Corrigé de l'envoi 1 : Arithmétique

November 16, 2017

Exercices Groupe B

Exercice 1 Une cellule peut se diviser en 42 ou en 44 petites cellules. Combien de divisions faut-il pour obtenir, à partir d'une cellule, exactement 2017 cellules ?

Solution Une division augmente de 41 ou 43 le nombre de cellules. Soit a le nombre de divisions en 42 cellules, et b le nombre de divisions en 44 cellules. On veut trouver $a+b$, sachant que

$$2017 = 1 + 41a + 43b = 1 + 41(a+b) + 2b = 1 + 43(a+b) - 2b.$$

On voit que $41(a+b) \leq 2016$, donc $a+b < 50$.
De même, $43(a+b) \geq 2016$, donc $a+b > 46$.
Or $2017 = 1 + 41 \times 49 + 7 = 1 + 41 \times 48 + 48 = 1 + 41 \times 47 + 89$. Comme $2b$ est pair, la seule solution est $a+b = 48$ (avec $2b = 48$ donc $a = b = 24$).

Exercice 2 On a n lampes, chacune avec un interrupteur. Chaque lampe fonctionne normalement, appuyer sur son interrupteur l'éteint si elle est allumée, et l'allume si elle est éteinte. Toutes les minutes on touche aux interrupteurs.

À la première minute : on appuie sur tous les interrupteurs $(1, 2, 3, ..., n)$.

À la deuxième minute : on appuie sur tous les interrupteurs dont la lampe a un numéro pair $(2, 4, 6, ...)$.

À la troisième minute : on appuie sur tous les interrupteurs dont la lampe a un numéro divisible par 3 $(3, 6, 9, ...)$.

Et ainsi de suite, à la k-ième minute, on appuie sur les interrupteurs avec un numéro divisible par k.

Quelles sont les lampes qui sont allumées après n minutes sachant qu'au début toutes les lampes sont éteintes ?

Solution Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ le numéro d'une des lampes. On appuie sur l'interrupteur i à la k-ième minute si et seulement si k est un diviseur de i, donc on a appuyé $d(i)$ fois sur l'interrupteur i, avec $d(i)$ le nombre de diviseurs de i. Décomposons i en facteurs premiers : $i = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$, avec $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des entiers. Les diviseurs de i sont les entiers de la forme $p_1^{\beta_1} \times \cdots \times p_r^{\beta_r}$, avec $\beta_1 \in \{0, 1, \ldots, \alpha_1\}, \ldots, \beta_r \in \{0, 1, \ldots, \alpha_r\}$, il y en a donc $d(i) = (\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_r + 1)$ (nombres de choix de $\beta_1, \ldots, \beta_r$).

Pour que la lampe i soit allumée à la fin, il faut et il suffit qu'on ait appuyé un nombre impair de fois sur l'interrupteur, donc que $d(i)$ soit impair, donc que tous les $\alpha_j, j \in \{1, \ldots, r\}$, soient pairs, c'est-à-dire que i soit un carré parfait.

Ainsi, les lampes allumées après n minutes sont celles dont le numéro est un carré parfait.

Exercice 3 On considère 5 nombres entiers positifs. En les ajoutant deux à deux de toutes les façons possibles, on génère 10 entiers. Montrer que ces 10 entiers ne peuvent pas être 10 entiers consécutifs.

Solution On suppose que les 10 entiers sont consécutifs, et on note n le plus petit. Leur somme est $n + (n+1) + \cdots + (n+9) = 10n + 45$. Mais c'est aussi la somme des 5 nombres de départ, comptés 4 fois chacun, donc c'est un multiple de 4. C'est impossible car pour tout entier n, $10n + 45$ est impair. On aboutit à une contradiction, donc les 10 entiers ne peuvent pas être consécutifs.

Exercices Communs

Exercice 1 Dans la région reculée de Torturie, le vizir dispose en cercle n condamnés, numérotés dans l'ordre entre 1 et n. Implacablement, il envoie au bourreau un condamné sur deux : les condamnés 2, 4,... et ainsi de suite en tournant autour du cercle, en sautant une personne entre deux supplices, jusqu'au moment où il n'en reste plus qu'un. Calculer en fonction de n le numéro du dernier condamné restant.

