STAGE OLYMPIQUE DE VALBONNE 2017

du 16 au 26 août 2017

Avant-propos

Le stage olympique de Valbonne 2017 a été organisé par l'association Animath.

Son objet a été de rassembler 80 collégien·ne·s et lycéen·ne·s
de quatrième à première, de 12 à 17 ans, passioné·e·s de mathématiques
et sélectionné·e·s parmi les 642 candidat·e·s à la COUPE ANIMATH,
dont certain·e·s représenteront la France aux compétitions internationales :
Olympiades Internationales de Mathématiques (IMO),
Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques (JBMO),
Olympiades Européennes de Filles de Mathématiques (EGMO),
Romanian Masters of Mathematics (RMM),
Mediterranean Youth Mathematical Championship (MYMC).
Deux membres de l'équipe de France 2017 des Olympiades Internationales
de Mathématiques sont présents à ce stage,
et un certain nombre d'autres animateurs·trices et stagiaires
ont déjà participé à l'une des compétitions ci-dessus.

Nous tenons à remercier le Centre International de Valbonne
pour son excellent accueil.

Table des matières

I. Déroulement du stage

Comme en 1999, 2006 et 2015, c'est la quatrième fois que nous sommes accueillis par le Centre International de Valbonne, pendant dix jours (du 16 août vers 16 h au 26 août vers midi), avec un effectif final, compte tenu de deux désistements de dernière minute, de 80 stagiaires et 20 animateurs. Le financement Cap' Maths ayant pris fin l'an passé, ce sont nos autres partenaires qui nous ont permis d'équilibrer notre budget, la DGESCO bien sûr, ainsi que plusieurs autres sponsors : Crédit Mutuel Enseignant, Casio, Fondation Société Générale, Fondation Blaise Pascal, FMJH, Polytechnique, CNRS, INRIA...

Parmi les 642 candidats à la Coupe Animath (9% de plus que l'an passé), 399 ont franchi le cap des éliminatoires en ligne et ont donc composé le 6 juin dans leurs établissements scolaires respectifs. Sur la base des résultats de cette Coupe Animath, nous devions accueillir 80 stagiaires dont 40 de fin de première, 20 de seconde, 12 de troisième et 8 de quatrième ; compte tenu des désistements un peu plus nombreux que prévu, nous en avons finalement 40 de première, 21 de seconde, 10 de troisième 8 de quatrième et 1 de cinquième. Ces élèves sont âgés de 12 à 17 ans (âge moyen 16 ans). Conformément à nos souhaits, et en prévision des Olympiades Européennes de Filles, la proportion de filles s'accroît sensiblement : 23 filles, soit près de 29%, proportion comparable aux stages juniors de Toussaint 2015 et 2016, mais deux fois plus élevée qu'aux stages d'été 2015 et 2016. Par ailleurs, en prévision des Olympiades Balkaniques Junior, nous avons 14 jeunes nés en 2003 ou après (presque comme l'an passé). De même qu'en 2016, les élèves des Académies de Paris et Versailles représentent 40% des stagiaires (23 de Paris, 9 de Versailles), 13 autres Académies sont représentées (Lyon 8, Grenoble 6, Lille 4, Dijon 3, Montpellier 3, Toulouse 3, Bordeaux 2, Créteil 2, Nancy-Metz 2, Nantes 2, Orléans-Tours 2, Nice 1 et Rennes 1). 9 élèves viennent d'autres pays : Belgique (3), États-Unis (2), Allemagne, Espagne, Japon et Suisse. 20 animateurs, dont plus de la moitié ont moins de 21 ans, ont pris en main spontanément la plupart des tâches du stage, y compris le programme du stage. Les trois quarts des animateurs étaient d'anciens stagiaires.

Le stage était structuré comme ceux des années précédentes : deux périodes de quatre jours (17 - 20 août et 21 - 24 août), trois de cours / exercices, un test le matin du quatrième jour (9h à 12h, ou pour le groupe D le 24 août : 8h30 à 12h30) et une après-midi récréative, ou plusieurs activités au choix étaient proposées aux élèves. Nous avons généralisé à tous les groupes l'alternance de chapitres distincts matin et après-midi. Le vendredi 25 août, dernier jour du stage, a été consacré à des cours non sanctionnés par un test, sur des sujets plus larges que la stricte préparation olympique. C'était la journée d' "ouverture", dont le véritable programme ne fut diffusé qu'au dernier moment.

Les tests étaient corrigés le soir même. Les veilles de tests, les soirées étaient libres. La présentation du stage ainsi que la remise des coupes Animath a eu lieu le premier soir, 16 août, suivie le lendemain d'une conférence de Raphaël Ducatez sur les martingales, puis, vendredi, d'une présentation des compétitions, Olympiades Internationales et Tournoi Français des Jeunes Mathématicien·ne·s. Le 21 août, Pierre Alliez, chercheur à l'INRIA, nous a présenté la modélisation géométrique d'objets en 3D, et le lendemain, Martin Andler a étudié, à travers l'histoire, sept raisons pour lesquelles on fait des mathématiques. L'amphithéâtre des classes préparatoires où nous avions prévu cette conférence n'étant pas disponible, elle a eu lieu dans la salle de cinéma, mais sans vidéoprojecteur. Enfin le 25 août, une brève séance a clôturé le stage.

Comme l'an passé, l'horaire des repas était : petit-déjeuner à 8 h, déjeuner à 12 h 30, dîner à 19 h, les soirées commençaient soit à 20 h 30, soit à 20 h. Le bâtiment où nous étions logés (en chambres individuelles avec sanitaires à l'étage) était un véritable labyrinthe, avec de nombreuses sorties, de nombreux escaliers, ce qui ne facilitait pas la surveillance, mais les animateurs avaient été placés aux points stratégiques pour surveiller les élèves.

Le mardi 16 août, les premiers stagiaires sont arrivés le matin et certains ont déjeuné sur place, mais le groupe important de Paris, pour lequel nous avions réservé un bus de 59 places, est arrivé vers 16 h. Tout n'était pas encore prêt, le fléchage n'était pas en place et la distribution des cartes de chambres et de cantine a été un peu plus laborieuse que prévu, mais peu après 17 h le groupe D, qui s'était défini spontanément, suivait un premier cours sur les équations fonctionnelles tandis que les autres stagiaires étaient répartis dans les autres groupes de manière un peu plus improvisée que d'habitude, des ajustements restant possibles au cours du stage. Les T-shirts Animath, initialement expédiés par erreur à Paris, sont arrivés lundi matin et ont été distribués aux élèves et animateurs, ainsi que les bics Animath.

Malgré la fin du financement Cap'Maths, le budget du stage était similaire à celui du stage précédent, mais le polycopié imprimé est une nouvelle fois réduit à moins de cent pages, alors que le polycopié complet sera mis en ligne très rapidement au format pdf.

Quelques liens utiles pour poursuivre le travail réalisé pendant ce stage :

- Le site d'Animath : http://www.animath.fr
- Le site MathLinks : http://www.mathlinks.ro
- Les polycopiés de stages olympiques précédents :
  http://www.animath.fr/spip.php?article260
- Les cours de l'Olympiade Française de Mathématiques :
  http://www.animath.fr/spip.php?article255
- Le site du club en ligne Mathmosphère :
  https://animath.fun-campus.fr/

II. Coupe Animath

1 Présentation

Cette année, 642 candidats se sont inscrits à la coupe Animath. Suite à la phase éliminatoire, 399 élèves ont finalement composé lors de l'épreuve en temps limité du 6 juin. Le niveau du concours était particulièrement élevé puisqu'on comptait parmi les candidats 100 lauréats des Olympiades Nationales de Première, 86 élèves classés parmi les cinquante premiers de leur catégorie au Kangourou, sans compter les lauréats de nombreuses autres compétitions (FFJM, rallyes, OFM par exemple). Le palmarès détaillé et d'autres informations peuvent se trouver ici : http://www.animath.fr/spip.php?article2957.
80 lauréats ont été invités à participer au stage olympique, selon les scores modifiés par une formule de bonifications pour les filles, les lauréats du Kangourou ou des Olympiades Académiques de Première, ainsi que ceux dont le taux de réussite de l'établissement scolaire au Bac ou au Brevet n'est pas de 100%.
Pendant la première soirée du stage, le président du jury Jean-Louis Tu a remis une coupe aux meilleurs élèves de chaque catégorie :
- Pierre-Alexandre Bazin et Paul Cahen en Première,
- Thédore Fougereux et Xavier Pigé en Seconde,
- Justin Cahuzac et Daniel Cortild en Troisième,
- Aurélien Fourré en Quatrième.

2 Éliminatoires collégiens : énoncés

Exercice 1 Dans une salle se trouve un groupe de 11 personnes, dont la moyenne des âges est exactement 25 ans. Un deuxième groupe de 7 personnes arrive, la moyenne d'âge de la salle devient alors exactement 32 ans. Quel est la moyenne d'âge du second groupe ?

Exercice 2 Déterminer x tel que $\sqrt{x+77} = \sqrt{x+56} + 1$.

Exercice 3 Un triangle ABC a une aire égale à 944. Soit D le milieu de $[AB]$, E le milieu de $[BC]$ et F le milieu de $[AE]$. Quelle est l'aire de DEF ?

Exercice 4 Soit $ABCD$ un trapèze tel que (AB) soit parallèle à (CD), $AB = 3CD = 3DA$ et $\widehat{ADC} = 120°$. Déterminer l'angle $\widehat{CBA}$ en degrés.

Exercice 5 On note $100!$ l'entier $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100$. Déterminer le plus petit entier strictement plus grand que 100 qui est un diviseur de $100!$.

Exercice 6 Déterminer le nombre de couples d'entiers (a, b) tels que $1 \leqslant a \leqslant 30,\ 3 \leqslant b \leqslant 30$ et tels que a soit divisible par b et par $b-2$.

Exercice 7 On donne un polygone régulier à 200 côtés. Combien peut-on former de triangles dont les trois sommets sont des sommets de ce polygone ?

Exercice 8 De combien de manières peut-on placer les neuf chiffres de 1 à 9 dans une grille 3×3 de sorte que les sommes des lignes et les sommes des colonnes soient toutes égales ?

Exercice 9 Déterminer le nombre de quadruplets d'entiers naturels (a, b, c, d) vérifiant $abcd = 98$.

N.B. $(98, 1, 1, 1)$ et $(1, 1, 98, 1)$ sont des quadruplets différents.

Exercice 10 On considère un damier 10×10, constitué de 100 cases. Combien existe-t-il de carrés qui sont réunion d'une ou plusieurs cases du damier ?

Exercice 11 Bob possède 10% moins d'argent qu'Alice. Après que celle-ci ait acheté un objet, elle possède 10% moins d'argent que Bob. Combien de pourcents de son argent a-t-elle dépensé ?

Exercice 12 Quel est le nombre maximal d'angles inférieurs à $150°$ que peut avoir un polygone non croisé à 2017 côtés dont tous les angles sont strictement inférieurs à $180°$?

3 Éliminatoires lycéens : énoncés

Exercice 1 Déterminer le nombre de quadruplets d'entiers naturels (a, b, c, d) vérifiant $abcd = 98$.

N.B. $(98, 1, 1, 1)$ et $(1, 1, 98, 1)$ sont des quadruplets différents.

Exercice 2 On considère un damier 10×10, constitué de 100 cases. Combien existe-t-il de carrés qui sont réunion d'une ou plusieurs cases du damier ?

Exercice 3 Bob possède 10% moins d'argent qu'Alice. Après que celle-ci ait acheté un objet, elle possède 10% moins d'argent que Bob. Combien de pourcents de son argent a-t-elle dépensé ?

Exercice 4 Quel est le nombre maximal d'angles inférieurs à $150°$ que peut avoir un polygone non croisé à 2017 côtés dont tous les angles sont strictement inférieurs à $180°$?

Exercice 5 Déterminer le nombre d'entiers n tels que $1 \leqslant n \leqslant 10^{10}$, et tels que pour tout $k = 1, 2, \ldots, 10$, l'entier n soit divisible par k.

Exercice 6 Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties (éventuellement vides) de $\{1, 2, \ldots, 10\}$ telles que $A \cap B = \emptyset$.

N.B. Si $A \neq B$ alors $(A, B) \neq (B, A)$.

Exercice 7 Quel est le nombre d'anagrammes du mot AAABBBCDEF telles que trois lettres consécutives ne soient jamais identiques ?

Exercice 8 Déterminer le nombre d'entiers naturels a tels que $a^2 + a + 100$ soit le carré d'un entier.

Exercice 9 Soient x, y, z des entiers relatifs tels que pour tout triangle ABC on ait $16HN^2 = xBC^2 + yCA^2 + zAB^2$, où H est le pied de la hauteur issue de A, M est le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[AM]$. Déterminer $x^2 + y^2 + z^2$.

Exercice 10 Soit ABC un triangle équilatéral de côté 16. Trois cercles de même rayon r sont tangents entre eux deux à deux, et chacun de ces cercles est tangent à deux côtés du triangle. Le rayon r s'écrit $r = \sqrt{a} - b$ où a et b sont des entiers. Déterminer $a + b$.

Exercice 11 Soient $a < b < c$ les solutions de l'équation $2016x^3 - 4x + \frac{3}{\sqrt{2016}} = 0$. Déterminer la valeur de $-1/(ab^2c)$.

Exercice 12 On définit $u_1 = 17\times(1+2)$, $u_2 = 17^2\times(2+2)$, et plus généralement $u_n = 17^n\times(n+2)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Soient a et b des nombres réels tels que $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout n. Déterminer $a^2 - b$.

4 Éliminatoires collégiens : solutions

Solution de l'exercice 1 Réponse : 43. Soit x la moyenne d'âge du second groupe. On a $(11 \times 25 + 7x)/18 = 32$, donc $275 + 7x = 18 \times 32$, ce qui donne $x = (18 \times 32 - 275)/7 = 43$.

Solution de l'exercice 2 Réponse : 44. On élève au carré les deux membres : $x + 77 = x + 56 + 2\sqrt{x+56} + 1$, ce qui se simplifie en $20 = 2\sqrt{x+56}$, ou encore $100 = x + 56$, et finalement $x = 44$.

Solution de l'exercice 3 Réponse : 118. Notons $|ABC|$ l'aire de ABC. On a $|DEF| = \frac{1}{Rponse2}|DEA|$ car ces deux triangles ont même base $[DE]$ mais la hauteur de DEA est le double de celle de DEF. De même, $|DEA| = \frac{1}{Rponse2}|BEA| = \frac{1}{Rponse4}|ABC|$ donc $|DEF| = \frac{1}{Rponse8}|ABC| = 118$.

Solution de l'exercice 4 Réponse : 30. On peut supposer que $CD = 1$ et $AB = 3$. Soient M et N les points de $[AB]$ tels que $AM = MN = NB = 1$. Alors $AMCD$ est un parallélogramme car $AM = DC$ et $(AM) \parallel (DC)$. De plus, $DA = DC$ donc c'est un losange, et donc (DM) est la bissectrice de $\widehat{ADC}$. On en déduit que ADM est équilatéral, donc $\widehat{MAD} = 60°$. Comme $MNCD$ est un parallélogramme, on a aussi $\widehat{NMC} = 60°$. Or, $NM = NB = 1$ et $NC = MD = 1$, donc MBC est un triangle rectangle en C (et N est le centre de son cercle circonscrit), par conséquent $\widehat{CBA} = 180° - \widehat{BMC} - \widehat{MCB} = 30°$.

