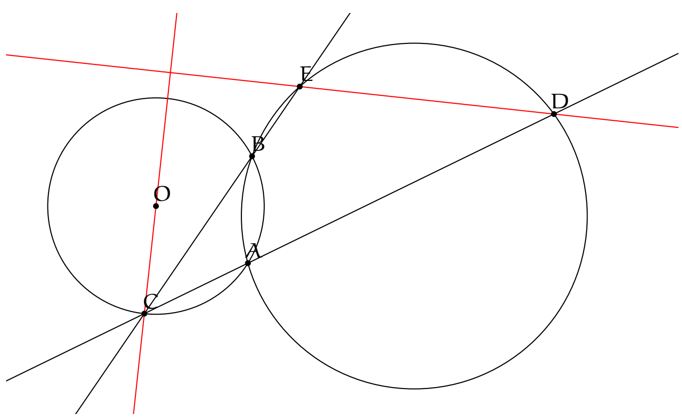
Préparation Olympique Française de Mathématiques 2017-2018

Corrigé de l'envoi 2

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles se coupant en A et B distincts. Notons O le centre de Γ_1. Soit C un point de Γ_1, soit D, E les intersections respectives de (AC) et de (BC) avec Γ_2.
Montrer que (OC) et (DE) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 1



On procède par chasse aux angles.
On présente ici une solution qui se veut très (trop) rigoureuse, il n'y avait pas besoin d'être aussi pointilleux ni de traiter tous ces cas pour recevoir la note maximale à cet exercice.

Comme on remarque que la figure change beaucoup selon que le point C est du même côté de la droite (AB) que O ou non, on a le choix entre distinguer des cas dans notre chasse aux angles en faisant attention aux problèmes d'orientation ou travailler avec des angles orientés de droites. La deuxième méthode est souvent préférable, tant qu'on n'a pas à diviser des angles par deux (le problème est que, si on regarde nos angles orientés de droites modulo 180 degrés et qu'on divise par 2, on se retrouve à regarder des angles orientés de droite modulo 90 degrés, donc on perd de l'information). [1] Ici, on va panacher les deux méthodes.
On calcule modulo 180 degrés :

$$(OC, DE) = (OC, CD) + (CD, DE) = (OC, CD) + (AB, BE) = (OC, CA) + (CB, AB).$$

Or $2(OC, CA) + (OA, OC) = 0$ et $2(CB, AB) = (OC, OA)$.
Donc $2(OC, DE) = 0$ modulo 180 degrés, donc (OC, DE) est un multiple de 90 degrés (donc 0 ou 90 degrés modulo 180)donc (OC) et (DE) sont parallèles ou perpendiculaires.
Et là, on est embêtés pour exclure le cas parallèle. On peut s'en sortir par disjonction de cas :

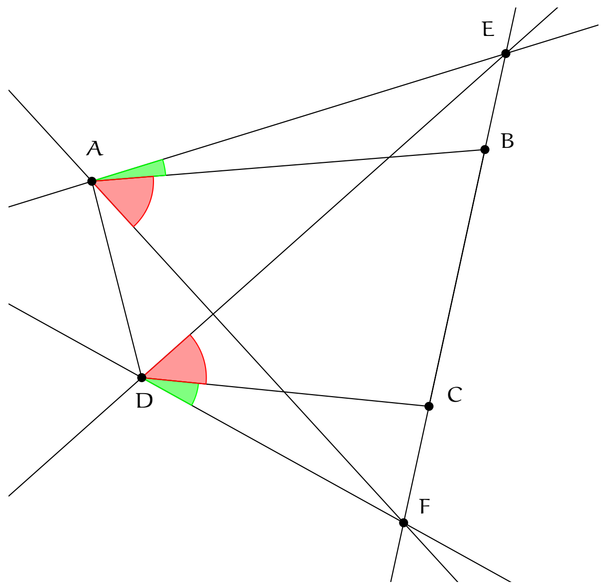
- Si A, C et le point diamétralement opposé à A sur Γ_1 sont dans cet ordre quand on lit dans le sens trigonométrique (anti-horaire) sur le cercle Γ_1, alors $(OC, CA) = \widehat{OCA}$
- Sinon, $(OC, CA) = 180^\circ - \widehat{OCA}$
- Si A, B, C se lisent dans cet ordre sur le cercle Γ_1 dans les sens trigonométrique, alors $(CB, AB) = \widehat{CBA}$.
- Sinon, $(CB, AB) = 180^\circ - \widehat{CBA}$.
- On a dans tous les cas $\widehat{COA} = 180^\circ - 2\widehat{OCA}$.
- Mais $\widehat{COA} = 2\widehat{CBA}$ si et seulement si O et B sont du même côté de la droite (AC).
- En revanche, si O et B ne sont pas du même côté de la droite (AC), $\widehat{COA} = 360^\circ - 2\widehat{CBA}$.

