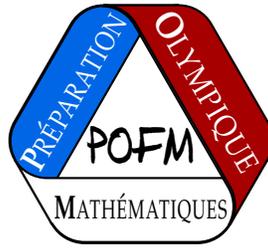


# PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



ENVOI D'ALGÈBRE  
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 15 JANVIER

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2003 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés "Groupe B" ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés "Communs" sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés "Groupe A" ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques, 11-13 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris.

[olymp@animath.fr](mailto:olymp@animath.fr)

## Exercices du groupe B

*Exercice 1.* Soient  $a, b, c$  des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

Attention, il y a bien un "moins" dans le membre de droite !

*Exercice 2.*

1. Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres réels tels que

$$|a| \geq |a + b|, |b| \geq |b + c| \text{ et } |c| \geq |c + a|.$$

Montrer que  $a = b = c = 0$ .

2. Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre nombres réels tels que

$$|a| \geq |a + b|, |b| \geq |b + c|, |c| \geq |c + d| \text{ et } |d| \geq |d + a|.$$

A-t-on forcément  $a = b = c = d = 0$  ?

*Exercice 3.* Trouver toutes les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que, pour tous réels  $x$  et  $y$ , on ait

$$f(xf(y)) + x = f(x)f(y + 1).$$

## Exercices Communs

*Exercice 4.* Soient  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite croissante d'entiers strictement positifs et  $k$  un entier strictement positif. Supposons que pour un certain  $r \geq 1$ , on a  $\frac{r}{a_r} = k + 1$ . Montrer qu'il existe un entier  $s \geq 1$  tel que  $\frac{s}{a_s} = k$ .

*Exercice 5.* Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que pour tous  $x, y$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$f(x + y)^2 - f(2x^2) = f(y + x)f(y - x) + 2xf(y).$$

*Exercice 6.* Soient  $a, b, c > 0$  tels que  $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$ . Montrer que

$$\frac{ab + 1}{(a + b)^2} + \frac{bc + 1}{(b + c)^2} + \frac{ca + 1}{(c + a)^2} \geq 3.$$

## Exercices du groupe A

*Exercice 7.* Trouver tous les polynômes à coefficients réels  $P$  tels que le polynôme

$$(X + 1)P(X - 1) - (X - 1)P(X)$$

soit constant.

*Exercice 8.* Soient  $x_1, \dots, x_n$  des réels quelconques. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i + x_j| \geq n \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

*Exercice 9.* Soit  $\mathbb{R}_+^*$  l'ensemble des réels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  telles que pour tous  $x, y > 0$ , on ait

$$f\left(\frac{f(x)}{yf(x) + 1}\right) = \frac{x}{xf(y) + 1}.$$