Solution de l'exercice 5 Réponse : 102. Comme $102 = 2 \times 51$, il divise $100!$. Par contre, 101 est un nombre premier et ne divise aucun des facteurs de $1 \times 2 \times \cdots \times 100$, donc il ne divise pas $100!$.

Solution de l'exercice 6 Réponse : 22. Pour $b = 3$, le nombre de multiples de $b(b-2) = 3$ qui sont $\leqslant 30$ est égal à 10. Pour $b = 4$, la condition est que 4 divise a, il y a 7 solutions. On trouve de même 2 solutions pour $b = 5$, 2 solutions pour $b = 6$ et 1 solution pour $b = 8$. On montre facilement qu'il n'y a pas d'autre solution.

Solution de l'exercice 7 Réponse : 1313400 On choisit un premier sommet : il y a 200 choix. On choisit un deuxième sommet : il y a 199 possibilités. Puis, il reste 198 possibilités pour le troisième sommet. Cela fait en tout $200 \times 199 \times 198$ triangles. Cependant, chaque triangle a été compté 6 fois car le triangle ABC est le même que les triangles ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. La réponse :est donc $200 \times 199 \times 198/6$.

Solution de l'exercice 8 Réponse : 72. Comme $1 + \cdots + 9 = 45$, la somme de chaque ligne vaut 15.

Comme toutes les lignes jouent le même rôle, il suffit de dénombrer le nombre de grilles telles que le 9 soit sur la première ligne, puis de multiplier par 3. En raisonnant de même sur les colonnes, on peut supposer que le 9 est en haut à gauche, et on multipliera le nombre de grilles trouvé par 9.

Comme $6 = 1 + 5 = 2 + 4$, soit le 1 et le 5 sont sur la même ligne (et alors le 2 et le 4 sur la même colonne) que le 9, soit c'est l'inverse. Donc le nombre de grilles avec un 9 en haut à gauche est égal à 8 fois le nombre de grilles de la forme

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 2 & * & * \\ 4 & * & * \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement qu'il n'y a qu'une seule solution, et donc la réponse :est $9 \times 8 = 72$.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Réponse : 40. L'équation est $abcd = 2 \times 7^2$. L'un des nombres a, b, c, d est divisible par 2, ce qui fait 4 choix possibles. Si par exemple il s'agit de a, alors on écrit $a = 2a'$ et l'équation devient $a'bcd = 7^2$. Soit deux des nombres a', b, c, d sont égaux à 7 et les autres à 1 (6 possibilités), soit l'un des a', b, c, d est égal à 49 et les autres à 1 (4 possibilités). La réponse :est donc $4 \times (6 + 4) = 40$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Réponse : 385. Il y a 1 carré 10×10, 4 carrés 9×9,... donc la réponse :est $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = 385$.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> Réponse : 19. Supposons par exemple que Alice possède 100 Euros et Bob 90 Euros. Après son achat, Alice possède 81 Euros, donc elle a dépensé 19 Euros.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Réponse : 11. Si les angles valent $180 - x_i$, alors on a $x_i > 0$ et $x_1 + \cdots + x_{2017} = 360$, donc au plus 11 des x_i peuvent être supérieurs à 30. On peut vérifier que réciproquement il existe un tel polygone.

5 Éliminatoires lycéens : solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Voir questionnaire collégiens, question 9.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Voir questionnaire collégiens, question 10.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Voir questionnaire collégiens, question 11.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Voir questionnaire collégiens, question 12.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Réponse : 3968253. n doit être divisible par $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$, donc la réponse :est la partie entière de $10^{10}/2520$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Réponse : 59049. Déterminer un couple (A, B) revient à colorier chaque entier en bleu, rouge ou vert (les éléments de A en bleu, ceux de B en rouge et les autres en vert). Il y a donc 3^{10} manières de choisir les couples (A, B).

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Réponse : 88080. Cherchons d'abord le nombre total d'anagrammes. Il y a $10 \times 9 \times 8/6$ manières de placer les lettres A, puis $7 \times 6 \times 5/6$ manières de placer les lettres B, et enfin $4 \times 3 \times 2$ manières de placer les autres lettres, ce qui fait en tout 100800.

De même on dénombre qu'il y a 6720 anagrammes tels que les A soient consécutifs, et idem pour B. Donc le nombre recherché est $100800 - 6720 \times 2 + x$ où x est le nombre d'anagrammes tels que les A et les B soient consécutifs. Or, $x = 2y$ où y est le nombre d'anagrammes tels que les A soient consécutifs, les B soient consécutifs et les B soient après les A. On dénombre que $y = (5 + 4 + 3 + 2 + 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 360$, donc finalement la réponse :est 88080.

Solution de l'exercice 8 Réponse : 4. Si $a^2+a+100=b^2$ alors $b>a$ donc on peut écrire $b=a+c$ avec $c>0$. L'équation se transforme en $a=\frac{100-c^2}{Rponse2c-1}$. En testant c compris entre 1 et 10, on trouve quatre solutions : $a=0,12,32,99$.

Solution de l'exercice 9 Réponse : 9. Comme AHM est rectangle en H, N est le centre du cercle circonscrit à AHM donc $HN=AM/2$. Le théorème de la médiane donne alors $16HN^2=4AM^2=-AC^2+2(AB^2+BC^2)$, donc $x=2,y=2,z=-1$, et par conséquent $x^2+y^2+z^2=9$.

Solution de l'exercice 10 Réponse : 52. Notons A' le centre du cercle le plus proche de A, etc. Notons H le projeté de B' sur (BC). On a $\tan(30)=B'H/BH=r/BH$ donc $BH=r\sqrt{3}$. De même, si on note K le projeté de C' sur (BC) alors $CK=r\sqrt{3}$, donc $16=BC=2r+2r\sqrt{3}$, ce qui donne $r=\frac{8}{Rponse1+\sqrt{3}}=\frac{4(\sqrt{3}-1)}{Rponse(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=4(\sqrt{3}-1)=\sqrt{48}-4$, par conséquent $a+b=48+4=52$.

Solution de l'exercice 11 Réponse : 1354752. Posons $y=\sqrt{2016}x$. L'équation devient $0=y^3-4y+3=(y-1)(y^2+y-3)$ dont les solutions sont 1 et $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{Rponse2}$, donc $b=1/\sqrt{2016}$, $a=-\frac{1+\sqrt{13}}{Rponse2\sqrt{2016}}$ et $a=\frac{-1+\sqrt{13}}{Rponse2\sqrt{2016}}$. On calcule alors que $-1/(ab^2c)=2016^2/3$.

Solution de l'exercice 12 Réponse : 1445. On a en effet $17^{n+2}(n+4)=a(17^{n+1}(n+3))+b(17^n(n+2))$ donc $17^2=17a+b$ et $17^2\times 4=51a+2b$. On en déduit que $17a=(51a+2b)-2(17a+b)=17^2\times(4-2)$, donc $a=34$. On en tire que $b=17^2-17\times a=-289$, puis $a^2-b=1445$.

6 Énoncés de la coupe Animath - 6 juin 2017

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées** (sauf pour l'exercice 1), où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
  Les collégiens traitent les exercices 1 à 5. Les lycéens traitent les exercices 3 à 7.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Énoncés collège

Exercice 1 *N.B. Dans cet exercice, et uniquement celui-ci, on demande une réponse sans justification.*

Soit $m > n > p$ trois nombres (entiers positifs) premiers tels que $m + n + p = 74$ et $m - n - p = 44$. Déterminer m, n et p.

(Un nombre premier est un entier strictement plus grand que un, et dont les seuls diviseurs sont un et lui-même.)

Exercice 2 Montrer que si n est un nombre entier à cinq chiffres, et m le nombre obtenu en renversant l'ordre des chiffres (par exemple si $n = 34170$ alors $m = 07143$), alors l'écriture de $n + m$ comporte au moins un chiffre pair.

Énoncés communs

Exercice 3 Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 60°$. La médiatrice de $[AC]$ coupe (AB) en P, et la médiatrice de $[AB]$ coupe (AC) en Q. Montrer que $PQ = BC$.

Exercice 4 On donne cinq nombres dans l'ordre croissant, qui sont les longueurs des côtés d'un quadrilatère (non croisé, mais non nécessairement convexe, c'est-à-dire qu'une diagonale n'est pas nécessairement à l'intérieur du polygone) et d'une de ses diagonales D. Ces nombres sont $3, 5, 7, 13$ et 19. Quelle peut être la longueur de la diagonale D ?

Exercice 5 On a écrit un nombre au tableau. À chaque étape, on lui ajoute le plus grand de ses chiffres (par exemple, si on a écrit 142, le nombre suivant sera 146). Quel est le plus grand nombre possible de nombres impairs que l'on peut écrire consécutivement en procédant de la sorte ?

Énoncés lycée

Exercice 6 Déterminer tous les entiers $n \geqslant 2$ tels que pour tout entier $d \geqslant 2$, si d est un diviseur de n alors $d - 1$ est un diviseur de $n - 1$.

Exercice 7 Un stage de mathématiques contient exactement un million d'élèves, certains d'entre eux étant amis (si A est un ami de B, alors B est un ami de A).

a) On suppose que chaque élève a au plus deux amis. Montrer qu'il est possible d'aligner les élèves de telle manière que si deux élèves sont amis, il y a au plus 2017 élèves entre eux.
b) On suppose maintenant que chaque élève a au plus trois amis. Montrer que ce n'est plus forcément possible.

7 Solutions

Énoncés collège

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On trouve $m = 59$, $n = 13$ et $p = 2$. Donnons quand même une justification. On a $2m = (m+n+p)+(m-n-p) = 74+44 = 118$, donc $m = 59$. Il vient $n+p = 74-59 = 15$. Comme $n+p$ est impair, l'un des deux nombres est pair. Or, l'unique nombre premier pair est 2, donc $p = 2$ et $n = 13$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On suppose que $n+m$ ne comporte que des chiffres impairs, et on montre que l'on aboutit à une absurdité.

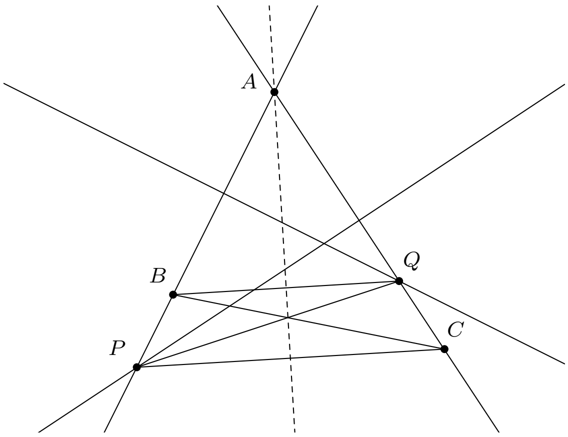
Notons $abcde$ l'écriture décimale de n. Comme le chiffre des unités de $n+m$ est impair, $a+e$ doit être impair.

Si $a+e < 10$, alors il n'y a pas de retenue dans les dizaines, donc $b+d$ est impair. Pour que le chiffre des centaines soit impair, il faut qu'il y ait une retenue, donc $b+d \geqslant 10$. Il y a donc une retenue dans la colonne des dix milliers, donc le chiffre des dix milliers a la même parité que $a+e+1$ qui est pair, ce qui est absurde.

Si $a+e \geqslant 10$ alors il y a une retenue dans la colonne des dizaines, donc $b+d$ est pair. De plus, comme il y a une retenue dans la colonne des centaines (même raisonnement que ci-dessus), on a $b+d+1 \geqslant 10$. Comme $b+d$ est pair, nécessairement $b+d \geqslant 10$ donc il y a une retenue dans la colonne des dix milliers, ce qui aboutit comme ci-dessus à une absurdité.

Énoncés communs

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>



Par définition de la médiatrice, le triangle ACP est isocèle en A. Comme $\widehat{PAC} = \widehat{BAC} = 60°$, il est équilatéral. De même, le triangle ABQ est équilatéral. On a donc $AP = AC$ et $AQ = AB$. Soit s la symétrie axiale dont l'axe est la bissectrice de $\widehat{BAC}$. On a donc $s(C) = P$ et $s(B) = Q$, donc $[PQ]$ est le symétrique de $[BC]$, d'où $PQ = BC$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On peut reformuler le problème : notons a, b, c, d les longueurs des côtés du quadrilatère, et e la longueur de la diagonale qui sépare d'une part les côtés de longueur a et b, d'autre part les côtés de longueur d et e. Il faut et il suffit que les triplets (a, b, e) et (c, d, e) vérifient l'inégalité triangulaire.

Si $e = 3$ ou $e = 5$, le triplet contenant 19 ne conviendra pas car $19-3 > 13$ et $19-5 > 13$: le côté de longueur 19 est trop grand.

Si $e = 13$, il faut simultanément $a+b > 13$ et $c+d > 19$. Or si a ou $b = 19$, alors $c+d \leq 5+7 < 13$, de même si c ou $d = 19$. Donc on ne peut avoir $e = 13$. On vérifie qu'il en va de même pour

$e = 19$.
Reste donc $e = 7$. On peut alors avoir $a = 3, b = 5, c = 13, d = 19$ par exemple.

Solution de l'exercice 5 La réponse est 5. Supposons qu'on parte d'un nombre impair n. On note n_i le i-ème nombre écrit avec $n_1 = n$. Soient aussi c_i et d_i le plus grand chiffre et le chiffre des unités de n_i. Si c_1 est impair, alors $n_2 = n_1 + c_1$ est pair, et on n'a écrit qu'un seul nombre impair. Notons aussi que c_1 ne peut pas être égal à 0.

Si $c_1 = 2$,alors $d_1 = 1$. On a $n_2 = n_1 + 2$, donc $c_2 = 3$ et $d_2 = 3$, puis $n_3 = n_2 + 3$ est pair. Le troisiéme nombre écrit est donc pair.

Si $c_1 = 4$, alors d_1 peut valoir 1 ou 3. Si $d_1 = 1$, alors $n_2 = n_1 + 4$ donc $c_2 = 5$ et $d_2 = 5$, donc $n_3 = n_2 + 5$ est pair. Si $d_1 = 3$, alors $n_2 = n_1 + 4$ donc $c_2 = 7$ et $d_2 = 7$, donc $n_3 = n_2 + 7$ est pair.

Si $c_1 = 6$, alors d_1 peut valoir 1, 3 ou 5. Dans les deux premiers cas, on obtient n_3 pair comme précédemment. Si $d_1 = 5$, alors $n_2 = n_1 + 6$ donc $d_2 = 1$. De plus, le plus grand chiffre soit reste le même ($c_2 = 6$), soit augmente de 1 ($c_2 = 7$). Dans le second cas, $n_3 = n_2 + 7$ est pair. Dans le premier, $n_3 = n_2 + 6$ donc $d_3 = 7$ et $c_3 = 7$ donc $n_4 = n_3 + 7$ est pair.

Si $c_1 = 8$, alors d_1 peut valoir 1, 3, 5 ou 7.