Les angles géométriques ayant des mesures entre 0 et 180 degrés.
Si on traite tous les cas présentés ci-dessus, en combinant les égalités, on arrive à montrer que les droites (OC) et (DE) sont parallèles.

1. voir le poly de géométrie débutant pour plus de détails sur les angles orientés de droites

Exercice 2. Soit un quadrilatère $ABCD$ convexe.[2] On se donne E, F deux points tels que E, B, C, F soient alignés dans cet ordre. On suppose de plus que $\widehat{BAE} = \widehat{CDF}$ et $\widehat{EAF} = \widehat{FDE}$. Montrer que $\widehat{FAC} = \widehat{EDB}$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>



C'est encore une chasse aux angles. Comme $\widehat{FAE} = \widehat{FDE}$ et A, D sont du même côté de (EF), les points A, D, E, F sont cocycliques.
De plus, pour montrer que $\widehat{FAC} = \widehat{EDB}$, il suffit de montrer que $\widehat{CAB} = \widehat{FAB} - \widehat{FAC}$ est égal à $\widehat{CDB} = \widehat{CDE} - \widehat{EDB}$, autrement dit que A, B, C, D sont cocycliques.
Montrons pour cela que $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180^\circ$. On a :

$$\widehat{DAB} = \widehat{DAF} + \widehat{FAB} = \widehat{DEF} + \widehat{CDE} = 180^\circ - \widehat{ECD},$$

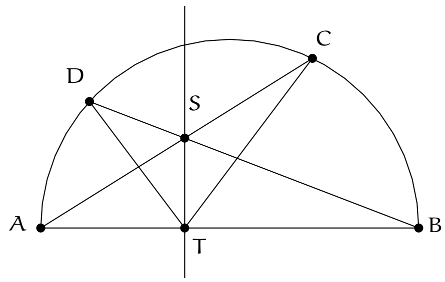
ce qui prouve la cocyclicité de A, B, C, D et donc le résultat voulu.

Exercice 3. Soit $[AB]$ le diamètre d'un demi-cercle sur lequel on prend deux points C et D. Soit S l'intersection de (AC) et (BD) et T le pied de la perpendiculaire à $[AB]$ issue de S.

2. c'est-à-dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou se coupent à l'extérieur des segments $[AB]$ et $[CD]$ et les droites (BC) et (DA) sont parallèles ou se coupent à l'extérieur des segments $[BC]$ et $[DA]$

Montrer que (ST) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CTD}$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