Solution On note $f(n)$ le numéro du survivant. Traitons d'abord le cas où n est une puissance de 2. Montrons par récurrence que dans ce cas, $f(n) = 1$. Si $n = 1$, c'est bien le cas. Si $n = 2^a$, avec $a \geq 1$, le vizir élimine d'abord tous les numéros pairs. Il reste alors $\frac{n}{2} = 2^{a-1}$ condamnés, et le prochain à être envoyé au bourreau est le numéro 3, qui est la deuxième personne restante. Par hypothèse de récurrence, le survivant sera la première personne restante, c'est-à-dire le numéro 1. Ainsi $f(2^a) = 1$ pour tout entier a.

Traitons maintenant le cas général. On écrit $n = 2^a + b$, où a et b sont des entiers tels que $0 \leq b < 2^a$. Le vizir envoie d'abord au bourreau les numéros $2, 4, \ldots, 2b$. Il reste alors 2^a condamnés. D'après le cas précédent, le survivant est celui situé juste avant la prochaine victime, à savoir le numéro $2b + 1$, car $2b + 1 \leq n$. Ainsi $f(2^a + b) = 2b + 1$.

Exercice 2 Trouver tous les entiers m, n ≥ 0 tels que $n^3 - 3n^2 + n + 2 = 5^m$.

Solution On peut factoriser $n^3 - 3n^2 + n + 2 = (n-2)(n^2 - n - 1)$. Pour que l'équation soit vraie, il faut que les deux facteurs soient, au signe près, des puissances de 5.

Si $n-2$ est négatif, comme n est positif, pour que $-(n-2)$ soit une puissance de 5, il faut prendre $n=1$, et dans ce cas $n^3-3n^2+n+2=1$, donc $m=0$, $n=1$ est solution.

Sinon, $(n^2-n-1)-(n-2) = n^2-2n+1 = (n-1)^2 > 0$, donc n^2-n-1 est une puissance de 5 plus grande que $n-2$, donc $n-2$ divise $n^2-n-1=(n-2)(n+1)+1$, donc $n-2$ divise 1, donc $n=3$, et dans ce cas $n^3-3n^2+n+2=5$, donc $m=1$, $n=3$ est solution.

Ainsi les seules solutions sont $m=0$, $n=1$ et $m=1$, $n=3$.

Exercice 3 Montrer que $n! = 1\times 2\times\cdots\times n$ est divisible par 2^{n-1} si et seulement si n est une puissance de 2.

Solution On définit, pour tout nombre premier p, la valuation p-adique d'un entier n comme le plus grand entier, noté $v_p(n)$, tel que $p^{v_p(n)}$ divise n. La valuation p-adique d'un produit d'entiers est la somme de leurs valuations p-adiques. Pour x un nombre réel, on note $\lfloor x\rfloor$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur à x.

On observe que $\{1,\ldots,n\}$ contient $\lfloor \frac{n}{p}\rfloor$ multiples de p, $\lfloor \frac{n}{p^2}\rfloor$ multiples de p^2, etc. On en déduit la formule de Legendre :

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2}\right\rfloor + \ldots$$

Pour cet exercice, on prend $p=2$, et on définit k l'entier tel que $2^k \le n < 2^{k+1}$. Alors

$$v_2(n!) = \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{2^k}\right\rfloor \le \frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\cdots+\frac{n}{2^k} = n\Big(1-\frac{1}{2^k}\Big) \le n-1.$$

Pour que $n!$ soit divisible par 2^{n-1}, c'est-à-dire pour que $v_2(n!) \ge n-1$, il faut être dans les cas d'égalité. En particulier, il faut que $n(1-\frac{1}{2^k}) = n-1$, donc que $n=2^k$.

Réciproquement, si $n=2^k$, alors on est dans les cas d'égalité, donc 2^{n-1} divise $n!$.

Exercices Groupe A

Exercice 1 Trouver les couples d'entiers $(x,y)\in\mathbb{Z}$ solutions de l'équation $y^2 = x^5-4$.

Solution Par le petit théorème de Fermat, pour tout entier x premier avec 11, $x^{10}\equiv 1[11]$. Donc 11 divise $x^{10}-1=(x^5-1)(x^5+1)$. Par le lemme de Gauss, 11 divise x^5-1 ou x^5+1. Donc pour tout entier x, $x^5-4\equiv -5[11]$ ou $x^5-4\equiv -3[11]$ ou, dans le cas où 11 divise x, $x^5-4\equiv -4[11]$.

Pour le terme de gauche, on calcule les résidus quadratiques modulo 11: $0^2\equiv 0\,[11]$, $1^2=(-1)^2\equiv 1\,[11]$, $2^2=(-2)^2\equiv 4\,[11]$, $3^2=(-3)^2\equiv -2[11]$, $4^2=(-4)^2\equiv 5\,[11]$, et $5^2=(-5)^2\equiv 3\,[11]$.