- ▷ si $d_1 = 1$, on obtient $c_2 = d_2 = 9$ donc n_3 est pair.
- ▷ si $d_1 = 3$, alors $d_2 = 1$ et c_2 peut valoir 8 ou 9. Dans le second cas n_3 est pair, et dans le premier on est ramené au cas précédent ($c = 8$, $d = 1$) donc n_4 est pair.
- ▷ si $d_1 = 5$, alors $d_2 = 3$ et c_2 peut valoir 8 ou 9. Dans le second cas n_3 est pair, et dans le premier on est ramené au cas précédent ($c = 8$, $d = 3$) donc n_4 ou n_5 est pair.
- ▷ si $d_1 = 7$, alors $d_2 = 5$ et c_2 peut valoir 8 ou 9. Dans le second cas n_3 est pair, et dans le premier on est ramené au cas précédent ($c = 8$, $d = 5$) donc n_4 ou n_5 ou n_6 est pair.

Il est donc impossible d'écrire successivement 6 entiers impairs. Par ailleurs, si on commence par 807, on écrira successivement 807, 815, 823, 831 et 839, donc on peut écrire successivement 5 entiers impairs.

Énoncés lycée

Solution de l'exercice 6 Si n est un nombre premier, alors $d = n$ est l'unique diviseur ≥ 2 de n, donc n convient.

Si $n = p^2$ est le carré d'un nombre premier, alors $d = p$ ou $d = n$. Or, $p - 1$ divise $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ et $n - 1$ divise $n - 1$, donc n convient.

Réciproquement, supposons que n ne soit ni un nombre premier, ni le carré d'un nombre premier. Soit a le plus petit diviseur ≥ 2 de n. Alors $n = ab$ avec $1 < a \leq b < n$. Comme n n'est pas le carré d'un nombre premier, on a $a < b$ (puisque a est un nombre premier).

Comme $b - 1$ est un diviseur de $n - 1$, on peut écrire $n - 1 = k(b-1)$ pour un certain entier k, donc $k(b-1) = ab - 1 = (b-1)a + a - 1$, ce qui implique que $a - 1 = (b-1)(k-a)$ est un multiple de $b - 1$. Comme $a - 1 > 0$, on a $a - 1 \geq b - 1$, ce qui contredit que $a < b$.

Conclusion : les entiers qui conviennent sont les nombres premiers et les carrés des nombres premiers.

Solution de l'exercice 7 Numérotons les élèves de 1 à 1000000. On place l'élève 1 tout à droite, en position 1. Si l'élve 1 a un ou deux amis, on les place en positions 2 et éventuellement 3. Puis on place en position 4 et 5 les seconds amis de 2 et 3 s'ils existent, et ainsi de suite. À chaque étape, on a au plus 2 élèves à placer. On ne peut s'arrêter que dans 3 cas :

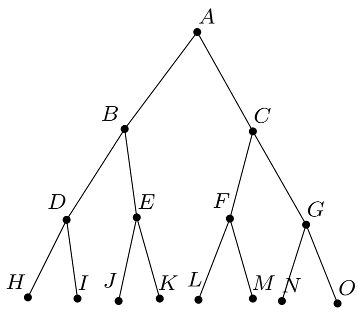
- ▷ On a placé tous les élèves, auquel cas on a gagné.

▷ Les deux élèves placés à l'étape précédente sont amis,, auquel cas on place un nouvel élève à la première place disponible et on recommence.

▷ Les élèves placés à l'étape précédente n'ont pas d'ami supplémentaire n'ont pas d'autres amis, auquel cas on place un nouvel élève à la première place disponible et on recommence.

Ainsi, on peut même placer les élèves de telle manière qu'entre deux amis il y a au plus 1 élève !

Si chaque élève a trois amis, cela ne marche plus. En effet, supposons que les relations d'amitié soient décrites par un arbre binaire complet de hauteur 18 (voir schéma ci-dessous, où on n'a représenté que les quatre premiers étages). C'est possible car $2^{19} < 1000000$.



Alors l'élève A a deux amis, appelons-les B et C qui doivent chacun être à distance au plus 2018 de A. Les deux amis de B et de C doivent chacun être à distance au plus 2018 de B ou de C, donc à distance au plus 2×2018 de A. Ainsi, tous les élèves qui sont connectés à A dans l'arbre (il y en a $2^{19} - 1 > 500000$) doivent être à distance au plus $19 \times 2018 < 40000$ de A. Cependant, au maximum $2 \times 40000 = 80000$ élèves peuvent être aussi proches de A, donc on ne peut pas placer les élèves.

III. Évaluation initiale

Pour les cours, les stagiaires sont répartis en quatre groupes de niveau :

- ▷ **Groupes A et B :** destinés respectivement aux élèves sortant du collège et à ceux sortant du lycée qui ne sont pas familiers avec les exercices de type "olympiades",
- ▷ **Groupe C :** destiné aux élèves qui maîtrisent déjà les connaissances et outils de bases en mathématiques olympiques,
- ▷ **Groupe D :** destiné aux élèves les plus avancés.

Cette année, l'évaluation initiale consistait en un entretien individuel. Les élèves avaient une petite heure pour remplir une fiche sur leur parcours personnel (incluant notamment les participations antérieures à des compétitions mathématiques et activités olympiques) et pour chercher quatre exercices. Voici les énoncés :

Exercice 1 Prouver que pour tout entier strictement positif n,

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2 n personnes se retrouvent lors d'une réunion, certaines se saluent par des poignées de mains. Montrer qu'il existe deux personnes qui auront serré le même nombre de mains.

Exercice 3 Quel est le dernier chiffre de 2017^{2017} ?

Exercice 4 Les cercles Γ et Γ' s'intersectent en deux points distincts M et N. Une droite (d) passant par M recoupe Γ et Γ' en A et B respectivement, une droite (d') passant par N recoupe Γ et Γ' en C et D respectivement. Montrer que $(AC)//(BD)$.

Solution de l'exercice 1 Une possibilité est de traiter cet exercice par récurrence sur n. On initialise à $n=1$: $1=\frac{1\times 2}{2}$. Pour l'hérédité, supposons la propriété vraie pour un certain $n\geq 1$. Alors

$$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On peut aussi écrire S_n la somme cherchée de deux façons différentes :
$S_n=1+2+\ldots+n$
$S_n=n+(n-1)+\ldots+1$
Donc $2S=(n+1)+\ldots+(n+1)=n(n+1)$ et le résultat en découle.

Solution de l'exercice 2 On peut avoir serré $0,1,\ldots n-1$ mains (on ne se la serre pas soi-même). Cela laisse n possibilités. Ainsi, si tout le monde aura serré un nombre différent de mains, toutes ces possibilités seront réalisées exactement une fois. Mais si une personne ne serre aucune main, personne ne peut serrer $n-1$ mains. Conclusion : deux personnes serrent nécessairement le même nombre de mains.

Solution de l'exercice 3 Il suffit de regarder le dernier chiffre de 7^{2017}. On remarque que les puissances de 7 sont périodiques modulo 10 (i.e. la valeur du dernier chiffre de 7^n, $n \geq 1$, est périodique), de période 4 : le dernier chiffre est successivement $7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1$, etc. 2016 est un multiple de 4 donc le dernier chiffre de 7^{2016} est un 1. Ainsi, celui de 7^{2017} est un 7.

Solution de l'exercice 4 Pour une figure, voir l'exercice 1 du cours de Linda Gutsche, lundi 21 après-midi dans le groupe A (où M et N s'appellent P et Q).
On utilise la propriété suivante, dérivée du théorème de l'angle inscrit : dans un quadrilatère circonscriptible (i.e. dont les quatre sommets sont situés sur un même cercle), les angles opposés sont supplémentaires. Ainsi, $\widehat{ACN} = 180^o - \widehat{AMN}$ et $\widehat{BDN} = 180^o - \widehat{BMN}$. Donc $\widehat{ACN} + \widehat{BDN} = 360^o - (\widehat{AMN} + \widehat{BMN})$. Or, A, M, B sont alignés avec M entre A et B donc $\widehat{AMN} + \widehat{BMN} = 180^o$. Ainsi, $\widehat{ACN} + \widehat{BDN} = 360^o - 180^o = 180^o$. Comme C, N, D sont alignés dans cet ordre, $\widehat{ACD} = \widehat{ACN}$ et $\widehat{BDC} = \widehat{BDN}$. Donc $\widehat{ACD} + \widehat{BDC} = 180^o$, ainsi $(AC)//(BD)$.

IV. Programme

Jour	Moment	Groupe A	Groupe B	Groupe C	Groupe D
16 août	après-midi	répartition dans les groupes			équations fonctionnelles Jean-Louis
	soirée	remise des prix de la coupe Animath, présentation du stage et de la préparation olympique			
17 aoÃ»t	matin	stratégies de base Antoine M.	stratégies de base Martin R.	combinatoire Félix	algèbre Eva
	après-midi	stratégies de base Antoine S.	arithmétique Victor	arithmétique Raphaël	arithmétique Guillaume
	soirée	conférence de Raphaël			
18 aoÃ»t	matin	algèbre Mathieu B.	stratégies de base Henry	combinatoire Antoine M.	algèbre Antoine S.
	après-midi	stratégies de base Jean-Louis	arithmétique Raphaël	arithmétique Victor	arithmétique Félix
	soirée	présentation des Olympiades Internationales et du $\mathbb{TFJM}^2$			
19 aoÃ»t	matin	algèbre Henry	stratégies de base Antoine S.	combinatoire Jean-Louis	algèbre Guillaume
	après-midi	stratégies de base Eva	arithmétique Victor	arithmétique Wassim	arithmétique Raphaël
	soirée	libre			
20 août	matin	test de première période			
	après-midi	activités libres			
	soirée	correction du test			
21 aoÃ»t	matin	géométrie Linda	géométrie Martin R.	géométrie Cécile	géométrie Thomas
	après-midi	arithmétique Alexander	algèbre Mathieu B.	algèbre Henry	combinatoire Guillaume
	soirée	conférence de Pierre Alliez (INRIA) : modélisation de formes en 3D			
22 aoÃ»t	matin	géométrie Martin R.	géométrie Alexander	géométrie Linda	géométrie Cécile
	après-midi	arithmétique Victor	algèbre Rémi	algèbre Alexander	combinatoire Thomas
	soirée	conférence de Martin A. : faire des mathématiques, pourquoi et comment ?			
23 aoÃ»t	matin	géométrie Cécile	géométrie Linda	géométrie Thomas	géométrie Alexander
	après-midi	arithmétique Rémi	algèbre Wassim	algèbre Mathieu B.	combinatoire Félix
	soirée	libre			
24 août	matin	test de seconde période			
	après-midi	activités libres			
	soirée	correction du test			
25 aoÃ»t	matin	Rémi	Martin R.	Martin A.	Mathieu B.
	après-midi	Wassim	Henry	Cécile	Thomas
	soirée	libre			

V. Première période

1 Groupe A : logique/stratégies de base

1 jeudi 17 matin : Antoine Martin

Le but de ce cours est de poser la structure logique nécessaire à l'établissement d'un raisonnement rigoureux et mathématique. Les abus de langage nuisent à la rigueur du propos et il convient de montrer que ce que l'on peut comprendre d'une phrase dans la vie courante et sa véritable valeur logique peuvent parfois différer. En effet, lorsqu'on demande à un jeune parent si c'est un garçon ou une fille, il ou elle répond habituellement "un garçon !" ou bien "une fille !" tandis qu'une logicienne ou un logicien répondra "oui". Afin de bâtir des preuves solides, les élèves doivent être conscients de ces enjeux et apprendre à produire des raisonnements viables en terme de logique.

Les liens logiques : mots et symboles

Le mathématicien a, à sa disposition, de nombreux liens entre plusieurs propositions. Ces valeurs logiques sont souvent associées à des symboles. Il dispose pour lier deux choses des deux outils suivants :

- **La Causalité :** ce lien est exprimé simplement lorsqu'on considère deux assertions, A et B, la causalité de A vers B est :

  "si A, alors B", notée "A $\Rightarrow$ B"

  Par exemple, en considérant que le seul moyen d'avoir une voiture est de l'acheter, on aura :

  "ne pas avoir d'argent" $\Rightarrow$ "ne pas avoir de voiture"

  Plus mathématiquement,

  "être multiple de 4" $\Rightarrow$ "être pair"

  Attention : cette flèche est à sens unique ! On sait bien que tous les pairs ne sont pas multiples de 4

- **L'équivalence :** en considérant toujours nos deux assertions A et B, l'équivalence entre A et B est

  "si et seulement si A, alors B", notée "A $\Leftrightarrow$ B"

  Par éxemple, on s'accordera sur la proposition suivante :

  "Le triangle est rectangle si et seulement si les longueurs de ses côtés vérifient le théorème de Pythagore"

Le mathématicien peut également former un objet à partir d'un autre objet :

- **La négation :** elle permet de former le contraire d'une assertion, par exemple, la négation de "je suis coupable" est "je suis innocent".
  On note le contraire de A : ¬A ou bien ∁A ou encore $\overline{A}$.
  On a donc de manière logique :
  $$\overline{\text{"je suis coupable"}} = \text{"Je suis innocent"}$$

Le mathématicien peut aussi former un nouvel objet à partir de deux objets existants :

- **La privation :** elle permet d'exclure une partie d'une assertion, on dit "A privé de B" qui correspond à ce qui est dans A mais pas dans B et qui se note $A \backslash B$ On peut exprimer ainsi des ensembles simples : par exemple,
  $$\{n \in \mathbb{N}\ impairs\} = \mathbb{N} \setminus \{n \in \mathbb{N}\ pairs\}$$
  qui exprime simplement que les entiers pairs sont "tous les entiers sauf ceux qui sont pairs"
- **La conjonction :** elle permet de selectionner ce qui est en commun à deux objets, on nomme aussi cela l'intersection. Elle est caractérisée par le connecteur logique "et".
  On note l'intersection de A et de b : A ∩ B ou bien A ∧ B ou encore plus rarement A × B.
  On a donc de manière logique :
  "il est blond" ∩ "il a les yeux bleus" = "il est blond aux yeux bleus"
  Plus mathématiquement,
  "n est multiple de 2" ∩ "n est multiple de 3" = "n est multiple de 6"
- **La disjonction :** elle exprime ce qui est au moins dans l'un des deux objets, on nomme aussi cecla l'union. Elle est caractérisée par le connecteur logique "ou (inclusif)"
  On note l'union de A et de b : A ∪ B ou bien A ∨ B ou encore plus rarement A + B
  On a donc de manière logique :
  "il est blond" ∪ "il a les yeux bleus"
  = "il est blond, ou il a les yeux bleus ou bien les deux à la fois"
  Plus mathématiquement,
  "n est multiple de 2" ∪ "n est multiple de 3" = "n est multiple de 2 ou de 3"
- **La disjonction exclusive :** elle exprime ce qui est dans l'un des deux objets, mais pas dans les deux, on nomme aussi cecla l'union disjointe. Elle est caractérisée par le connecteur logique "ou exclusif". Elle est souvent appelée, lorsqu'on parle des ensembles, la "différence symétrique"
  On note l'union exclusive de A et de B : A △ B
  On a donc de manière logique :
  "il est blond" △ "il a les yeux bleus" = "il est blond, ou il a les yeux bleus mais il n'est pas blond aux yeux bleus"
  Plus mathématiquement,
  "n est multiple de 2" △ "n est multiple de 3" = "n est multiple de 2 ou de 3, mais pas multiple de 6"
  On peut écrire la formule suivante A △ B = (A ∪ B) \ (A ∩ B)

Les symboles présentés ci-dessus peuvent quelques fois alourdir la rédaction des preuves et la rendre moins compréhensible. C'est pourquoi il est indispensable d'effectuer une factorisation logique lorsque les expression s'allongent (on remarque facilement avec du bon sens que ∪ correspond à + et que ∩ correspond à × dans une factorisation).