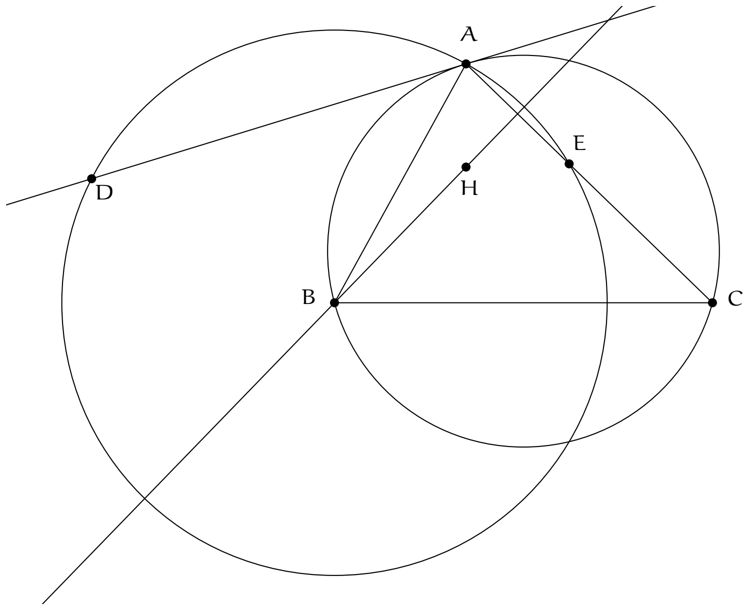


On s'en sort par chasse aux angles. Les points A, D, S, T sont cocycliques (sur le cercle de diamètre $[AS]$) et de même les points B, C, S, T. Donc $\widehat{STD} = \widehat{SAD}$, et $\widehat{STC} = \widehat{SBC}$. Comme $\widehat{SAD} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD} = \widehat{SBC}$ par cocyclicité des points A, B, C, D, on a bien $\widehat{STC} = \widehat{STD}$.
On peut aussi résoudre cet exercice avec de la géométrie projective. En effet, on remarque (ST) est la bissectrice de $\widehat{CTD}$ si et seulement si $(AB), (ST), (TD), (TC)$ sont harmoniques (grâce au lemme 2/4). Soit F l'intersection de (BD) et de (TC). Il suffit de montrer que B, S, D, F sont harmoniques, donc il suffit de montrer que $B, A, (CD) \cap (AB), T$ sont harmoniques. Or $(CD) \cap (AB)$ est par construction sur la polaire de S donc la polaire de $(CD) \cap (AB)$ passe par S. De plus, elle est perpendiculaire à (AB), donc c'est (ST). C'est pourquoi on a bien $(CD) \cap (AB)$, T, A, B harmoniques, ce qui conclut.

Exercices Communs

Exercice 4. Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$, H son orthocentre, Γ son cercle circonscrit, d la tangente à Γ en A. On considère le cercle de centre B passant par A. Il coupe d en D et (AC) en E.
Montrer que D, E, H sont alignés.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>



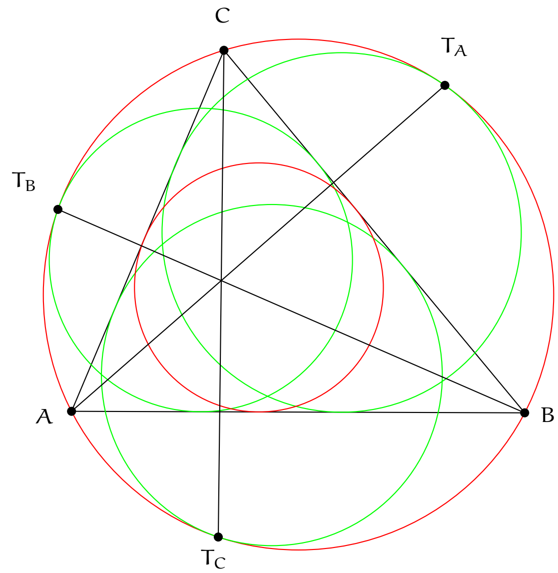
On remarque tout d'abord que la hauteur issue de B dans ABC est la médiatrice de $[AE]$. Soit en effet L son point d'intersection avec (AC). Par la puissance d'un point, $CE \cdot CA = CB^2 - AB^2 = CL^2 - AL^2 = CA \cdot (CL - AL)$ donc $LA = LE$.
Donc HAE est isocèle en H. Donc, par chasse aux angles,

$$\widehat{HEA} = \widehat{HAC} = 90^\circ - \widehat{ACB} = 90^\circ - \widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{ABD} = \widehat{DEA}.$$

Donc D, E, H sont alignés.

Exercice 5. Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit. Soit ω_A le cercle inscrit intérieurement à (AB), (AC) et à Γ. On note T_A le point de tangence de Γ avec ω_A. On définit de même T_B et T_C.
Montrer que (AT_A), (BT_B) et (CT_C) sont concourantes.

