second cas, f est constante égale à 1, mais alors l'équation devient
$$1 + x = 1 \times 1$$
pour tout x, ce qui est impossible. On a donc $f(0) = 0$. En prenant $y = 0$, on obtient alors $x = f(x)f(1)$ pour tout x. En particulier, en prenant $x = 1$, on obtient $1 = f(1)^2$ donc $f(1)$ vaut 1 ou -1.
Si $f(1) = 1$, alors $x = f(x)$ donc f est l'identité, qui est bien solution. Si $f(1) = -1$, on obtient $x = -f(x)$ pour tout x, donc $f(x) = -x$ pour tout x, et on vérifie que cette fonction aussi est bien solution du problème.

Exercices Communs

Exercice 4. Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante d'entiers strictement positifs et k un entier strictement positif. Supposons que pour un certain $r \geqslant 1$, on a $\frac{r}{a_r} = k+1$. Montrer qu'il existe un entier $s \geqslant 1$ tel que $\frac{s}{a_s} = k$.

Solution de l'exercice 4 Soit $\nu_n = n - ka_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Le problème revient à montrer qu'il existe s tel que $\nu_s = 0$.
On observe que $\nu_1 = 1 - ka_1 \leqslant 0$, que $\nu_r = r - ka_r = a_r > 0$ et qu'enfin $\nu_{n+1} = (n+1) - ka_{n+1} = n - ka_{n+1} + 1 \leqslant n - ka_n + 1 = \nu_n + 1$, car la suite $(a_n)_n$ est croissante.
Intuitivement, on a donc une suite d'entiers qui part d'un nombre négatif, atteint un nombre strictement positif, et ne peut augmenter que d'au plus 1 à chaque fois : elle doit atteindre 0. Prouvons-le : soit s le plus grand entier inférieur à r tel que $\nu_s \leqslant 0$ (il existe car $\nu_1 \leqslant 0$). Alors, comme $\nu_r > 0$, on a $s < r$, donc $\nu_{s+1} > 0$. On a donc $\nu_{s+1} \geqslant 1$, donc $0 \geqslant \nu_s \geqslant \nu_{s+1} - 1 \geqslant 0$, donc $\nu_s = 0$, de sorte que $\frac{s}{a_s} = k$.

Exercice 5. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$,

$$f(x+y)^2 - f(2x^2) = f(y+x)f(y-x) + 2xf(y).$$

Solution de l'exercice 5 En posant $x = y = 0$, on obtient que $f(0)^2 - f(0) = f(0)^2$, donc $f(0) = 0$. En prenant $y = 0$, on obtient que

$$f(x)^2 = f(2x^2) + f(x)f(-x),$$

donc f^2 est paire, i.e. $f(x)^2 = f(-x)^2$ pour tout x.
En remplaçant dans l'équation x par $-x$, on obtient

$$f(y-x)^2 - f(2x^2) = f(y+x)f(y-x) - 2xf(y),$$

En soustrayant membre à membre cette égalité à celle de départ, il s'ensuit

$$f(y+x)^2 - f(y-x)^2 = 4xf(y).$$

En échangeant x et y on trouve

$$f(y+x)^2 - f(x-y)^2 = 4yf(x).$$

Comme f^2 est paire, on a toujours $f(y-x)^2 = f(x-y)^2$ donc pour tous réels x, y, $xf(y) = yf(x)$.

En particulier, en prenant $x = 1$, on obtient $f(y) = yf(1)$ pour tout y, donc f est de la forme $x \to ax$, avec $a \in \mathbb{R}$. En prenant $x = 1$ et $y = 0$, l'équation de départ devient $a^2 - 2a = -a^2$, donc $a = a^2$, donc $a = 0$ ou $a = 1$. Ainsi, f est la fonction nulle ou l'identité.
Réciproquement, on vérifie sans difficulté que ces fonctions sont des solutions.

Exercice 6. Soient $a, b, c > 0$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leqslant 4$. Montrer que

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geqslant 3.$$

Solution de l'exercice 6 En développant $(a+b+c)^2$ et en divisant tout par 2, l'hypothèse se réécrit

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leqslant 2.$$

On cherche maintenant à homogénéiser le membre de gauche de l'inégalité à montrer, c'est-à-dire à faire en sorte que tous les termes aient le même degré. Pour cela, on fait apparaître un 2 à la place du 1 et on utilise notre hypothèse :

$$\begin{aligned}
\frac{ab+1}{(a+b)^2} &= \frac{1}{2}\frac{2ab+2}{(a+b)^2} \\
&\geqslant \frac{1}{2}\frac{2ab + a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{(a+b)^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c^2 + ab + bc + ca}{(a+b)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}.
\end{aligned}$$