Afin d'alléger encore les expressions, on peut remarquer deux propriétés importantes, portant le nom de **Lois de de Morgan** qui donnent :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ et } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Les quantificateurs et les symboles associés

Construire une phrase mathématique recquiert des quantificateurs pour formuler sa pensée. Dans une dynamique de formulation qui dépend moins du langage, et pour raccourcir les expressions, on a associé chacun des quantificateurs :

▷ **Le quantificateur universel :**
Ce quantificateur permet de donner des généralités, on peut l'exprimer avec les locutions "pour tout" ou "quel que soit". On lui associe le symbole $\forall$ On aura donc par exemple :
$$\forall n \in \mathbb{N}$$
qui se lit et signifie :
"Pour tout n entier naturel" ou bien "quel que soit n entier naturel"

▷ **Le quantificateur existentiel :**
Ce quantificateur montre l'existence d'un objet possédant certaines propriétés. On peut l'exprimer par la locution "il existe". On lui associe le symbole $\exists$ On aura par exemple :
$$\exists n / \forall k \in \mathbb{N}, n \leq k$$
qui se lit :
"Il existe n tel que pour tout k entier naturel, $n \leq k$"
Bien entendu, la véritable valeur de n est connue, c'est $n = 0$
La négation de ce quantificateur existe elle aussi, il s'agit de "il n'existe pas", notée $\nexists$
Ce quantificateur possède une légère variante pour indiquer que l'objet dont on signale l'existence est aussi unique : on note $\exists!$ qui permettra par exemple de dire :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists! y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ / \ x = \frac{1}{y}$$

Il existe aussi des notations pratiques qui ne sont pas des quantificateurs mais qu'il convient de connaitre. On en donne ici la signification :

▷ **L'appartenance :** On note "appartient à" par $\in$
Un point important est de bien avoir conscience que cette notation fait le lien entre deux objets de statut différents : par exemple, $a \in A$ exprime que a est un élément de A, à gauche un élément, à droite, l'ensemble auquel il appartient.
Attention, lorsque l'on commence à considérer des ensembles d'ensembles, des ensembles d'ensembles d'ensembles, il convient de bien vérifier à chaque fois le statut de chacun pour ne pas écrire d'absurdité.
Par exemple on peut écrire $n \in \mathbb{N}$, mais on ne peut surtout pas écrire $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$
La négation existe, et pour dire "n'appartient pas", on note $\notin$

▷ **L'inclusion :**
C'est LA notion à ne pas confondre avec l'appartenance. On dit que A est inclus dans B et on note $A \subset B$ pour exprimer que tous les éléments de A sont aussi des éléments de B. A et B sont donc des ensembles sur le même plan hiérarchique.
On a par exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
La notation "n'est pas inclus dans" existe, c'est $\not\subset$.

▷ **Les propriétés :**
L'expression "tel que" est généralement abrégée en mathématiques par la notation /
Par exemple, on notera "soit n tel que $2n \leq k$" par :

$$\text{soit } n \;/\; 2n \leq k.$$

Les phrases logiques

▷ **Construire des phrases logiques**
Tous ces éléments sont utiles aux mathématiciens pour formuler des phrases logiques. On forme ainsi des enchaînements de symboles faisant office de phrase. Par exemple,

"Pour tout nombre entier naturel n, il existe un entier k tel que $n \leq k$"

peut être traduit mathématiquement par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \;/\; n \leq k.$$

<u>Attention</u>, l'ordre des quantificateurs a une importance capitale ! On convient aisément de la véracité de la proposition précédente ; en revanche, un élève étourdi pourrait écrire :

$$\exists k \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \in \mathbb{N}, n \leq k.$$

ce qui est violemment faux puisque cela signifie que tous les entiers sont inférieurs à un même nombre.

▷ **La négation de phrases logiques :**
Comme toute phrase, une phrase logique peut être mise à sa forme négative. Le procédé le plus simple pour se faire est de travailler non pas avec l'expression symbolique, mais avec des mots qui font sens. Rien n'est plus lourd que d'Ã©laborer une méthode algorithmique pour faire la négation d'une phrase mathématique. Il faut donc utiliser son bon sens, réfléchir au sens de la phrase, construire la négation en français, et ensuite, revenir au langage mathématique. Quelques essais pour vous entraîner :

Exercice 1 Construire la négation des phrases logiques suivantes :
— $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in P \;/\; n \leq p$ (P est l'ensemble des nombres premiers)
— $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists! p \in \mathbb{Z} \;/\; n + p = 0$
— $\exists y \in \mathbb{R} \;/\; f(x) = xy$ définisse une fonction constante sur $\mathbb{R}$

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On procède à chaque fois en 3 étapes : repasser à la signification, nier la signification, repasser en symbolique
— "$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in P \;/\; n \leq p$ (P est l'ensemble des nombres premiers)"
signifie "pour tout entier naturel n, il existe un nombre premier plus grand que n"
dont le contraire est : "il existe un entier naturel n tel qu'aucun nombre premier ne soit plus grand que lui"
ce qui s'écrit :

$$\exists n \in \mathbb{N} \;/\; \forall p \in P, p \leq n$$

(ce qui est évidemment faux puisque l'affirmation de départ était vraie)
— "$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists! p \in \mathbb{Z} \;/\; n + p = 0$" a, par le même raisonnement une négation qui est :

$$\exists n \in \mathbb{Z} \;/\; \forall p \in \mathbb{Z}, n + p \neq 0$$

ce qui est également faux pour la même raison
— "$\exists y \in \mathbb{R} \;/\; f(x) = xy$ définisse une fonction constante sur $\mathbb{R}$" a pour négation :

$$\forall y \in \mathbb{R}, f \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = xy \text{ n'est pas constante}$$

Attention, il est un point à toujours garder en tête lorsque l'on manipule des phrases logiques : les expressions peuvent devenir lourdes et l'humain est faillible, on peut donc écrire une stupidité beaucoup plus vite qu'il n'y paraît. C'est pourquoi les mathématiciens ont compris qu'une phrase claire en français vaut mille fois mieux qu'une phrase logique tordue. Il ne faut donc pas hésiter, dans des situation complexes (dès que l'on commence soi-même à avoir du mal à relire ses propres phrases), à repasser en langue des hommes.

Les différents modes de raisonnement

Nous avons appris dans le paragraphe précédent à formuler correctement des propositions, ce sont les briques de notre raisonnement. Nous allons maintenant voir comment lier ses briques de manière licite afin de construire des raisonnements solides (murs mathématiques).

▷ **Le raisonnement par implications successives :**
C'est le raisonnement le plus classique : il utilise des propriétés pour déduire des vérités d'autres vérités. La structure de ce raisonnement est clairement établie et doit être respectée, les mots soulignés doivent apparaître dans tout raisonnement par implications.

Exercice 2 Si (AB) // (CD), (AB) $\perp$ (EF) et enfin (EF) $\perp$ (GH).
Que dire de (CD) et (GH) ?

Solution de l'exercice 2
(EF) $\perp$ (GH) et (EF) $\perp$ (AB)
Donc (GH) // (AB)
Or (AB) // (CD)
Donc (CD) // (GH)

Certains de ces raisonnements sont plus calculatoires, dans ces cas, on utilise des flèches :

Exercice 3
On donne x et y des réels positifs tels que $x \leq y$, montrer que $\frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{x^2}$

Solution de l'exercice 3
$x \leq y$
$\Rightarrow x^2 \leq y^2$ par croissance de la fonction carré
$\Rightarrow \frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{x^2}$ par décroissance de la fonction inverse sur les réels positifs

Attention, une implication n'est qu'une implication, par exemple, $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$ mais on a absolument pas $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ car 2 et -2 ont le même carré. Il ne faut donc absolument pas remonter le raisonnement sans prouver que cela est possible.

▷ **Le raisonnement par équivalences successives :**
Pour établir des équivalences, bien que le moyen le plus facile soit généralement d'établir $A \Rightarrow B$ puis $B \Rightarrow A$ pour avoir $A \Leftrightarrow B$, on peut conserver l'équivalence à chaque étape comme dans l'exercice suivant.

Exercice 4
Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$

Solution de l'exercice 4
$Soit (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$0 \leq (x-y)^2$
$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2xy + y^2$
$\Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2$
$\Leftrightarrow xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$

▷ **Le raisonnement par analyse-synthèse**
Ce raisonnement es aussi souvent nommé “raisonnement par condition nécessaire et suffisante” : il contient deux parties qu'il est indispensable de séparer clairement (au risque de voir la démonstration biaisée) :

— **L'analyse** ou recherche de conditions nécessaires :
L'objectif de cette partie est de rechercher des candidats, de trouver des conditions que ces candidats doivent vérifier.

— **La synthèse** ou recherche de conditions suffisantes :
L'objectif est ici de montrer que n'importe quel objet qui satisfait les conditions établies en fin de partie précédente est convenable, sans utiliser les hypothèses de la partie précédente.
Il faudra toujours adopter des rédactions similaires à l'exercice suivant

Définition 1. On dit d'une fonction qu'elle est paire si elle vérifie :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$$
On dit d'une fonction qu'elle est impaire si elle vérifie :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x)$$

Exercice 5
Montrer que toute fonction est la somme de d'une fonction paire et d'une fonction impaire

Solution de l'exercice 5

— **Analyse**
On recherche d'abord la fonction paire, que l'on va tenter de formuler avec f. On construit donc une fonction qui ne change pas si l'on change x en $-x$. Deux choix semblent faciles :
$$f(x) + f(-x) \text{ et } f(x).f(-x)$$
Compte tenu de la consigne, on va plus s'attarder sur la première idée. On cherche dorénavant à construire un objet impair du même type, ce qui nous mène à la considération de
$$f(x) - f(-x)$$
Pour une raison assez evidente sur la somme, on se dit que nos candidats sont :
$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

— **Synthèse**
On pose $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$
On a bien (vérification laissée au lecteur) $g(x) = g(-x)$ et $h(x) = -h(-x)$
Donc g est bien paire et h impaire
On a également $g(x) + h(x) = f(x)$
Toutes les conditions étant réunies, g et h sont convenables

On a donc démontré que toute fonction peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

▷ **Le raisonnement par contraposition :**

La démonstration par contraposition utilise un principe de base de la logique :

$P \Rightarrow Q$ est équivalent à $\neg Q \Rightarrow \neg P$

C'est ce prncipe que l'on met en oeuvre en démontrant l'une des deux pour avoir l'autre.

Exercice 6 Montrer que si n^2 est impair, alors n est pair

Solution de l'exercice 6 Il connvient d'abord de formuler la négation de la conclusion pour savoir d'où on part, et celle de l'hypothèse pour savoir où l'on va. On va donc chercher à montrer

n pair $\Rightarrow n^2$ pair

On démontre tout de même ce fait assez évident : on note $n = 2p \Rightarrow n^2 = 2.(2p^2)$ donc

n pair $\Rightarrow n^2$ pair

De là, par contraposition :

n^2 impair $\Rightarrow n$ impair

- **Le raisonnement par l'absurde :**
  Le raisonnement par l'absurde ne dois pas être l'objet d'un amalgame avec le raisonnement par contraposition : ce sont des modes différents. Il convient également de signaler de manière explicite au lecteur que l'on va effectuer un raisonnement par l'absurde AVANT de l'entamer. Surtout, en fin de raisonnement, on de dit pas "absurde" ou "ce qui est absurde" de manière précipitée : on énonce clairement une CONTRADICTION entre une supposition et une conclusion. La phrase type étant "On a donc XXXX, or on avait supposé que YYYY, on a donc une contradiction". On achève le raisonnement par une dernière phrase de conclusion reprenant l'énoncé de la propriété que l'on a démontré.

  Exercice 7 Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

  Solution de l'exercice 7 On va raisonner par l'absurde :
  Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel
  On a alors p et q entiers avec $p \wedge q = 1$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$
  De là, $2q^2 = p^2$
  Donc p^2 est pair
  Donc p est pair (on écrit $p = 2p'$)
  On a alors $q^2 = 2p'^2$
  Donc q^2 est pair
  Donc q est pair
  On aboutit à p et q sont pairs, alors qu'on avait supposé $p \wedge q = 1$. On a donc une contradiction
  De là, $\sqrt{2}$ est irrationnel

- **Le raisonnement par récurrence :**
  Ce raisonnement fait l'objet d'un travail plus poussé dans le cours qui suit, par Antoine Séré.

- **Le principe des tiroirs :**
  Ce raisonnement fait l'objet d'un travail plus poussé dans le cours qui suit, par Antoine Séré.

- **Le contre-exemple :**
  On oublie souvent ce petit procédé qui n'en est pas moins rigoureux. Pour montrer

qu'une propriété est fausse, rien de plus simple que d'y trouver un contre-exemple. La recherche de contre-exemples est très formatrice et trouver de bons contre-exemples peut s'avérer difficile. Qui plus est, cela permet généralement de mesurer les limites d'applications des théorèmes ce qui ne fait qu'accroitre la compréhension qu'on en a.

2 jeudi 17 après-midi : Antoine Séré

On ne donne ici que les exercices, un bref cours se trouve dans le polycopié du stage olympique de Valbonne 2015, page 32 pour le principe des tiroirs, page 35 pour la récurrence.

Récurrence

Simplification de la somme des n premiers entiers Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que :

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solution : montrons par récurrence simple la proposition : $P_n : 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Initialisation : montrons P_1. $1 = \dfrac{1 \times (1+1)}{2}$ donc P_1 est vraie.
Hérédité : supposons P_n. Alors on a :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

Alors P_{n+1} est vraie.
Conclusion : P_n est vraie pour tout n entier non nul.

Simplification de la somme des n premiers carrés Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que :

$$1 + 4 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solution : montrons par récurrence simple la proposition : $P_n : 1+4+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation : montrons P_1. $1 = \dfrac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6}$ donc P_1 est vraie.
Hérédité : supposons P_n. Alors on a :

$$\begin{aligned} 1 + 4 + \ldots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ 1 + 4 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

Alors P_{n+1} est vraie.
Conclusion : P_n est vraie pour tout n entier non nul.

Simplification du produit des 2n premiers entiers Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que :

$(n+1)(n+2)\dots(2n) = 2^n \times (1 \times 3 \times \dots \times (2n-1))$

Solution : montrons par récurrence simple la proposition : $P_n : (n+1)(n+2)\dots(2n) = 2^n \times (1 \times 3 \times \dots \times (2n-1))$
Initialisation : montrons P_1. $1+1 = 2^1 \times 1$ donc P_1 est vraie.
Hérédité : supposons P_n. Alors on a :

$$\begin{gathered}
(n+1)(n+2)\dots(2n) = 2^n \times (1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)) \\
(n+2)\dots(2n+2) = 2^n \times (1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)) \times \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \\
(n+2)\dots(2n+2) = 2^n \times (1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)) \times 2(2n+1) \\
((n+1)+1)\dots(2(n+1)) = 2^{n+1} \times (1 \times 3 \times \dots \times (2(n+1)-1))
\end{gathered}$$

Alors P_{n+1} est vraie.
Conclusion : P_n est vraie pour tout n entier non nul.

Tiroirs

Les joies de l'amitié n personnes sont dans une pièce. Montrez qu'il existe deux personnes avec le même nombre d'amis.

Indication : on rappelle que toute personne A est amie avec B si et seulement si B est amie avec A, et que toute personne A n'est pas amie avec elle-même.

