PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 29 NOVEMBRE 2017
DURÉE : 4 HEURES (14H-18H)

Exercice 1. Trouver tous les quadruplets (p, q, r, n) d'entiers strictement positifs vérifiant les trois conditions suivantes :

— p et q sont premiers,
— $p + q$ n'est pas divisible par 3,
— $p + q = r(p - q)^n$.

Solution de l'exercice 1 On suppose d'abord que $p \neq 3$ et $q \neq 3$, et on considère p et q modulo 3. Puisque $p + q \not\equiv 0$ [3], on n'a pas $p \equiv 1$ [3] et $q \equiv 2$ [3], ni $p \equiv 2$ [3] et $q \equiv 1$ [3]. On est donc assuré que $p \equiv q \equiv 1$ [3] ou bien que $p \equiv q \equiv 2$ [3]. Dans ces deux cas, 3 divise $p - q$ et donc divise $p + q = r(p - q)^n$ puisque $n \geqslant 1$. Ceci est absurde et invalide donc notre supposition, ce qui montre que $p = 3$ ou $q = 3$.
D'autre part, puisque $n \geqslant 0$, on sait que $p - q$ divise $p + q$, donc $p \neq q$, de sorte que p et q sont premiers entre eux. Puisque $p - q$ divise $(p + q) + (p - q) = 2p$ et $(p + q) - (p - q) = 2q$, on sait donc que $p - q$ divise $\mathrm{PGCD}(2p, 2q) = 2\mathrm{PGCD}(p, q) = 2$. Il s'ensuit que $p - q \in \{-2, -1, 1, 2\}$. On en déduit donc que $(p, q) \in \{(2, 3), (3, 2), (3, 5), (5, 3)\}$; on traite ces quatre cas un à un :
— si $(p, q) = (2, 3)$, l'équation devient $5 = (-1)^n r$; ses solutions sont $r = 5$ et $n \in 2\mathbb{N}^*$;
— si $(p, q) = (3, 2)$, l'équation devient $5 = 1^n r$; ses solutions sont $r = 5$ et $n \in \mathbb{N}^*$;
— si $(p, q) = (3, 5)$, l'équation devient $8 = (-2)^n r$; ses solutions sont $(r, n) = (2, 2)$;
— si $(p, q) = (5, 3)$, l'équation devient $8 = 2^n r$; ses solutions sont $(r, n) = (1, 3)$, $(2, 2)$ et $(4, 1)$.
En conclusion, les solutions sont : $(2, 3, 5, 2n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(3, 2, 5, n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(3, 5, 2, 2)$, $(5, 3, 1, 3)$, $(5, 3, 2, 2)$ et $(5, 3, 4, 1)$.

Exercice 2. Soient deux cercles ω_1, ω_2 tangents l'un à l'autre en un point T, tels que ω_1 soit à l'intérieur de ω_2. Soient M et N deux points distincts sur ω_1, différents de T. Soient [AB] et [CD] deux cordes du cercle ω_2 passant respectivement par M et N. On suppose que les segments [BD], [AC], et [MN] s'intersectent en un point K.
Montrer que (TK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MTN}$.

Solution de l'exercice 2 Soit E et F les points d'intersection respectifs de (TM) et (TN) avec ω_2, autres que T. Puisque ω_1 et ω_2 sont tangents en T, l'homothétie de centre T et qui envoie ω_1 sur ω_2 envoie également M sur E et N sur F. On en déduit que

$$\frac{TM}{TN} = \frac{ME}{NF}.$$

En outre, la puissance des points M et N par rapport à ω_2 vaut respectivement $AM \cdot MB = TM \cdot ME$ et $CN \cdot ND = TN \cdot NF$. Cela montre que

$$\frac{TM^2}{TN^2} = \frac{TM \cdot ME}{TN \cdot NF} = \frac{AM \cdot MB}{CN \cdot ND}.$$

D'autre part, dans les triangles AMK et DNK, la loi des sinus indique que

$$AM \cdot \sin(\widehat{MAK}) = MK \cdot \sin(\widehat{AKM}) \text{ et que } DN \cdot \sin(\widehat{NDK}) = NK \cdot \sin(\widehat{DKN}).$$

Puisque A, B, C et D sont cocycliques, on a également $\sin(\widehat{BAC}) = \sin(\widehat{BDC})$, de sorte que

$$\sin(\widehat{MAK}) = \sin(\widehat{BAC}) = \sin(\widehat{BDC}) = \sin(\widehat{KDN}).$$