De même, on obtient $\frac{bc+1}{(b+c)^2} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2}$ et $\frac{ca+1}{(c+a)^2} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2}$. En sommant, le membre de gauche vaut au moins

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2} + \frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2} + \frac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2}\right).$$

Or, d'après l'inégalité de la moyenne arithmético-géométrique, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2} + \frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2} + \frac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2} \\
\geqslant\ & 3\sqrt[3]{\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2} \times \frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2} \times \frac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2}} = 3,
\end{aligned}$$

donc le membre de gauche vaut au moins $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$, d'où le résultat.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Trouver tous les polynômes à coefficients réels P tels que le polynôme

$$(X+1)P(X-1)-(X-1)P(X)$$

soit constant.

Solution de l'exercice 7 On présente deux solutions : une qui utilise une factorisation polynomiale, et une autre plus calculatoire.
Commençons par la solution par factorisation. Supposons que $(X+1)P(X-1)-(X-1)P(X)$ est constant égal à $2k$. En prenant $X=-1$, on obtient $2P(-1)=2k$. En prenant $X=1$, on obtient $2P(0)=2k$. On a donc $P(0)=P(-1)=k$, donc 0 et -1 sont des racines de $P-k$, donc $P-k$ se factorise par X et $X+1$. Par conséquent, il existe un polynôme Q tel que

$$P(X)=X(X+1)Q(X)+k.$$

La condition se réécrit alors de la manière suivante : le polynôme

$$(X-1)X(X+1)\left(Q(X-1)-Q(X)\right)+2k$$

est constant égal à $2k$, donc

$$(X-1)X(X+1)\left(Q(X-1)-Q(X)\right)=0.$$

On a donc $Q(n)=Q(n-1)$ pour tout entier $n\geqslant 2$, donc Q prend une infinité de fois la valeur $Q(2)$, donc $Q-Q(2)$ a une infinité de racines, donc Q est constant. Finalement, P est donc de la forme

$$P(X)=cX(X+1)+k$$

où c et k sont deux nombres réels. Réciproquement, si P est de cette forme, on vérifie facilement que le polynôme donné est constant, égal à $2k$.
Passons à la solution calculatoire. On note d le degré de P, et on écrit

$$P(X)=a_dX^d+a_{d-1}X^{d-1}+\dots,$$

avec $a_d \neq 0$. Le polynôme $(X+1)P(X-1)-(X-1)P(X)$ est au plus de degré $d+1$, et on va calculer ses coefficients de degrés $d+1$ et d. On a

$$\begin{aligned} P(X-1) &= a_d(X-1)^d + a_{d-1}(X-1)^{d-1} + [\text{Polynôme de degré au plus } d-2] \\ &= a_dX^d - da_dX^{d-1} + a_{d-1}X^{d-1} + [\text{Polynôme de degré au plus } d-2] \end{aligned}$$

en développant $(X-1)^d$ et $(X-1)^{d-1}$ avec le binôme de Newton. On en déduit

$$(X+1)P(X-1) = a_dX^{d+1} - da_dX^d + a_{d-1}X^d + a_dX^d + [\text{Polynôme de degré au plus } d-2]$$

et, similairement,

$$(X-1)P(X) = a_dX^{d+1} + a_{d-1}X^d - a_dX^d + [\text{Polynôme de degré au plus } d-2].$$

Dans $(X+1)P(X-1)-(X-1)P(X)$, le coefficient devant X^{d+1} vaut donc $a_d - a_d = 0$, et le coefficient devant X^d vaut $(2-d)a_d$, avec a_d. Si $d > 0$, comme le polynôme doit être constant, ce coefficient doit être nul. Comme $a_d > 0$ par définition, on doit donc avoir $d = 2$, donc P est de degré 0 ou 2, donc de la forme

$$P(X) = aX^2 + bX + c.$$

En remplaçant P par cette expression, on obtient que le polynôme suivant doit être constant :

$$(b-a)X + (a-b+2c).$$

Ce dernier polynôme est constant si et seulement si $b-a=0$, soit $a=b$, c'est-à-dire si P est de la forme

$$P(X) = aX(X+1) + c$$

avec $a, c \in \mathbb{R}$, et on retrouve la même solution que par la première méthode.