Solution : nos chaussettes sont les n personnes, et deux personnes sont mises dans le même tiroir lorsqu'elles ont serré le même nombre de mains.
Or toute personne a serré entre 0 et $n-1$ mains, et il est impossible qu'une personne ait serré 0 mains et une autre $n-1$ mains car ces deux personnes se serraient serré la main et ne se seraient pas serré la main en même temps.
Ainsi, il y a $n-1$ tiroirs et n chaussettes, donc un tiroir contient deux personnes : deux personnes ont serré le même nombre de mains.

L'impossible choix Montrez que si l'on prend $n+1$ nombres parmi $1, 2, 3, \dots, 2n$, on pourra toujours en trouver deux parmi les $n+1$ tels que l'un divise l'autre.

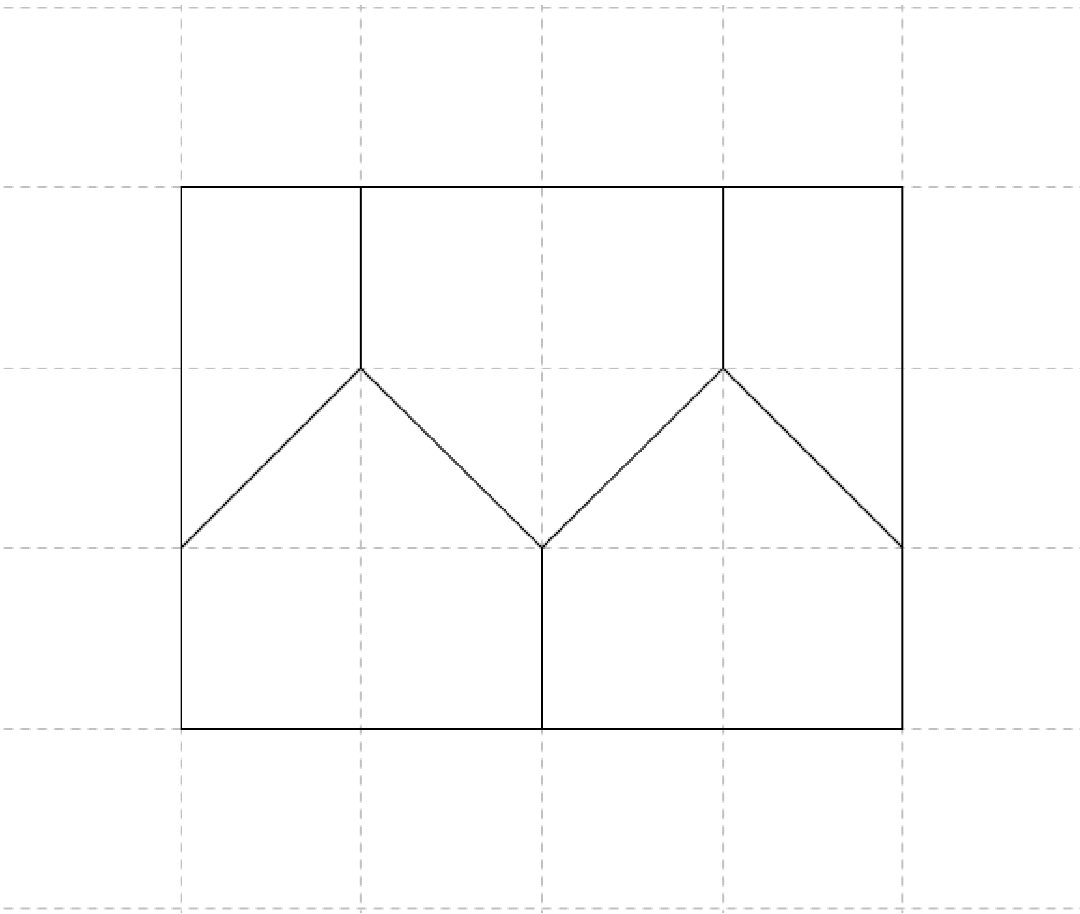
Solution : nos chaussettes sont les $n+1$ nombres, et deux nombres a et b sont dans le même tiroir lorsqu'il existe une entier k tel que :

$$a = 2^k b \text{ ou } b = 2^k a$$

Il y a alors n tiroirs (autant que de nombres impairs entre 1 et $2n$) et $n+1$ objets, donc deux objets sont dans le même tiroir, donc on peut trouver deux nombres parmi les $n+1$ tels que l'un divise l'autre.

Tiroirs géométriques On place 6 points dans un rectangle 3×4. Montrez qu'on peut en trouver deux à une distance inférieure ou égale à $\sqrt{5}$.

Solution : les tiroirs sont ici les 5 zones du plan dessinées ci-dessous.
Le principe des tiroirs garanti que deux points seront dans la même zone, et les dimensions des zones que la distance entre ces points est inférieure ou égale à $\sqrt{5}$.



3 vendredi 18 après-midi : Jean-Louis Tu

Invariants

Un invariant est une quantité qui ne change pas lorsque l'on applique certaines transformations. Les invariants permettent de montrer qu'une suite de transformations ne permet pas de passer d'un état à un autre.

Exercice 1 Est-il possible de paver un échiquier 9×9 avec des dominos 1×2 (on autorise les rotations) ?

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Non car le nombre de cases recouvertes par les dominos est pair.

Exercice 2 Est-il possible de paver un échiquier 8×8 dont on a retiré les cases $(1, 1)$ et $(8, 8)$ avec des dominos 1×2 ?

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Non. Avec le coloriage habituel de l'échiquier, les deux cases retirées ont la même couleur. Or, un domino recouvre une case de chaque couleur, donc le nombre

total de cases noires recouvertes est égal au nombre total de cases blanches recouvertes.

Exercice 3 Est-il possible de déplacer un cavalier sur un échiquier 5×5 sur un parcours cyclique de sorte que chaque case soit visitée exactement une fois ?

Solution de l'exercice 3 Non car la couleur de la case sur laquelle se trouve le cavalier doit alterner, or il y a un nombre impair de cases au total.

Exercice 4 Soit $n \geqslant 1$ un entier. On suppose que n personnes se tiennent autour d'un cercle. Au début, la personne 1 possède n jetons. À chaque étape, une personne peut donner un jeton à chacun de ses deux voisins. Pour quels entiers n est-il possible que, au bout d'un certain nombre d'étapes, chaque personne possède exactement un jeton ?

Solution de l'exercice 4 Montrons que si c'est possible, alors n est impair.

Si un jeton est à la place k, on dira qu'elle possède le poids k. Soit S le poids total des jetons. Alors on vérifie qu'à chaque étape, le poids reste inchangé, ou bien augmente ou diminue de n.

Au départ, le poids vaut n, et à la fin il faut $n(n+1)/2$, donc $n(n+1)/2 - n$ est un multiple de n, et donc $n(n+1)/2$ aussi. Par conséquent, $(n+1)/2$ est un entier, c'est-à-dire que n est impair.

Réciproquement si n est impair, on peut démontrer par récurrence que c'est possible, en opérant symétriquement, de partir de $\cdots 0\ 0\ n\ 0\ 0 \cdots$ pour arriver à $1 \cdots 1\ 1\ \ 1\ \cdots 1$. (Si on peut le faire pour $n-2$ alors on peut passer de $\cdots 0\ 0\ n\ 0\ 0 \cdots$ à $1 \cdots 1\ 3\ \ 1\ \cdots 1$, et ensuite il n'est plus très difficile de continuer).

Exercice 5 9 pions sont placés sur chacune des cases du carré 3×3 en bas à gauche d'un échiquier 8×8. À chaque étape, on peut prendre un pion, sauter par-dessus une case occupée (verticalement, horizontalement ou en diagonale) et le poser juste derrière, sur une case inoccupée. Est-il possible qu'au bout d'un certain nombre d'étapes, les 9 pions occupent le carré 3×3 en haut à gauche ? En haut à droite ?

Solution de l'exercice 5 Non. On colorie une ligne sur deux en noir. Lorsqu'un pion se déplace, il va vers une case de la même couleur. Or, il y a 6 pions sur des cases noires au début, et 3 à la fin, ce qui est impossible.

Exercice 6 On dispose de trois tas de 51, 49 et 5 cailloux. À chaque étape, on peut, soit fusionner deux tas, soit diviser un tas en deux parties égales. Est-il possible qu'au bout d'un certain nombre d'étapes, on aboutisse à 105 tas d'un caillou ?

Solution de l'exercice 6 Non. À la première étape, on est obligé de fusionner deux tas. On constate alors qu'il existe d (avec $d = 3, 5$ ou 7 suivant les cas) tel que d divise le nombre de cailloux de chacun des tas. Cette propriété se conserve à chaque transformation car

1. (Fusion de deux tas) : si d divise a et b alors d divise $a+b$.
2. (Division d'un tas) : si d divise $2n$, alors d divise n car d est impair.

On en déduit qu'il ne peut jamais y avoir de tas ne comportant qu'un seul caillou.

Exercice 7 Sur un cercle sont disposées n lampes, dont une seule est allumée au départ. À chaque étape, on peut faire changer d'état trois lampes consécutives. Pour quels n est-il possible qu'au bout d'un certain nombre d'étapes, toutes les lampes soient allumées ?

Solution de l'exercice 7 Supposons que n ne soit pas divisible par 3. Si $n = 3m + 1$, on peut évidemment changer d'état $3m$ lampes consécutives, donc allumer toutes les lampes $2, \ldots, n$ sans toucher à la lampe 1.

Si $n = 3m + 2$, on peut changer d'état les lampes $1, 2, 3$. Seules les lampes 2 et 3 sont alors allumées. Puis on allume les $3m$ lampes restantes.

Supposons maintenant que n soit divisible par 3. Pour se fixer les idées, disons que les lampes sont de couleurs bleu, vert, rouge, bleu, vert, rouge, etc. et que la lampe allumée au départ soit bleue. À chaque étape, une lampe bleue et une lampe verte changent d'état, donc le nombre de lampes bleues ou vertes allumées est toujours impair. Il est donc impossible d'allumer toutes les lampes bleues et vertes.

Principe du maximum

Définition. Soit E un ensemble. Une relation R sur E est appelée une relation d'ordre si
- ▷ (Réflexivité.) $\forall x \in E, xRx$.
- ▷ (Antisymétrie.) $\forall x, y \in E$, on a $(xRy$ et $yRx) \implies x = y$
- ▷ (Transitivité.)
  $\forall x, y, z \in E$, $(xRy$ et $yRz) \implies xRz$.

Par exemple, l'ensemble des parties de E muni de l'inclusion est un ensemble ordonné.

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné.

Un élément $a \in E$ est dit maximal si $a \in E$, et si pour tout $x \in E$, on a $a \leqslant x \implies x = a$.

Par exemple, le maximum de $[0, 1]$ est 1, tandis que $[0, 1[$ et $[0, +\infty[$ n'ont pas de maximum.

Si E est l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3\}$ différentes de $\{1, 2, 3\}$, alors les éléments maximaux sont les parties à deux éléments.

Tout ensemble ordonné fini admet un élément maximal.

Pour analyser une configuration, il peut être utile de considérer le cas particulier où une certaine quantité est maximale.

Exercice 8 20 personnes jouent 14 parties de tennis au total. On suppose que chacun joue au moins une partie. Montrer que parmi les 14 parties jouées, il y en a 6 qui font intervenir 12 joueurs.

Solution de l'exercice 8 On considère un ensemble maximal (pour l'inclusion) M de $2k$ joueurs disputant k parties. Pour tout $x \notin M$, x a disputé une partie avec l'un des joueurs de M, donc il y a au moins $20 - 2k$ parties entre un joueur de M et un joueur qui n'est pas dans M. Il y a donc en tout au moins $20 - k$ parties, et donc $14 \geqslant 20 - k$, ce qui montre que $k \geqslant 6$.

Autre méthode : soit A l'ensemble des couples ordonnés (x, y) tels que x et y ont joué ensemble. Alors A comporte 28 éléments. Il est aussi égal à la somme $n_1 + \cdots + n_{20}$ où n_i est le nombre de parties joués par le joueur i. Il y a donc au plus 8 joueurs ayant joué au moins deux parties, donc au moins 12 joueurs n'ayant joué qu'une seule partie. Il suffit de sélectionner 6 parties entre des joueurs n'ayant joué qu'une seule partie.

Exercice 9 (non corrigé pendant la séance) Lors d'un stage de mathématiques, les élèves sont répartis dans trois groupes A, B, C comportant chacun n élèves. On suppose que chaque élève connaît au moins $n+1$ élèves appartenant à un autre groupe que lui. Montrer qu'il existe trois élèves, appartenant à des groupes différents, qui se connaissent mutuellement.

Solution de l'exercice 9 Soit k le plus grand entier tel qu'il existe un élève d'un groupe connaissant k élèves d'un second groupe. On peut supposer par exemple que l'élève a du groupe A

connaît k élèves du groupe B. Il connaît donc au moins $n+1-k$ élèves du groupe C. Soit c l'un de ceux-ci. Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas d'élève du groupe B connaissant a et c. Alors c connaît au plus $n-k$ élèves du groupe B, donc au moins $(n+1)-(n-k)=k+1$ élèves du groupe A. Ceci contredit la maximalité de k.

4 samedi 19 après-midi : Eva Philippe

Cette séance a été majoritairement consacrée à des exercices de TD. En deuxième partie nous avons également étudié un peu de dénombrement, avec les coefficients binomiaux. Si vous voulez en savoir un peu plus vous pouvez consulter le cours donné en 2015 à la page 28 du poly correspondant : http://www.animath.fr/IMG/pdf/2015_valbonne.pdf.

Exercices traités en cours

Exercice 1
Soit $n \geq 1$ un entier. On trace n cercles dans le plan. Montrer qu'on peut colorier chaque région du plan ainsi délimitée avec exactement deux couleurs (bleu et rouge en l'occurrence) de manière à ce que deux régions séparées par un arc de cercle soient toujours de couleur différente.

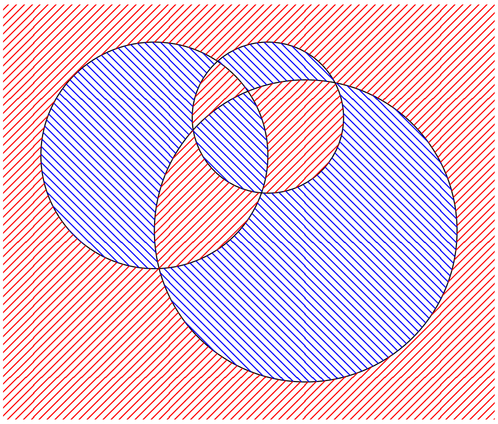


FIGURE.– Exemple de coloriage possible pour $n=3$ cercles

Exercice 2 On écrit sur le tableau les entiers de 1 à 3000. A chaque étape, on en efface deux et on écrit à la place leur différence. Le nombre d'entiers diminue donc de 1. Peut-on obtenir seulement le nombre 1 écrit une seule fois au bout de la 2999ième étape ?

Exercice 3 Une salle de bain rectangulaire est pavée avec des dalles de type 2×2 et 1×4. Une dalle s'est brisée mais il ne nous reste qu'une seule dalle de l'autre type. Peut-on réarranger les dalles de façon à remplacer la dalle brisée avec une nouvelle dalle de l'autre type ?

Exercice 4 Soit n un entier fixé. On considère un ensemble E de $2n+1$ nombres réels tels que à chaque fois qu'on en choisit $n+1$, leur somme est supérieure à la somme des n restants. Montrer que tous les nombres choisis dans E sont positifs.

