PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI D'ALGÈBRE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 15 JANVIER

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2003 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés "Groupe B" ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés "Communs" sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés "Groupe A" ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques, 11-13 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris.
olymp@animath.fr

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geqslant \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

Attention, il y a bien un "moins" dans le membre de droite !

Exercice 2.

1. Soient a, b et c trois nombres réels tels que

$$|a| \geqslant |a+b|, |b| \geqslant |b+c| \text{ et } |c| \geqslant |c+a|.$$

   Montrer que $a = b = c = 0$.

2. Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que

$$|a| \geqslant |a+b|, |b| \geqslant |b+c|, |c| \geqslant |c+d| \text{ et } |d| \geqslant |d+a|.$$

   A-t-on forcément $a = b = c = d = 0$?

Exercice 3. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x et y, on ait

$$f(xf(y)) + x = f(x)f(y+1).$$

Exercices Communs

Exercice 4. Soient $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite croissante d'entiers strictement positifs et k un entier strictement positif. Supposons que pour un certain $r \geqslant 1$, on a $\frac{r}{a_r} = k+1$. Montrer qu'il existe un entier $s \geqslant 1$ tel que $\frac{s}{a_s} = k$.

Exercice 5. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$,

$$f(x+y)^2 - f(2x^2) = f(y+x)f(y-x) + 2xf(y).$$

Exercice 6. Soient $a, b, c > 0$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leqslant 4$. Montrer que

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geqslant 3.$$

Exercices du groupe A

Exercice 7. Trouver tous les polynômes à coefficients réels P tels que le polynôme

$$(X+1)P(X-1)-(X-1)P(X)$$

soit constant.

Exercice 8. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels quelconques. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i+x_j| \geqslant n\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

Exercice 9. Soit $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous $x, y > 0$, on ait

$$f\left(\frac{f(x)}{yf(x)+1}\right)=\frac{x}{xf(y)+1}.$$