PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 29 NOVEMBRE 2017
DURÉE : 4 HEURES (14H-18H)

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le probléme.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Régles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Préparation Olympique Française de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Exercice 1. Trouver tous les quadruplets (p, q, r, n) d'entiers strictement positifs vérifiant les trois conditions suivantes :

- ▷ p et q sont premiers,
- ▷ $p + q$ n'est pas divisible par 3,
- ▷ $p + q = r(p - q)^n$.

Exercice 2. Soient deux cercles ω_1, ω_2 tangents l'un à l'autre en un point T, tels que ω_1 soit à l'intérieur de ω_2. Soient M et N deux points distincts sur ω_1, différents de T. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes du cercle ω_2 passant respectivement par M et N. On suppose que les segments $[BD]$, $[AC]$, et $[MN]$ s'intersectent en un point K.

Montrer que (TK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MTN}$.

Exercice 3. Dans les cases d'un tableau rectangulaire à n lignes et m colonnes sont écrits des nombres réels. On suppose que pour toute ligne ou colonne, la somme des nombres écrits sur cette ligne ou colonne est un entier. Montrer qu'il est possible de remplacer chaque réel x par l'entier $\lfloor x \rfloor$ ou $\lceil x \rceil$ de sorte que les sommes de chaque colonne et de chaque ligne demeurent inchangées.

Remarque : On rappelle que si x est un nombre réel, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, et $\lceil x \rceil$ est l'unique entier tel que $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$.