Exercice 5 Dans un groupe de six personnes, les personnes peuvent être amies ou ennemies en respectant les conditions suivantes :

- ▷ Deux personnes sont toujours soit amies soit ennemies.

▷ Si A est amie (respectivement ennemie) de B, alors B est amie (respectivement ennemie) de A. (On dit que la relation est symétrique.

Montrer qu'il existe un groupe de personnes qui sont toutes amies ou toutes ennemies.

Exercices bonus

Exercice 6 Soit x un nombre réel non nul tel que $x + \frac{1}{x}$ soit un entier. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier.

Exercice 7 Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$. En déduire que cette somme est toujours strictement inférieure à 2.

Solutions

Solution de l'exercice 1 On peut avoir plusieurs idées pour justifier directement le résultat mais elles sont souvent difficiles à justifier rigoureusement. On va présenter ici une preuve par récurrence.

Si l'on n'a qu'un seul cercle, on colorie l'intérieur d'une couleur arbitraire, l'extérieur de l'autre couleur et c'est gagné.

Si on peut toujours colorier n cercles comme voulu, qu'en est-il de $n + 1$ cercles ? Pour colorier les régions comme voulu, on oublie tout d'abord un cercle : il en reste alors n, et on peut colorier les régions correspondantes comme voulu, par hypothèse de récurrence. Puis on rajoute le cercle oublié. Il coupe en deux certaines régions coloriées : on change alors la couleur de chaque région coloriée à l'intérieur de notre cercle, et on garde la couleur initiale pour les autres régions.

Alors, on a bien colorié toutes nos régions comme voulu ! En effet, c'est gagné quand on regarde deux régions séparées par un arc du cercle oublié (grâce au changement qu'on a fait), mais aussi quand on regarde deux régions séparées par un arc d'un autre cercle (par hypothèse de récurrence).

Solution de l'exercice 2 C'est un argument d'invariant de parité qui permet de conclure. Comme la différence de deux entiers a même parité que leur somme, la somme de tous les entiers sur le tableau conserve, à chaque étape du processus, la même parité. Or au départ elle vaut : $1 + 2 + ... + 3000 = \frac{3000 \times 3001}{2}$ qui est pair. Cette somme restera donc toujours paire, et le dernier nombre obtenu sera un nombre pair, ce ne peut pas être 1.

A la place de la parité de la somme totale (mais cela revient strictement au même) on peut aussi utiliser comme invariant la parité du nombre de nombres impairs écrits au tableau. Une disjonction de cas permet de montrer qu'à chaque étape cette parité est préservée, or on commence avec un nombre pair (500) de nombres impairs et on aimerait terminer evec un nombre impair de nombres impairs (1).

Pour prouver que ce peut être 0 (bien que ce ne soit pas demandé), il faudrait un tout autre raisonnement. On grouperait les nombres ainsi : $(1, 2, 3, 4)$, $(5, 6, 7, 8)$, ... $(2997, 2998, 2999, 3000)$. Pour chacun des quadruplets suivants, on remplace $(4n, 4n + 2)$ par 2, $(4n + 1, 4n + 3)$ par 2, puis $(2, 2)$ par 0. Prouver que la réponse est "oui" ou que la réponse est "non" nécessite des raisonnements totalement différents, il est donc impératif de deviner le plus vite possible la bonne réponse car on perd beaucoup de temps lorsqu'on part dans la mauvaise direction.

La technique des invariants est utilisable pour prouver une impossibilité. Pour prouver que quelque chose est possible, habituellement on montre qu'on peut le construire explicitement.

Solution de l'exercice 3 Plusieurs types de coloriages sont possibles pour montrer que l'on ne peut pas remplacer notre dalle brisée, par exemple :

- ▷ On colorie la première ligne en carrés bleus et rouges en commençant par bleu, la deuxième en noir et blanc en commençant par noir. Ensuite on continue avec des lignes alternées bleu-rouge et noir-blanc en commençant toujours par bleu et noir respectivement. Alors les dalles 2×2 couvrent exactement un carré de chaque couleur. Une dalle 4×1 couvre 2 carrés d'une couleur et 2 d'une autre.
- ▷ On découpe notre quadrillage en carrés 2×2 dont on colorie en noir la dalle du coin inférieur droit. Alors une dalle carrée recouvre exactement une dalle noire alors qu'une dalle 4×1 en recouvre 0 ou 2.

Ainsi, les deux types de dalles ne sont pas interchangeables.

Solution de l'exercice 4 *Première solution* On peut penser à isoler un élément extrémum, par exemple le plus petit élément de l'ensemble E. Notons a_0 le plus petit élément de E. On divise les $2n$ nombres restants en deux groupes, l'un dont la somme vaut A et l'autre dont la somme vaut B. Alors, d'après la propriété de notre ensemble on doit avoir à la fois

$$a_0 + A \geq B$$

et

$$a_0 + B \geq A.$$

En sommant ces deux inégalités (on a le droit car les deux inégalités sont dans le même sens) on obtient

$$2a_0 + A + B \geq A + B,$$

d'où en soustrayant $A + B$: $2a_0 \geq 0$ et $a_0 \geq 0$.

Or comme a_0 est le plus petit élément de l'ensemble choisi, on en déduit que tous les nombres sont positifs.

Remarque 2. En fait, on n'a même pas besoin de choisir l'élément le plus petit, le raisonnement ci-dessus fonctionne pour n'importe quel élément de l'ensemble donc ils sont tous positifs.

Deuxième solution On peut aussi faire un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il y ait un nombre négatif dans E, on le note a_0. On définit comme précédemment A et B parmi les éléments restants et on ales mêmes inégalités :

$$a_0 + A \geq B$$

et

$$a_0 + B \geq A.$$

Or, comme a_0 est négatif, on a aussi

$$A < a_0 + A \geq B < a_0 + B,$$

ce qui contredit la deuxième inégalité. Un tel cas de figure n'est donc pas possible, ce qui suppose que tous les éléments de E sont positifs.

Solution de l'exercice 5 On peut représenter la situation décrite de la manière suivante : six points du, notés A, B, C, D, E, F représentent les six personnes. Deux points parmi A, B, C, D, E, F sont toujours reliés par un segment, qui peut être soit rouge si les personnes sont amies, soit bleu si elles sont ennemies. On veut donc montrer qu'il existe un triangle dont les trois arêtes sont de la même couleur.

Depuis A partent au moins trois segments de la même couleur d'après le principe des tiroirs. Sans perte de généralités (c'est-à-dire que les autres possibilités se traitent de la même manière), on peut supposer que les segments $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ sont bleus. Et, si $[BC]$ ou $[CD]$ ou $[DB]$ est bleu, alors ABC ou ACD ou ADB est bleu. Sinon, BCD est rouge, donc il y a bien un triangle monochrome.

Solution de l'exercice 6 Le principe de cet exercice est le suivant : on veut obtenir $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}$ à partir des $x^k + \frac{1}{x^k}$ précédents par des opérations, qui conservent le caractère entier des nombres (addition, soustraction, multiplication).

Or, on constate que :

$$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+2} + x^n + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}} \qquad (\star)$$

A partir de cela, il suffit de supposer que $x^n + \frac{1}{x^n}$ et $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ sont des entiers pour passer la même propriété à $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}$.

Donc on rédige notre récurrence ainsi : soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$: « $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier ».

L'initialisation doit être faite pour $n = 0$ et $n = 1$. Or $x^0 + \frac{1}{x^0} = 2$ est entier et $x + \frac{1}{x}$ aussi, par hypothèse de l'énoncé.

On passe donc à l'hérédité, en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont toutes les deux vraies. Alors, d'après $(*)$, $\mathcal{P}_{n+2}$ est aussi vraie. Ceci conclut par principe de récurrence.

Remarque. D'un point de vue technique, il s'agit ici d'un schéma de récurrence double, qui est un cas simplifié de récurrence forte. C'est pourquoi il faut initialiser au deux premiers rangs (avec un seul rang, on ne peut pas encore déclencher l'hérédité).

Solution de l'exercice 7 Hypothèse de récurrence : au rang n, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$. Initialisation : pour $n = 1$, $1 \leq 2 - \frac{1}{1}$, donc la relation est manifestement vérifiée au rang 1.

Calcul : la relation $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ étant supposée vraie au rang n (hypothèse de récurrence), pour transformer cette relation en la même relation au rang $n+1$, il faut ajouter à gauche $\frac{1}{(n+1)^2}$ et à droite : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ qui est manifestement plus grand. Donc l'inégalité reste vraie, et par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 1$ On en déduit que pour tout $n \geq 1$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$.

2 Groupe A : algèbre

1 vendredi 18 matin : Mathieu Barré

Manipulations algébriques

Calculer avec des lettres nécessite de connaître les quelques identités suivantes. Dans ce qui suit, sauf indication contraire, les lettres employées désignent des réels.

Propriétés à retenir

1. Distributivité : $k(a+b) = ka + kb$.
2. Factorisation du rectangle : $ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d)$.
3. Si a est *positif*, $(a^b)^c = (a^c)^b = a^{bc}$.
4. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
5. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
6. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
7. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$.
8. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3b^2a - b^3$.
9. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
10. De façon plus générale, si n est un entier naturel,
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$
En particulier, en prenant $b = 1$, il vient
$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$$
11. Binôme de Newton : si n est un entier, alors
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Il faut toujours garder à l'esprit les propriétés précédentes afin de les repérer dans les exercices, en général pour obtenir une forme factorisée.

Division polynomiale

Une autre idée pour factoriser des expressions algébriques consiste à généraliser la notion de division pratiquée depuis l'école primaire. En effet, si l'on cherche par exemple à diviser $a^3 - 1$ par $a - 1$, on peut imaginer que $a^3 - 1$ et $a - 1$ sont des entiers et poser la division comme le ferait un écolier. On cherche d'abord à éliminer le terme en a^3 en se posant la question : « Par combien doit-on multiplier $a - 1$ pour pouvoir s'approcher de a^3 ? ». La réponse est a^2 et $a^2(a-1) = a^3 - a^2$. On soustrait alors $a^3 - a^2$ à $a^3 - 1$: les a^3 s'éliminent (c'est fait pour !) et il reste à recommencer cette procédure avec $a^3 - 1 - (a^3 - a^2)$, c'est-à-dire $a^2 - 1$. Les différentes étapes sont récapitulées dans la division posée ci-dessous :

$$\begin{array}{r|l}
a^3 - 1 & a - 1 \\ \cline{2-2}
-(a^3 - a^2) & a^2 + a + 1 \\ \cline{1-1}
a^2 - 1 & \\
-(a^2 - a) & \\ \cline{1-1}
a - 1 & \\
-(a - 1) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

On a donc obtenu : $a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$, ce qui est d'ailleurs une conséquence de la propriété 9 pour $b = 1$.

Continuons à pratiquer ce principe sur un autre exemple : factoriser a^4+4 par a^2-2a+2. En procédant exactement comme précédemment, on obtient successivement :

$$
\begin{array}{r|l}
a^4 + 4 & a^2 - 2a + 2 \\
\cline{2-2}
-(a^4 - 2a^3 + 2a^2) & a^2 + 2a + 2 \\
\cline{1-1}
2a^3 - 2a^2 + 4 & \\
-(2a^3 - 4a^2 + 4a) & \\
\cline{1-1}
2a^2 - 4a + 4 & \\
-(2a^2 - 4a + 4) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

D'où le résultat final $a^4 + 4 = (a^2-2a+2)(a^2+2a+2)$, connu sous le nom d'identité de Sophie Germain.

Nous disposons désormais d'une méthode (voire d'un algorithme) pour effectuer des divisions polynomiales. Cependant, dans les deux exemples précédents, nous avons eu de la chance car le reste des divisions était nul, ce qui est loin d'être toujours le cas. Comment deviner que tel polynôme va pouvoir se factoriser par tel autre ? Le théorème suivant donne un élément de réponse :

ThéorÃ¨me 3. Soit $P(X)$ un polynôme et α une racine de P (c'est-à-dire un réel qui vérifie $P(\alpha) = 0$). Le polynôme $P(X)$ peut alors être factorisé par $X - \alpha$.

Corollaire 4. Un polynôme de degré n a au plus n racines différentes.

Démonstration. La démonstration de ce résultat (ainsi que bien d'autres qui intéresseront le lecteur curieux) peut être trouvée dans le cours d'Igor Kortchemski sur les polynômes, disponible ici. □

On comprend mieux pourquoi le polynôme $Q(a) = a^3 - 1$ peut être factorisé par $a - 1$: c'est que 1 est racine de Q, puisque $Q(1) = 1^3 - 1 = 0$. Le corollaire est également très utile. Effectivement, si on dispose d'un polynôme de degré n dont on connaît exactement n racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, il s'écrira nécessairement sous la forme $(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$, à multiplication par une constante près.

Exemple 5. On sait déjà factoriser le polynôme $P(X) = X^2 - 2$ à l'aide de l'identité remarquable 6, mais tentons d'y parvenir grâce à notre nouveau résultat. On remarque que $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont deux racines de P, qui est de degré 2 : on a donc trouvé toutes ses racines. Le coefficient dominant de P valant 1, on a alors automatiquement $P(X) = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$.

Remarque 6. Montrer au contraire qu'un polynôme ne peut pas être factorisé par des polynômes de degrés inférieurs (on dit qu'il est *irréductible*) est en général un problème difficile.

Inégalités

Les inégalités désignent l'étude de la relation d'ordre entre plusieurs quantités : il s'agit de les comparer, de déterminer lesquels sont les plus grandes, les plus petites, etc.

L'inégalité la plus simple est sans doute le résultat suivant :

ThéorÃ¨me 7. Un carré est toujours positif. Pour tout réel x, on a : $x^2 \geq 0$.

Ce théorème peut paraître évident au premier abord, mais il s'avère extrêmement puissant, pour la simple et bonne raison que beaucoup d'inégalités, aussi sophistiquées soient-elles, peuvent se ramener à ce simple fait.

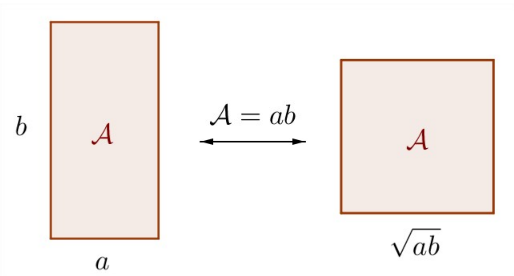
Voyons-en tout de suite une application :

ThéorÃ¨me 8 (Inégalité arithmético-géométrique)**.** Soient a et b deux réels *positifs*. On a :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Démonstration. écrite différemment, cette inégalité équivaut à $a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geq 0$, ce qui n'est rien d'autre que $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. □

Cette inégalité est qualifiée d' « arithmético-géométrique » car elle compare la moyenne arithmétique $\frac{a+b}{2}$ à la moyenne géométrique $\sqrt{ab}$. La moyenne arithmétique est celle utilisée dans la vie de tous les jours : lorsque l'on obtient deux notes a et b, notre note moyenne vaut $\frac{a+b}{2}$. La moyenne géométrique s'interprète de la façon suivante : la longueur du côté d'un carré ayant la même aire qu'un rectangle de côtés de longueur a et b vaut $\sqrt{ab}$.