Ainsi $y^2\not\equiv x^5-4[11]$, donc l'équation n'a pas de solution.

Exercice 2 Existe-t-il un sous-ensemble infini A de $\mathbb{N}$ qui vérifie la propriété suivante : toute somme finie d'éléments distincts de A n'est jamais une puissance d'un entier (c'est-à-dire un entier de la forme a^b avec a et b entiers supérieurs ou égaux à 2) ?

Solution On cherche à construire un tel ensemble $A = \{a_0, a_1, \dots\}$, avec $(a_0, a_1, \dots)$ une suite croissante d'entiers. On choisit comme premier élément $a_0 = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on a déjà trouvé $a_0 < \cdots < a_n$ tels que l'ensemble B des somme d'éléments distincts ne contienne pas de puissance d'un entier. On veut choisir $a_{n+1} > a_n$ tel que l'ensemble des sommes d'éléments distincts de $\{a_0, \dots a_{n+1}\}$ ne contienne pas de puissance d'un entier. Il suffit qu'aucun des $a_{n+1} + b$, avec $b \in B$, ne soit une puissance d'un entier.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Majorons la proportion $p(N)$ de puissances d'entiers dans $\{a_n + 1, \dots, N\}$. Il y a moins de $\sqrt{N}$ carrés, moins de $\sqrt[3]{N}$ cubes, et ainsi de suites jusqu'aux racines k-ièmes, avec $k = \lfloor \log_2(N) \rfloor$. On peut s'arrêter à k car pour tout $b > k$, $2^b > N$ donc il n'y a pas de puissance b-ième dans $\{a_n + 1, \dots, N\}$. Donc

$$p(N) \leq \frac{\sqrt{N} + \sqrt[3]{N} + \cdots + \sqrt[k]{N}}{N - a_n} \leq \frac{\sqrt{N}\,\log_2(N)}{N - a_n} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, pour N assez grand, on peut trouver $1 + \max B$ nombres consécutifs dans $\{a_n + 1, \dots, N\}$ qui ne sont pas des puissances d'entiers. On choisit pour a_{n+1} le plus petit d'entre eux. Alors aucun des $a_{n+1} + b$, avec $b \in B$, n'est une puissance d'un entier.

Finalement, on a bien construit un ensemble A satisfaisant la propriété demandée.

Exercices 3 On note $P(n)$ le plus grand diviseur premier de n. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $P(n-1) < P(n) < P(n+1)$.

Solution Soit p un nombre premier impair. On cherche un entier n de la forme p^{2^k}, avec k entier, tel que $P(n-1) < P(n) < P(n+1)$.

Soit $k > l \geq 0$, on a

$$\frac{p^{2^k} + 1}{2} = \frac{p^{2^l} + 1}{2} \left(p^{2^k - 2^l} - p^{2^k - 2\cdot 2^l} + \cdots - p^{2\cdot 2^l} + p^{2^l} - 1\right) + 1.$$

Donc les $\frac{p^{2^k}+1}{2}$, $k \in \mathbb{N}$, sont deux à deux premiers entre eux. Cela implique que les $P(\frac{p^{2^k}+1}{2}) = P(p^{2^k} + 1)$ sont des entiers distincts. En particulier, on peut trouver k tel que $P(p^{2^k} + 1) \geq p = P(p^{2^k})$. Soit k_p le plus petit $k \geq 0$ vérifiant cette propriété. On choisit $n = p^{2^{k_p}}$. On voit que $P(n+1) \geq P(n)$, or n et $n+1$ sont premiers entre eux, donc $P(n+1) > P(n)$. Il reste à montrer que $P(n-1) < P(n)$. On écrit

$$n - 1 = p^{2^{k_p}} - 1 = \left(p^{2^{k_p - 1}} + 1\right)\left(p^{2^{k_p - 2}} + 1\right) \dots \left(p^2 + 1\right)(p+1)(p-1),$$

donc

$$P(n-1) = \max\left(P\left(p^{2^{k_p-1}}+1\right),\dots,P(p+1),P(p-1)\right) < p = P(n)$$

par minimalité de k_p et parce que $P(p-1) \leq p-1 < p$.

Finalement, pour tout nombre premier impair p, on peut trouver n une puissance de p telle que $P(n-1) < P(n) < P(n+1)$. Comme il y a une infinité de nombres premiers impairs, et comme les puissances de nombres premiers distincts sont distinctes, il existe une infinité de tels entiers n.