Solution de l'exercice 5

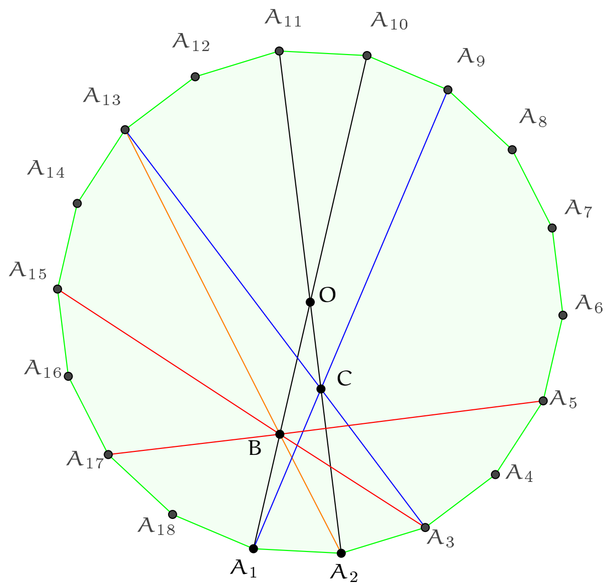


Quand on voit beaucoup de cercles tangents, on doit penser aux homothéties qui les échangent. En l'occurrence, on a trois homothéties positives, de centre respectifs T_A, T_B, T_C et qui envoient respectivement ω_A, ω_B et ω_C sur Γ.
De plus, ω_A étant tangent à (AB) et (AC), on aussi une homothétie positive de centre A qui envoie ω_A sur le cercle ω inscrit à ABC. De même pour B et C.
Or la composée de deux homothéties positives de centres O_1 et O_2 est une homothétie positive dont le centre est sur la droite (O_1O_2). On a donc construit trois homothéties positives qui envoient toutes Γ sur ω, et leurs centres respectifs appartiennent à (AT_A),(BT_B) et (CT_C).
Comme il existe au plus une homothétie positive envoyant un cercle donné sur un autre cercle, ces trois homothéties sont en fait une seule et même homothétie, de centre Z. On a donc $Z \in (AT_A)$, $Z \in (BT_B)$ et $Z \in (CT_C)$.
Les droites $(AT_A$, (BT_B) et $(CT_C$ sont donc concourantes.

Exercice 6.

Soit O le centre d'un polygone régulier à 18 côtés de sommets $A_1, \ldots, A_{18}$. Soit B le point de $[OA_1]$ tel que $\widehat{BA_2O} = 20^\circ$ et C le point de $[OA_2]$ tel que $\widehat{CA_1O} = 10^\circ$. Montrer que BCA_2A_3 sont cocycliques.