Elle se généralise naturellement de la manière suivante :

ThéorÃ¨me 9 (IAG généralisée)**.** Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels *positifs*. On a

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n}$$

Ce théorème très puissant relie dans une inégalité la somme et le produit de n variables positives. Il dit en substance :

$$\boxed{\text{Somme de } n \text{ termes} \geq n\sqrt[n]{\text{Produit de ces } n \text{ termes}}}$$

avec égalité si et seulement si toutes les variables sont égales.

Nous insistons sur cette formulation car c'est très souvent celle-là qui est utilisée en pratique.

Démonstration. La façon la plus naturelle d'obtenir ce résultat est d'utiliser la concavité de la fonction logarithme, ce qui sort de l'objet de ce cours. □

Remarque 10. Le terme $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ correspond toujours à notre intuition naturelle de la moyenne. Le terme $\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n}$ s'interprète de façon géométrique comme dans le cas de deux variables. Par exemple, pour $n = 3$, la moyenne géométrique $\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ est la longueur du côté d'un cube ayant le même volume qu'un pavé dont les longueurs des côtés sont x_1, x_2 et x_3. Pour n plus grand, il faut imaginer un pavé à n dimensions dont les « côtés » ont pour longueur $x_1, \ldots, x_n$. Son volume (au sens général du terme) vaudra alors $x_1 \times \cdots \times x_n$, et la longueur d'un cube en n dimensions ayant exactement le même volume vaudra ainsi $\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n}$.

Exercices

Exercice 1 Factoriser $n^5 - 5n^3 + 4n$. Que peut-on en conclure en termes de divisibilité ?

Exercice 2 Résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 - 4y + 21 = 0 \\ y^2 - 6z + 14 = 0 \\ z^2 - 2x - 21 = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a l'inégalité : $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 4 Montrer que pour tous réels positifs a et b, on a : $a^3 + b^3 + a + b \geq 4ab$.

Exercice 5 Montrer que si a, b, c et d sont quatre réels positifs tels que $abcd = 1$, alors

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

Exercice 6 Montrer que pour tous réels positifs a, b et c, on a : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Exercice 7 Soient a et b deux réels positifs et n un entier. Prouver : $\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$.

Solution des exercices

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Une première idée est de faire apparaître des différences de carrés pour pouvoir factoriser l'expression proposée :

$$\begin{aligned} n^5 - 5n^3 + 4n &= n(n^4 - 5n^2 + 4) \\ &= n((n^4 - 4n^2 + 4) - n^2) \\ &= n((n^2 - 2)^2 - n^2) \\ &= n(n^2 - n - 2)(n^2 + n - 2) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Sinon, on peut chercher les racines du polynôme $P(n) = n^5 - 5n^3 + 4n$. On remarque que -2, -1, 0, 1 et 2 sont des racines de P. On a donc trouvé 5 racines d'un polynôme de degré 5 : ce sont les seules ! Comme le coefficient dominant de P vaut 1, on obtient immédiatement $P(n) = (n - (-2))(n - (-1))(n - 0)(n - 1)(n - 2)$.

Ainsi, pour tout entier n, n^5-5n^3+4n est le produit de 5 entiers consécutifs. Parmi ces cinq entiers, au moins l'un d'entre eux sera divisible par 3, au moins un par 5, au moins un par 2 et un autre par 4. De cette façon, n^5-5n^3+4n sera toujours divisible par $3\times 5\times 2\times 4=120$.

Remarque : De façon plus générale, on peut montrer (par exemple avec les coefficients binomiaux ou la formule de Legendre) que le produit de k entiers consécutifs est divisible par $k!$, c'est-à-dire par $1\times 2\times 3\times\cdots\times k$.

Solution de l'exercice 2 Ce système est embêtant car il donne des équations sur les inconnues x, y et z qui les lient deux à deux, avec des degrés différents. Or, pour le résoudre, on aimerait pouvoir isoler chacune des inconnues, ou du moins regrouper les x ensemble, et de même pour y et z. L'astuce consiste alors à remarquer que sommer les trois équations du système permet de reconnaître les débuts d'identités remarquables incluant chacune des inconnues séparément. Par somme, on obtient en effet :

$$(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2-6z)+14=0$$

c'est-à-dire

$$(x-1)^2-1+(y-2)^2-4+(z-3)^2-9+14=0$$

ou encore

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=0$$

ce qui conduit à $x=1$, $y=2$ et $z=3$ (pour qu'une somme de carrés soit nulle, il faut que chacun des termes mis au carré le soit).

L'exercice est-il terminé ? Non, attention ! Nous avons seulement raisonné par implication : *si* x, y et z sont trois solutions du système, *alors* par le raisonnement précédent $x=1$, $y=2$ et $z=3$ (c'est l'analyse). Mais rien ne nous dit que ces trois valeurs conviennent : il nous faut le vérifier (c'est la synthèse). Et en remplaçant dans la première équation, on trouve $1^2-4\times 2+21=0$, ce qui est faux. Il n'y a donc pas de solution au problème proposé.

Remarque : Si on avait remplacé les 21 de la première et de la troisième équation par des 7, la vérification aurait fonctionné.

Solution de l'exercice 3 On peut transformer cette inégalité en carré positif :

$$x+\frac{1}{x}\geq 2\Leftrightarrow x^2+1\geq 2x\Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0\Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$$

De façon équivalente, l'inégalité arithmético-géométrique appliquée à la somme de deux termes que constitue le membre de gauche donne

$$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}=2$$

Solution de l'exercice 4 On utilise l'inégalité arithmético-géométrique sur les quatre termes a^3, b^3, a et b :

$$a^3+b^3+a+b\geq 4\sqrt[4]{a^3\times b^3\times a\times b}=4ab$$

Solution de l'exercice 5 On a une somme de 10 termes, tentons donc d'appliquer l'IAG qui nous souffle

$$\text{Somme de } 10 \text{ termes} \geq 10 \sqrt[10]{\text{Produit de ces } 10 \text{ termes}}$$

ce qui donne ici

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd &\geq 10\sqrt[10]{a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot d^2\cdot ab\cdot ac\cdot ad\cdot bc\cdot bd\cdot cd} \\ &= 10\sqrt[10]{(abcd)^5} = 10 \text{ vu que } abcd = 1 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 Une première possibilité est de tout développer puis d'utiliser l'inégalité arithmético-géométrique sur les 8 termes obtenus :

$$\begin{aligned} (a+b)(b+c)(c+a) &= (ab+ac+b^2+bc)(c+a) \\ &= a^2b+a^2c+ab^2+abc+abc+ac^2+b^2c+bc^2 \\ &\geq 8\sqrt[8]{a^2b\times a^2c\times ab^2\times abc\times abc\times ac^2\times b^2c\times bc^2} \\ &= 8\sqrt[8]{a^8b^8c^8} = 8abc \end{aligned}$$

Une autre solution, plus élégante, est d'appliquer l'IAG à chaque parenthèse du produit :

$$\begin{aligned} (a+b) &\geq 2\sqrt{ab} \\ (b+c) &\geq 2\sqrt{bc} \\ (c+a) &\geq 2\sqrt{ca} \end{aligned}$$

On observe alors que le produit de ces trois inégalités donne le résultat attendu.

Solution de l'exercice 7 Tentons d'appliquer l'IAG au membre de gauche, qui est composé d'une somme de 2 termes :

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n &\geq 2\sqrt{\left(1+\frac{a}{b}\right)^n\times\left(1+\frac{b}{a}\right)^n} \\ &= 2\sqrt{\left[\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^n} \\ &= 2\sqrt{\left(2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^n} \end{aligned}$$

On se souvient alors de l'exercice 3 : la somme d'un nombre et de son inverse est toujours supérieure à 2. On a donc : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, ce qui conduit enfin à

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2\sqrt{(2+2)^n} = 2^{n+1}$$

2 samedi 19 matin : Henry Bambury

Échauffement

Exercice 1 Soit $a > b > 0$, montrer que

$$4a^3(a-b) \geq a^4 - b^4$$

Solution de l'exercice 1 On factorise $a^4 - b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.
Ainsi comme $a > b$, l'inégalité se réécrit :

$$4a^3 \geq (a+b)(a^2+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$$

Or $a > b > 0$ donc $a^3 \geq b^3$, $a^3 \geq a^2b$, $a^3 \geq ab^2$. Sommer les trois dernières inégalités permet de conclure.

Inégalité Arithmético-Géométrique

Exercice 2 On considère $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs, montrer l'inégalité géométrico-harmonique :

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

Solution de l'exercice 2 On réécrit l'inégalité comme suit :

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \times \cdots \times \frac{1}{a_n}}$$

C'est exactement IAG appliquée aux réels positifs $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$.

Découpage **Exercice 3** Démontrer que pour a, b, c des réels positifs,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Solution de l'exercice 3 Ici l'idée est de découper pour "faire apparaître" des termes sur le côté gauche afin de pouvoir appliquer l'IAG sur chaque morceau.

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2}$$

D'après l'IAG, $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} = ab$. On fait de même avec (b, c) et (c, a).
En sommant les trois inégalités ainsi obtenues, on a prouvé le résultat demandé.

Exercice 4 Démontrer que pour x, y, z des réels positifs,

$$x^2 + y^4 + z^6 \geq xy^2 + y^2z^3 + xz^3$$

Solution de l'exercice 4 De même que pour l'exercice précédent,

$$x^2+y^4+z^6=\frac{x^2+y^4}{2}+\frac{y^4+z^6}{2}+\frac{z^6+x^2}{2}\geq\sqrt{x^2y^4}+\sqrt{y^4z^6}+\sqrt{z^6x^2}=xy^2+y^2z^3+xz^3$$

Exercice 5 Démontrer que pour u,v des réels positifs,

$$u^3+v^3\geq u^2v+v^2u$$

Solution de l'exercice 5 Ici le découpage est un peu plus compliqué, on utilise l'IAG sur chacun :

$$u^3+v^3=\frac{u^3+u^3+v^3}{3}+\frac{u^3+v^3+v^3}{3}\geq\sqrt[3]{u^3u^3v^3}+\sqrt[3]{u^3v^3v^3}=u^2v+uv^2$$

Exercice 6 Montrer que pour $x\geq 0$,

$$1+x^{2018}\geq\frac{4x^{2017}}{1+x^{2016}}$$

Solution de l'exercice 6 D'après IAG, $1+x^{2018}\geq 2x^{\frac{2018}{2}}$ et $1+x^{2016}\geq 2x^{\frac{2016}{2}}$.

Par produit

$$(1+x^{2018})(1+x^{2016})\geq 4x^{2017}$$

.

En divisant par $1+x^{2016}$, on obtient le résultat souhaité.

Exercice 7 Montrer que pour $x\geq 0$,

$$1+x^{2018}\geq\frac{(2x)^{2017}}{(1+x)^{2016}}$$

Solution de l'exercice 7 D'après IAG, $1+x^{2018}\geq 2x^{\frac{2018}{2}}$ et $1+x\geq 2x^{\frac{1}{2}}$. Ainsi en multipliant la première inégalité avec la deuxième mise à la puissance 2016, on obtient :

$$(1+x^{2018})(1+x)^{2016}\geq 2x^{\frac{2018}{2}}\times 2^{2016}x^{\frac{2016}{2}}=(2x)^{2017}$$

En divisant par $(1+x)^{2016}$, on obtient le résultat souhaité.

Exercice 8 Soient $a_1,a_2,\ldots,a_n$ des réels positifs tels que $a_1a_2\ldots a_n=1$

Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n}(2+a_i)\geq 3^n$$

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> On va appliquer l'inégalité terme à terme :

$$2 + a_i = 1 + 1 + a_i \geq 3\sqrt[3]{a_i}$$

Ainsi par produit

$$\prod_{i=1}^{n}(2 + a_i) \geq 3^n\sqrt[3]{a_1 \dots a_n} = 3^n$$

car $a_1 \dots a_n = 1$

Exercice 9 Soit $a > 1$ et $b > 1$, montrer que

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$$

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Par IAG,

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 2\frac{ab}{\sqrt{(a-1)(b-1)}} = 2\sqrt{\frac{a^2}{a-1}}\sqrt{\frac{b^2}{b-1}}$$

Comme $(a-2)^2 \geq 0$, alors $a^2 \geq 4(a-1)$ et comme $a > 1$, $\frac{a^2}{a-1} \geq 4$.
On a le même résultat pour b, donc

$$2\sqrt{\frac{a^2}{a-1}}\sqrt{\frac{b^2}{b-1}} \geq 2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{4} = 8$$

Ce qui permet de conclure.

Démonstration de l'IAG Pour $n > 1$, on pose $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante : "Pour tout n-uplet de réels positifs $(a_1, \dots, a_n)$, leur moyenne arithmétique est supérieure à leur moyenne géométrique".

On va procéder par récurrence, en initialisant, puis en montrant qu'en supposant $\mathcal{P}_n$ pour un $n \geq 2$, on peut obtenir $\mathcal{P}_{2n}$ et $\mathcal{P}_{n-1}$. On laisse au lecteur le soin de se convaincre que cela suffit pour démontrer l'IAG dans le cas général.

▷ <u>Initialisation</u> : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_2$ est vraie, en effet pour deux réels positifs a_1, a_2,

$$a_1 - 2\sqrt{a_1a_2} + a_2 = (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$$

D'où

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$$

▷ <u>Hérédité 1</u> : on suppose qu'il existe un entier naturel $n \geq 2$ tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{2n}$ est aussi vraie.
Soit $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ des réels positifs.

$$\frac{a_1 + \dots + a_{2n}}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}\right)$$

Par hypothèse de récurrence, $\frac{a_1+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$ et $\frac{a_{n+1}+\dots+a_{2n}}{n} \geq \sqrt[n]{a_{n+1} \dots a_{2n}}$

On utilise alors IAG pour 2 variables (Initialisation) et l'on a

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{2n}}{2n} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}}}{n}\right) \geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \ldots a_{2n}}} = \sqrt[2n]{a_1 \ldots a_{2n}}$$

▷ Hérédité 2 : on suppose qu'il existe un entier naturel $n \geq 3$ tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n-1}$ est aussi vraie. Soit $a_1, \ldots a_{n-1}$ des réels positifs. On note $\mathcal{M} = \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}$.
On applique l'hypothèse de récurrence avec $a_1, \ldots, a_{n-1}, \mathcal{M}$:

$$\frac{1}{n}\left(a_1 + \cdots + a_{n-1} + \mathcal{M}\right) \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_{n-1}\mathcal{M}}$$

Or

$$\frac{1}{n}\left(a_1 + \cdots + a_{n-1} + \mathcal{M}\right) = \frac{(n-1)\mathcal{M} + \mathcal{M}}{n} = \mathcal{M}$$

Donc

$$\mathcal{M} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_{n-1}\mathcal{M}}$$

D'où $\mathcal{M}^n \geq a_1 \ldots a_{n-1} \times \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^{n-1} \geq a_1 \ldots a_{n-1}$ et ainsi :

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}}$$

▷ Conclusion : L'IAG est prouvée dans le cas général.

Inégalité des mauvais élèves

ThéorÃ¨me 11. Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels et $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Alors

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{x_1 + \ldots + x_n}$$

Démonstration. Pour $n > 1$, on pose $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante : "Pour tout n-uplet de réels $(a_1, \ldots, a_n)$, et pour tout n-uplet de réels strictement positifs $(x_1, \ldots, x_n)$,

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{x_1 + \ldots + x_n}$$

".

On va procéder par récurrence, en initialisant, puis en montrant qu'en supposant $\mathcal{P}_n$ pour un $n \geq 2$, on peut obtenir $\mathcal{P}_{n+1}$.