Exercice 8. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels quelconques. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i + x_j| \geqslant n \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Parmi les n nombres, on suppose que r sont positifs (ou nuls), et $s = n - r$ sont strictement négatifs. On note $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ la liste des nombres positifs (ou

nuls), et $(-b_j)_{1\leqslant j\leqslant s}$ la liste des nombres strictement négatifs, de sorte que tous les a_i et les b_j sont positifs.
On pose
$$A=\sum_{i=1}^{r} a_i,\ B=\sum_{j=1}^{s} b_j.$$
On note M_1 et M_2 le membre de gauche et le membre de droite dans l'énoncé respectivement. Quitte à changer tous les signes, on peut supposer $A \geqslant B$.
On a alors
$$M_1 = 2rA + 2sB + 2\sum_{1\leqslant i\leqslant r}\sum_{1\leqslant j\leqslant s}|a_i - b_j|,$$
où $2rA$ est la somme des termes $|x_i + x_j|$ avec $x_i, x_j \geqslant 0$ et de même $2sB$ est la somme des termes $|x_i + x_j|$ avec $x_i, x_j < 0$ et $\sum\sum |a_i - b_j|$ est la somme des termes $|x_i + x_j|$ où x_i et x_j sont de signes différents. De plus, on a $M_2 = (r+s)(A+B)$. Montrer que $M_1 \geqslant M_2$ est donc équivalent à montrer
$$2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}|a_i - b_j| \geqslant (s-r)(A-B).$$
Si $s \leqslant r$, le résultat est évident car le membre de gauche est positif et celui de droite est négatif. On suppose donc $s > r$. On a alors
$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}|a_i - b_j| &\geqslant \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}|a_i - b_j|\\
&\geqslant \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_i - b_j\\
&= sA - rB\\
&= (s-r)A + rA - rB\\
&\geqslant (s-r)A\\
&\geqslant (s-r)(A-B)
\end{aligned}$$
car $s > r$ et $A \geqslant B$. On a donc montré ce qu'on voulait.

Exercice 9. Soit $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous $x, y > 0$, on ait
$$f\left(\frac{f(x)}{yf(x)+1}\right) = \frac{x}{xf(y)+1}.$$

Solution de l'exercice 9 On remarque tout d'abord que pour tout $z > 0$, l'application $x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \frac{x}{xz+1} \in]0; z^{-1}[$ est une bijection strictement croissante.
Maintenant, si $f(x) = f(x')$, on trouve que

$$\frac{x}{xf(1)+1} = f\left(\frac{f(x)}{1 \times f(x)+1}\right) = f\left(\frac{f(x')}{f(x') \times 1+1}\right) = \frac{x'}{x'f(1)+1},$$

donc $x = x'$ et f est injective.
D'autre part, fixons $y > 0$. Chaque z compris entre 0 et $f(y)^{-1}$ (strictement) s'écrit comme un $\frac{x}{xf(y)+1}$ pour un certain x strictement positif, tout $0 < z < f(y)^{-1}$ est atteint par f. En particulier, si $0 < z < f(y)^{-1}$, on peut écrire $z = f(y')$. Mais alors f atteint tout point entre 0 et $f(y')^{-1} = z^{-1}$. En faisant tendre z vers 0 (ce qui est permis, la seule contrainte étant $0 < z < f(y)^{-1}$), on en déduit que f est surjective, donc f est bijective.
Soit g la bijection réciproque de f, i.e. la seule fonction telle que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ pour tout $x > 0$. On vérifie que g vérifie la même équation fonctionnelle que f : en appliquant l'équation fonctionnelle de départ à $g(x)$ et $g(y)$, on obtient

$$f\left(\frac{x}{xg(y)+1}\right) = \frac{g(x)}{yg(x)+1}$$

En appliquant g des deux côtés, on obtient que g vérifie la même équation que f.
Soient maintenant $x, x' > 0$ tels que $x' < f(x)$. Alors il existe un $y > 0$ tel que $x' = \frac{f(x)}{yf(x)+1}$ (il suffit de prendre $y = \frac{1}{x'} - \frac{1}{f(x)}$), donc

$$f(x') = f\left(\frac{f(x)}{yf(x)+1}\right) = \frac{x}{xf(y)+1} < x.$$

Donc si $x' < f(x)$, alors $f(x') < x$. En particulier, si $x < f(x)$, alors $f(x) < x$, c'est absurde. Donc pour tout réel $x > 0$, $f(x) \leqslant x$.
Or, on a vu que g était également solution de l'équation, donc pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \leqslant x$. Notamment, si $x > 0$, $x = g(f(x)) \leqslant f(x)$. On a donc forcément $f(x) = x$, donc f est l'identité, et on vérifie facilement que l'identité est bien solution.