Solution de l'exercice 6

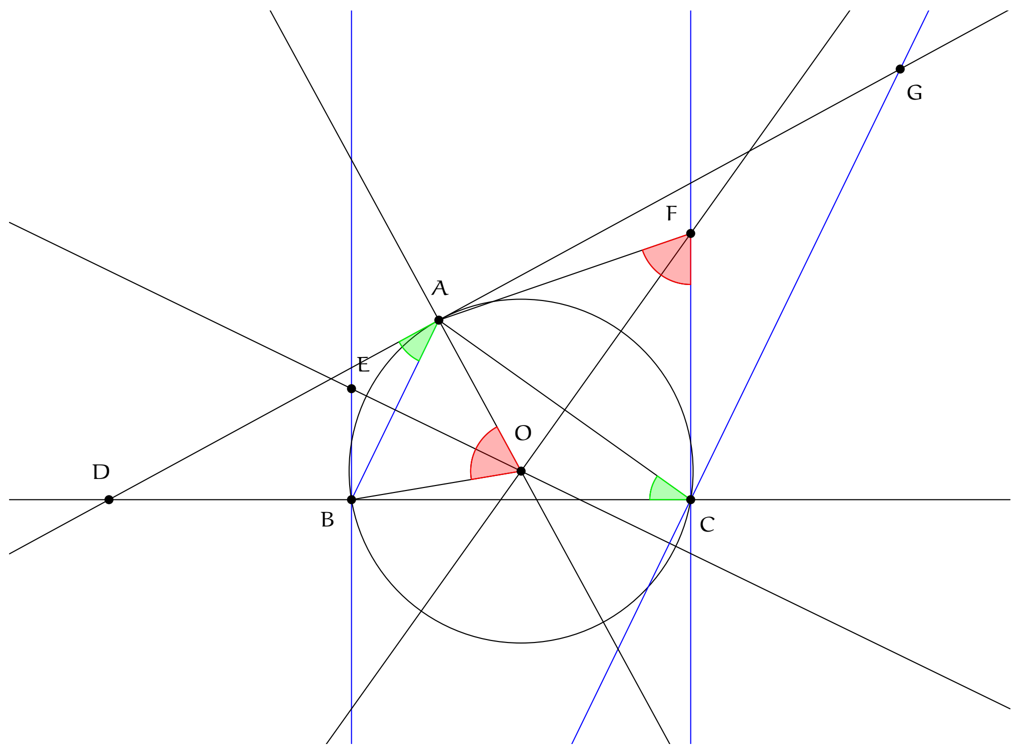


On prolonge déjà les différentes droites existantes : A_1, O, A_{10} sont alignés, A_2, 0, A_{11} aussi.
On applique ensuite le théorème de l'angle inscrit : tout angle au centre qui intercepte un segment de longueur A_1A_2 vaut $20°$, tout angle inscrit qui intercepte un tel segment vaut $10°$. Donc A_1, C, A_9 alignés, A_2, B, A_{13} alignés.
Par symétrie axiale d'axe (OA_2), il vient A_3, C, A_{13} alignés.
Si on parvient à montrer que A_3, B, A_15 alignés, alors $\widehat{CA_3B} = A_{13}\widehat{A_3}A_{15} = 20° = \widehat{CA_2B}$, ce qui établit la cocyclicité demandée dans cet exercice.
Montrons maintenant qu'on a effectivement A_3, B, A_15 alignés. Par symétrie axiale d'axe (OA_1), cela équivaut à montrer que A_{17}, B, A_5 sont alignés.
Or, on remarque que $(A_{17}A_5)$ est la médiatrice du segment $[OA_2]$: en effet, le triangle OA_2A_5 est équilatéral (comme $OA_2 = OA_5$ et $\widehat{A_2OA_5} = 60°$) donc A_5 est sur la médiatrice de $[OA_2$, de même pour A_{17}.
Comme BOA_2 est isocèle en B, B est aussi sur la médiatrice de $[OA_2]$, ce qui établit l'alignement voulu et termine la solution.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit ABC un triangle tel que $AB \neq AC$. Soit E tel que $AE = BE$ et (BE) perpendiculaire à (BC) et soit F tel que $AF = CF$ et (CF) perpendiculaire à (BC). Soit D le point de (BC) tel que (AD) soit tangente au cercle circonscrit à ABC en A.
Montrer que les points D, E, F sont colinéaires.

Solution de l'exercice 7

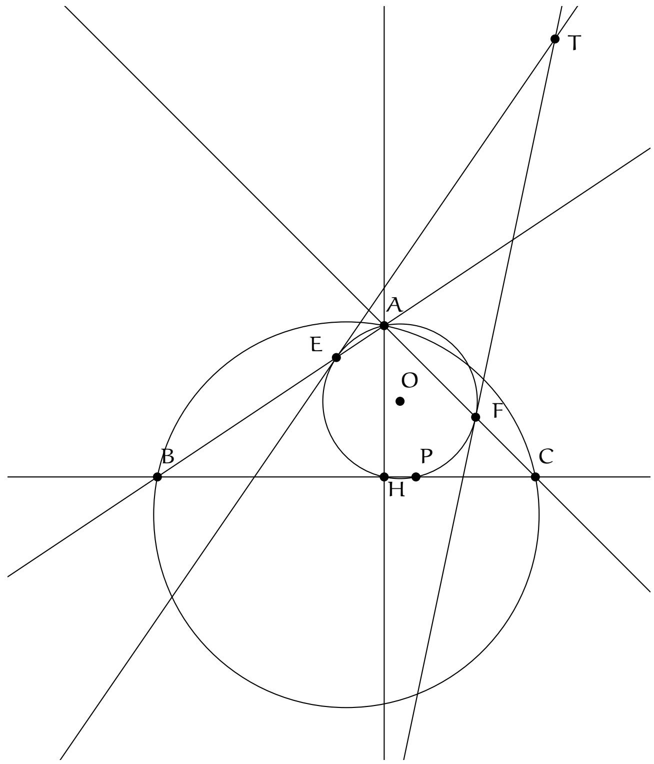


Supposons (sans restreindre la généralité) que $AB < AC$.
Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC et G le point de la droite (AD) tel que (AB) soit parallèle à (GC).
Montrons tout d'abord que les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCA}$ sont de même mesure γ, et que les angles $\widehat{BOA}$ et $\widehat{CFA}$ sont tous les deux de mesure 2γ. Le seul point qui ne découle pas immédiatement du théorème de l'angle inscrit est l'égalité $\widehat{BOA} = \widehat{CFA}$.