Il s'ensuit que $\dfrac{AM}{DN} = \dfrac{MK \cdot \sin(\widehat{AKM})}{NK \cdot \sin(\widehat{DKN})}$ et, de même, que $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{MK \cdot \sin(\widehat{BKM})}{NK \cdot \sin(\widehat{CKN})}$. Puisque les angles $\widehat{BKM}$ et $\widehat{DKN}$ d'une part, et $\widehat{AKM}$ et $\widehat{CKM}$ d'autre part, sont opposés par le sommet, donc sont égaux deux à deux, on en déduit que

$$\frac{AM \cdot MB}{DN \cdot NC} = \frac{MK^2}{NK^2}.$$

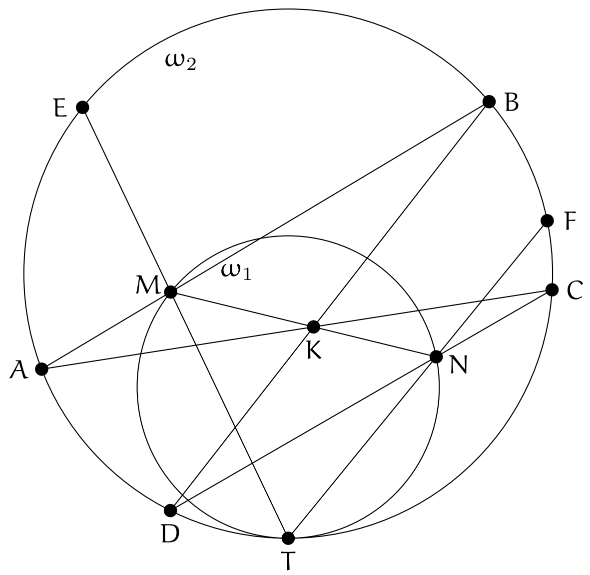
On en conclut que $TM \cdot NK = TN \cdot MK$.
La loi des sinus dans les triangles TKM et TKN indique en outre que

$$TM \cdot \sin(\widehat{KTM}) = KM \cdot \sin(\widehat{MKT}) \text{ et que } TN \cdot \sin(\widehat{KTN}) = KN \cdot \sin(\widehat{NKT}).$$

Puisque $\widehat{MKT}$ et $\widehat{NKT}$ sont supplémentaires, ils ont même sinus, de sorte que

$$\frac{\sin(\widehat{KTM})}{\sin(\widehat{KTN})} = \frac{KM \cdot \sin(\widehat{MKT}) \cdot TN}{TM \cdot KN \cdot \sin(\widehat{NKT})} = 1,$$

ce qui prouve que (TK) est la bissectrice de $\widehat{MTN}$.



Exercice 3. Dans les cases d'un tableau rectangulaire à n lignes et m colonnes sont écrits des nombres réels. On suppose que pour toute ligne ou colonne, la somme des nombres écrits sur cette ligne ou colonne est un entier. Montrer qu'il est possible de remplacer chaque réel x par l'entier $\lfloor x \rfloor$ ou $\lceil x \rceil$ de sorte que les sommes de chaque colonne et de chaque ligne demeurent inchangées.
Remarque : On rappelle que si x est un nombre réel, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, et $\lceil x \rceil$ est l'unique entier tel que $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$.

Solution de l'exercice 3 Quitte à soustraire sa partie entière à chaque entrée du tableau, on peut supposer que chaque nombre est compris entre 0 et 1. On dit qu'une case est « fractionnaire » si son nombre n'est pas entier. Remarquons que, si C est une case fractionnaire, alors il existe nécessairement une autre case fractionnaire sur la même ligne que C, et il existe aussi une autre case fractionnaire sur la même colonne que C.
Choisissons donc une case C_0 fractionnaire, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
— si n est pair, on choisit une case C_{n+1} fractionnaire sur la même ligne que C_n ;
— si n est impair, on choisit une case C_{n+1} fractionnaire sur la même colonne que C_n.
Par principe des tiroirs, il existe deux entiers $k < \ell$ tels que $C_k = C_\ell$. Sans perte de généralité, on suppose que ℓ est aussi petit que possible, parmi tous les choix de cases $C_0, C_1, \ldots$ et d'entiers $k < \ell$ que l'on aura pu faire.
On a donc $k = 0$, et l'on dispose ainsi d'un « cycle » $C_0, \ldots, C_{\ell-1}, C_\ell$ de cases fractionnaires deux à deux distinctes (sauf C_0 et C_ℓ) et telles que les segments $[C_i, C_{i+1}]$ sont alternativement horizontaux et verticaux. Ce cycle étant de longueur ℓ minimale, on sait que chaque ligne et chaque colonne contient soit 0, soit 2 cases du cycle, et que ces cases sont consécutives dans le cycle.
Pour tout $i < \ell - 1$, on note x_i le nombre écrit sur la case C_i, et l'on pose $y_i = x_i$ si i est pair, et $y_i = 1 - x_i$ si i est impair. Puis l'on remplace x_i par le réel

$$x'_i = x_i + (-1)^i \varepsilon,$$

où $\varepsilon = \min\{y_i \mid i < \ell\}$. Par construction de ε, on a donc $0 \leqslant x'_i \leqslant 1$ pour tout $i < \ell$, avec $x'_i = 0$ ou $x'_i = 1$ pour au moins un entier i.
Ce procédé n'a modifié la somme d'aucune ligne ni colonne, et a permis de réduire le nombre de cases fractionnaires, tout en affectant à chaque case modifiée une valeur x'_i telle que

$$\{\lfloor x'_i \rfloor, \lceil x'_i \rceil\} \subseteq \{0, 1\} = \{\lfloor x_i \rfloor, \lceil x_i \rceil\}.$$

On peut donc réitérer ce procédé jusqu'à éliminer toutes les cases fractionnaires, ce qui conclut le problème.