Or DBA et DAC sont semblables, donc il existe une similitude s de centre D qui envoie B sur A et A sur C. Comme s conserve les rapports de longueur, elle envoie la médiatrice de $[AB]$ sur la médiatrice de $[BC]$. Elle envoie aussi la perpendiculaire à (DA) passant par A (c'est-à-dire (AO), puisque (AD) est tangente en A au cercle de centre O passant par A) sur la perpendiculaire à (DC) passant par C (c'est-à-dire (CF)). Donc O est envoyé sur F. Comme s conserve les mesure d'angles géométriques (attention pour ceux qui travaillent en angles orientés, c'est une similitude indirecte !) , $\widehat{BOA} = \widehat{AFC}$.
On en déduit que F est le centre du cercle circonscrit à AGC. En particulier, F est sur la médiatrice de $[GC]$.
On considère maintenant l'homothétie h de centre D qui envoie B sur C. Comme l'image de toute droite par h est une droite parallèle, (AB) est envoyée sur (GC), et (DA) est fixée donc A est envoyé sur G. Comme h conserve les rapports de longueurs, la médiatrice de $[AB]$ est envoyée sur la médiatrice de $[GC]$. De plus, (EB) est envoyée sur (CF) grâce au parallélisme, donc E est envoyé sur F.
Donc D (en tant que centre de l'homothétie), E et F sont alignés.

Exercice 8. Soit ABC un triangle.
Pour un point P de (BC) donné, on note $E(P)$ et $F(P)$ les deuxièmes points d'intersection des droites (AB) et (AC) avec le cercle de diamètre $[AP]$. Soit $T(P)$ l'intersection des tangentes à ce cercle en $E(P)$ et $F(P)$.
Montrer que quand P varie sur (BC), le lieu géométrique de $T(P)$ est une droite.

Solution de l'exercice 8



Étape 1 : une première remarque importante.

Posons tout d'abord H le pied de la hauteur issue de A dans ABC. Soient deux points P et P' de la droite (BC). On note $E = E(P), F = F(P), T = T(P), E' = E(P'), F' = F(P'), T' = T(P')$. On introduit également O (respectivement O') le centre du cercle de diamètre $[AP]$ (respectivement $[AP']$).

Remarquons que les cercles circonscrits à EAF et à $E'AF'$ se coupent en A et H. En particulier, H est le point du Miquel du quadrilatère de côtés $(EE'), (E'F'), (F'F), (FE)$ autrement dit il existe une unique similitude directe s de centre H qui envoie E sur E' et F sur F'.

D'autre part, on a $\widehat{EOF} = 2\widehat{EHF} = 360^\circ - 2\widehat{EAF} = 360^\circ - \widehat{BAC}$, ce qui ne dépend pas de P. Donc $\widehat{EOF} = \widehat{E'O'F'}$, donc la similitude directe s envoie O sur O'.

Or, le point T est entièrement défini par la donnée de E, O, F (via des opérations de type tracer un cercle, prendre une tangente…, qui sont conservées par les similitudes). Donc s envoie aussi T sur T'.

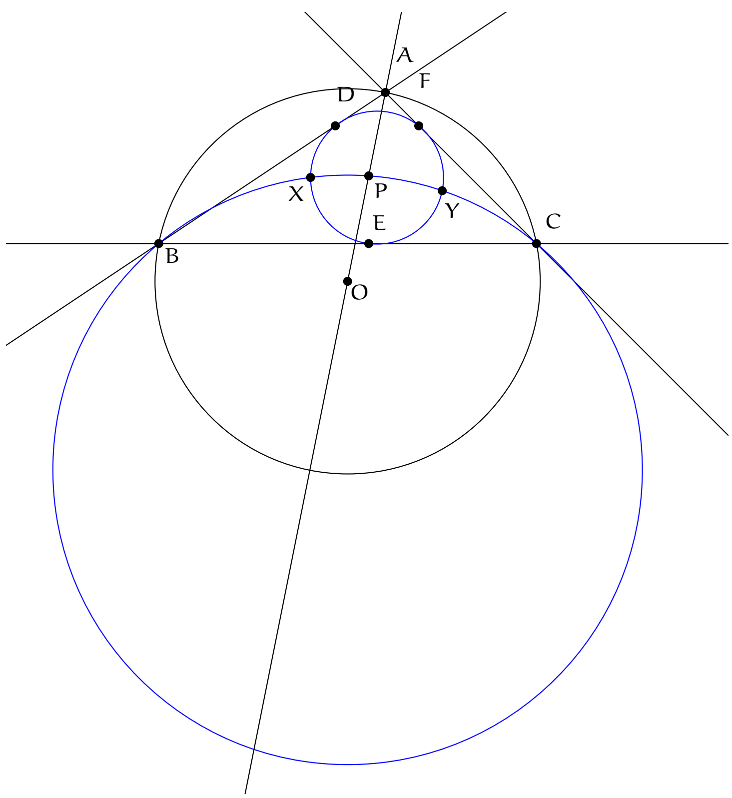
À partir de là, le plus dur est fait.

Étape 2 : un jeu technique avec les similitudes pour conclure.

Soit P_0 un point de (BC). On note σ la similitude directe de centre H qui envoie $E(P_0)$ sur $T(P_0)$. Soit P un point de (BC). On note σ_P la similitude directe (de centre H) qui envoie $E(P_0)$ sur $E(P)$. D'après ce qui précède, elle envoie aussi $T(P_0)$ sur $T(P)$.
Comme les deux similitudes on le même centre $\sigma_P \circ \sigma = \sigma \circ \sigma_P$. En particulier, $\sigma(E(P)) = \sigma \circ \sigma_P(E(P_0)) = \sigma_P(T(P_0)) = T(P)$.
Donc le lieu de $T(P)$ est l'image par σ (qui est une similitude directe) du lieu de $E(P)$ (qui est une droite). C'est donc une droite, comme voulu.

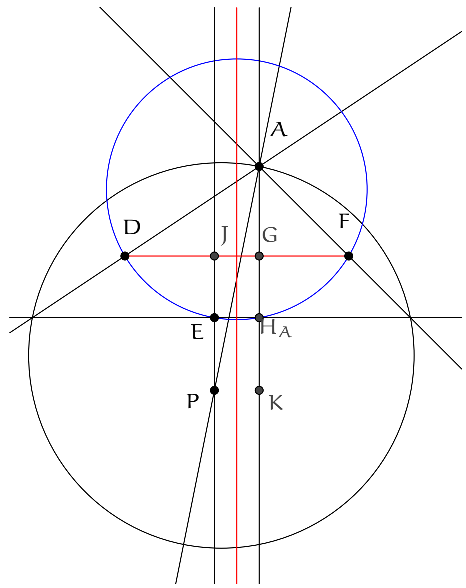
Exercice 9. Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit. Soit P un point sur (AO) et D, E, F les projections orthogonales de P sur (AB), (BC) et (CA). Soit X et Y les intersections des cercles circonscrits à DEF et à BCP.
Montrer que $\widehat{BAX} = \widehat{YAC}$

Solution de l'exercice 9



Étape 1 : Montrons que (DF) est parallèle à (BC).

Soit P_0 le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit à ABC. (P_0C) est perpendiculaire à (AC) donc parallèle à (PF) et (P_0B) est de même parallèle à (PD).
Donc, d'après le théorème de Thalès, $\frac{AD}{AB} = \frac{AP}{AP_0} = \frac{AF}{AC}$, d'où (DF) parallèle à (BC).
Étape 2 : Montrons que H_A, le pied de la hauteur issue de A appartient à (DEF).



On pose $G = (AH_AA) \cap (DF)$, J la projection orthogonale de P (celle de E aussi) sur (DF) et K la projection (orthogonale) de P sur (AH_A).
$PKGJ$ est un rectangle, et P, K, D, F sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[PA]$.
Donc $PKFD$ est un trapèze isocèle, donc (PJ) et (KG) sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[DF]$.
Comme $EJGH_A$ est un rectangle et (H_AG) et (EJ) sont symétriques par rapport à la médiatrice de (EF), D, H_A, E, F sont cocycliques.
Étape 3 : pour conclure.
L'étape 1 permet de montrer qu'il existe une involution de centre A qui échange B et F d'une part, C et D d'autre part.Pour conclure, il suffit de montrer que cette involution échange X et Y, c'est-à-dire qu'elle envoie le cercle circonscrit à BCP sur le cercle circonscrit à DEF.
La seule difficulté est de montrer que le point sur lequel l'involution envoie P appartient au cercle circonscrit à DEF.

Or P est un point du cercle circonscrit à ADF tel que (AP) et le cercle circonscrit à ADF sont perpendiculaires en P. Donc son image I est un point de la droite (BC) tels que (BC) et (AI) sont perpendiculaires en I. Donc $I = H_A$, et l'étape 2 permet de conclure.