▷ Initialisation : Soient a_1, a_2 des réels et x_1, x_2 des réels positifs strictement.

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} \geq \frac{(a_1 + a_2)^2}{x_1 + x_2}$$

Se réécrit

$$a_1^2 x_2(x_1 + x_2) + a_2^2 x_1(x_1 + x_2) \geq (a_1 + a_2)^2 x_1 x_2$$

Puis

$$a_1^2 x_1 x_2 + a_1^2 x_2^2 + a_2^2 x_1^2 + a_2^2 x_1 x_2 \geq a_1^2 x_1 x_2 + a_2^2 x_1 x_2 + 2a_1 a_2 x_1 x_2$$

Soit

$$(a_1x_2 - a_2x_1)^2 \geq 0$$

Ceci conclut l'initialisation.

- ▷ Hérédité : Soit $n > 1$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Soient $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des réels et $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des réels positifs strictement. Par hypothèse de récurrence et en appliquant l'initialisation,

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}} \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + \cdots + x_n} + \frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}} \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_{n+1})^2}{x_1 + \cdots + x_{n+1}}$$

- ▷ Conclusion : L'inégalité des mauvais élèves est prouvée dans le cas général.

□

Exercice 10 Soient a, b, c, d des réels strictement positifs, démontrer que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

Solution de l'exercice 10 On réécrit l'inégalité sous la forme

$$\frac{1^2}{a} + \frac{1^2}{b} + \frac{2^2}{c} + \frac{4^2}{d} \geq \frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d}$$

ce qui est exactement l'inégalité des mauvais élèves.

Exercice 11 x, y, z des réels strictement positifs, montrer que

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{x+z} + \frac{2}{y+z} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

Solution de l'exercice 11 Solution 1 :

$$2 \times \left(\frac{1^2}{x+y} + \frac{1^1}{x+z} + \frac{1^2}{y+z}\right) \geq 2 \times \frac{(1+1+1)^2}{2 \times (x+y+z)}$$

Solution 2 :

$$\frac{\sqrt{2}^2}{x+y} + \frac{\sqrt{2}^2}{x+z} + \frac{\sqrt{2}^2}{y+z} \geq \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}{2 \times (x+y+z)}$$

Exercice 12 Soient a, b, x, y, z des réels strictement positifs, montrer que

$$\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \geq \frac{3}{a+b}$$

Solution de l'exercice 12

$$\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} = \frac{x^2}{axy+bxz} + \frac{y^2}{ayz+bxy} + \frac{z^2}{axz+byz}$$

D'après mauvais élèves,

$$\frac{x^2}{axy+bxz} + \frac{y^2}{ayz+bxy} + \frac{z^2}{axz+byz} \geq \frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+xz)}$$

Il reste a montrer que $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+xz)$, soit en développant $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz$, ce qui est un des exercices précédents.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

ThéorÃ¨me 12. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels, alors

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2$$

Exercice 13 Montrer que pour $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs,

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> C'est un cas particulier de Cauchy-Schwarz :

$$(\sqrt{a_1}^2 + \cdots + \sqrt{a_n}^2)\left(\sqrt{\frac{1}{a_1}}^2 + \cdots + \sqrt{\frac{1}{a_n}}^2\right) \geq (1 + \cdots + 1)^2$$

Exercice 14 Remarquer que l'inégalité des mauvais élèves n'est qu'une reformulation de Cauchy-Schwarz.

3 Groupe B : logique et stratégies de base

1 jeudi 17 matin : Martin Rakovsky

Ce cours reprend celui inimitable donné par Vincent Jugé au stage olympique de Montpellier en 2013, que l'on peut trouver dans le polycopié correspondant à la page 26.

2 vendredi 18 matin : Henry Bambury

Les exercices 11, 15, 16, 19, 20 *n'ont pas été traités en cours*

Coefficients binomiaux

Définition 13. Le nombre de façons de choisir k éléments parmi n se note $\binom{n}{k}$ et se prononce "k parmi n". On dit que $\binom{n}{k}$ est un coefficient binomial.

Exercice 1 Combien y a-t-il de chemins sur une grille $n \times n$ pour passer du point $(0;0)$ au point $(n;n)$ en n'utilisant que des déplacements de 1 vers le haut ou de 1 vers la droite ?

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Cela revient à créer un mot de $2n$ lettres contenant n lettres D et n lettres H, il y a $\binom{2n}{n}$ manières de choisir n emplacements pour les lettres D donc $\binom{2n}{n}$ chemins possibles.

ThéorÃ¨me 14. Pour $n \in N$, $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Démonstration. Une liste ordonnée de k éléments pris parmi n peut être constituée en choisissant le premier élément parmi n, (n choix possibles), puis le deuxième élément parmi $n-1$ ($n-1$ choix possibles), etc, le dernier élément étant choisi parmi $n-k+1$ éléments. Il existe donc $n(n+1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ listes ordonnées de k éléments pris parmi n. Mais on peut aussi choisir d'abord le sous-ensemble des k éléments parmi n ($\binom{n}{k}$ choix possibles) puis ordonner l'ensemble pour constituer une liste ($k!$ ordres possibles). Il existe donc $\binom{n}{k} \times k!$ listes ordonnées de k éléments pris parmi n. En combinant ces deux résultats, la formule est établie. □

Exercice 2 Montrer que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On veut choisir $k+1$ éléments parmi $n+1$. Si l'on choisit le premier, il reste k éléments à choisir parmi n, sinon il reste $k+1$ éléments à choisir parmi n.

On peut aussi raisonner par le calcul.

Cette relation permet de construire le triangle de Pascal construit de proche en proche en plaçant des 1 aux extrémités et en additionnant les deux coefficients au dessus de celui souhaité pour l'obtenir. La ligne numérotée n permet alors de lire les $n+1$ coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$.

$$\begin{array}{c}
\binom{n}{k} \\
\binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \\
\binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \\
\binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \\
\binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \\
\binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \\
\binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k}
\end{array}$$

ThéorÃ¨me 15. Binome de Newton Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercice 3 Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> On applique le binome de Newton avec $a = b = 1$. On peut aussi dire que pour prendre un poignée de crayons dans une trousse de n crayons, on en prend 0 ($\binom{n}{0}$

choix), 1 ($\binom{n}{1}$ choix),..., ou n ($\binom{n}{n}$ choix), il y a donc $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$ possibilités. Or pour chaque crayon, on peut décider de soit le prendre, soit le laisser, ce qui fait 2^n choix.

Principe des tiroirs Le principe des tiroirs peut s'énoncer comme suit :

ThéorÃ¨me 16. Pour n un entier naturel, si l'on range $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

Ce principe à première vue paraît évident et presque inutile. Pourtant il est utile dans un grand nombre d'exercices et s'il est bien appliqué, il permet de résoudre des problèmes d'olympiades des plus compliqués.

On dispose aussi d'une version plus générale :

ThéorÃ¨me 17. Pour n, m des entiers naturels, si l'on range n chaussettes dans m tiroirs, alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ chaussettes.

Voici quelques exercices d'application :

Exercice 4 La ville de Paris contient plus de 2 millions d'habitants. On suppose qu'un être humain possède au plus 150000 cheveux. Montrer qu'il existe deux parisiens qui ont le même nombre de cheveux. Peut-on dire mieux ?

Solution de l'exercice 4 Ici on considère les 150001 tiroirs suivants : "avoir 0 cheveux", "avoir 1 cheveu",...,"avoir 150000 cheveux", ainsi que les 2000000 de chaussettes correspondant aux habitants. Il y a donc au moins $\lceil \frac{2000000}{150001} \rceil = 14$ parisiens qui ont le même nombre de cheveux.

Exercice 5 Montrer que dans un groupe de n personnes, il en existe deux qui ont le même nombre d'amis dans ce groupe.

Solution de l'exercice 5 On considère bien sÃ»r que la relation d'amitié est réciproque (Si A est ami avec B, alors B est aussi ami avec A).
Le groupe contient n personnes, et une personne peut avoir entre 0 et $n-1$ amis. Mais si une personne n'est amie avec aucune autre, alors personne ne peut avoir $n-1$ amis, et inversement. On a donc n personnes et seulement $n-1$ nombres d'amis possibles, ainsi d'après le principe des tiroirs, Deux personnes dans le groupe ont exactement le même nombre d'amis.

Exercice 6 Montrer qu'il existe une infinité de nombres composés uniquement de 0 et de 1 en base décimale divisibles par 2017.

Solution de l'exercice 6 On considère les éléments de l'ensemble suivant : $\mathcal{E} = \{1, 11, 111, \ldots\}$, ce sont nos chaussettes. On prend pour tiroirs l'ensembles des restes possibles dans la division euclidienne par 2017, il y en a 2017. On peut donc trouver deux nombres distincts de E qui ont le même reste modulo 2017. La différence du plus grand par le plus petit donne un nombre de la forme $111\ldots11000\ldots000$, divisible par 2017. Pour en avoir une infinité, il suffit de rajouter des 0 à droite.

Exercice 7 On colorie tous les points du plan en rouge et bleu. Montrer que pour tout réel strictement positif x, il existe une couleur telle qu'il existe deux points de cette couleur à distance exactement x l'un de l'autre.

Solution de l'exercice 7 Soit x un réel strictement positif, on trace un triangle équilatéral de côté

x, alors deux de ses sommets ont la même couleur, et ils sont à distance exactement x l'un de l'autre.

Exercice 8 Soit n un entier. On choisit $n+1$ nombres parmi $1, 2, \ldots, 2n$, montrer que l'on peut en trouver deux premiers entre eux. Montrer qu'on peut aussi en trouver deux tels que l'un divise l'autre.

Solution de l'exercice 8 D'après le principe des tiroirs, il y a deux nombres consécutifs, donc premiers entre eux.
Chaque nombre de $\{1, \ldots, 2n\}$ peut s'écrire sous la forme $2^k(2s+1)$ avec s qui peut varier entre 0 et $n-1$. Par principe des tiroirs, il y a donc deux nombres distincts qui possèdent le même s dans cette décomposition, il est alors clair que l'un est multiple de l'autre (à une puissance de 2 près).

Exercice 9 On place 51 points au hasard dans un carré de côté 1. Montrer qu'on peut en trouver au moins 3 à l'intérieur d'un cercle de côté $\frac{1}{7}$.

Solution de l'exercice 9 On découpe le carré en 25 petits carrés de côté 0.2 (On fait attention aux bords en commun de ces petits carrés afin d'avoir une véritable partition du grand carré en 25 zones). D'après le principe des tiroirs, il existe un petit carré contenant 3 points. Or il a pour diagonale $\frac{\sqrt{2}}{5}$, ce qui est inférieur au diamètre d'un cercle de rayon $\frac{1}{7}$, chaque petit carré est donc contenu dans un tel cercle, d'où le résultat.

Exercice 10 On choisit dix entiers quelconques à 2 chiffres. Montrer que parmi eux, on peut trouver deux sous-ensembles disjoints d'entiers de même somme.

Solution de l'exercice 10 Combien peut-on trouver de sous-ensembles de notre ensemble de dix entiers ? Pour chacun des dix entiers, on peut le choisir ou ne pas le choisir, ce qui constitue dix choix binaires indépendants. Il y a donc $2^10 = 1024$ sous-ensembles possibles. Et combien y a-t-il de sommes distinctes d'éléments d'un tel sous-ensemble ? En tout cas moins que mille. La plus grande somme possible est : $99 + 98 + \ldots + 90 < 1000$, et la plus petite est $10 + \ldots + 19$. Donc deux sous-ensembles A et B auront même somme. Rien ne prouve qu'ils sont disjoints, mais ils sont distincts, et s'ils ont une intersection non vide C, en retirant de chacun d'eux les éléments de l'intersection, les sous-ensembles restants deviendront disjoints, et ils auront encore même somme car chaque somme sera diminuée de la somme des éléments de l'intersection.

Exercice 11 Montrer que pour tout irrationnel $x \in \mathbb{R}$ positif, il existe une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$ tels que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

.

Solution de l'exercice 11 Pour un réel y, on note $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$ la partie fractionnaire de y. Soit n un entier naturel à fixer plus tard (qui permettra de fixer la précision de notre approximation). Considèrons les $n+1$ chaussettes définies par $0, \{x\}, ..., \{nx\}$ que l'on répartit en les n tiroirs $[\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}[$ où r est un entier entre 0 et $n-1$. Il existe donc deux indices $0 \leq k < l \leq n$ tels que $\{kx\}$ et $\{lx\}$ soient dans le même tiroir. On a alors $|lx - kx| < \frac{1}{n}$. En notant $p = \lfloor lx \rfloor - \lfloor kx \rfloor$, on trouve : $|(l-k)x - p| < \frac{1}{n}$. On pose alors $q = l - k$, $q \leq n$, ce qui permet d'écrire : $|x - pq| < \frac{1}{nq} < \frac{1}{q^2}$. Ceci prouve l'existence d'une approximation de x par un rationnel avec une précision $\frac{1}{n}$. Pour n suffisamment grand, cela impose une meilleure approximation que celle précédemment trouvée. En réitérant, on exhibe ainsi une infinité de solutions.

Principe de récurrence La récurrence est un principe de raisonnement mathématique, utile dans de nombreux domaines, notamment en combinatoire et en arithmétique.

Elle s'appuie sur l'idée que l'on peut parcourir l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ de la manière suivante : on part de 0, puis on va en $0+1=1$, puis en $1+1=2$, puis en $2+1=3$... et ainsi de suite, à chaque fois qu'on se trouve en un entier donné n (autrement dit, à chaque fois qu'on se place au rang n), on peut aller à l'entier suivant, qui sera $n+1$.

Définitions et notations. Ce qui est alors intéressant, c'est qu'on peut définir des objets qui dépendent de notre entier n. Par exemple, on peut procéder ainsi : à chaque fois qu'on se place en un entier n, on choisit un nombre et on dit qu'on l'associe à notre entier n. Pour bien souligner cette association entre le nombre choisi et l'entier n sur lequel on était placé lorsqu'on a choisi le nombre, on note u_n le nombre associé à l'entier n.

Quand on regarde u_0, puis u_1, puis u_2,..., et ainsi de suite tous les u_n que l'on a définis, on définit en fait une suite de nombres, notée en l'occurrence (u_n). Il ne faut pas confondre la suite, notée (u_n), qui est la succession de tous les nombres, et le terme de la suite au rang n, noté u_n, qui n'est qu'un seul nombre.

Enfin, on peut aussi procéder ainsi : à chaque fois que l'on se place en un entier n, on choisit non pas un nombre, mais une propriété ; autrement dit, on associe à chaque entier n une propriété. On note alors $\mathcal{P}_n$ la propriété associée à l'entier n.

Considérons une propriété *dépendant* d'un entier n, notée $\mathcal{P}_n$.

Pour montrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie *pour tout* n , on peut s'appuyer sur la description précédente de $\mathbb{N}$. Ainsi, on peut représenter la situation par un escalier, dont la n-ième marche correspond à la propriété $\mathcal{P}_n$.

- ▷ On commence par vérifier que la propriété P_0 est vraie (l'escalier repose sur un sol ferme !).
- ▷ Ensuite, on démontre que : si la propriété est vraie pour un entier donné n, alors elle est encore vraie pour l'entier suivant $n+1$ (d'une marche à l'autre, il n'y a qu'un pas... à franchir !).

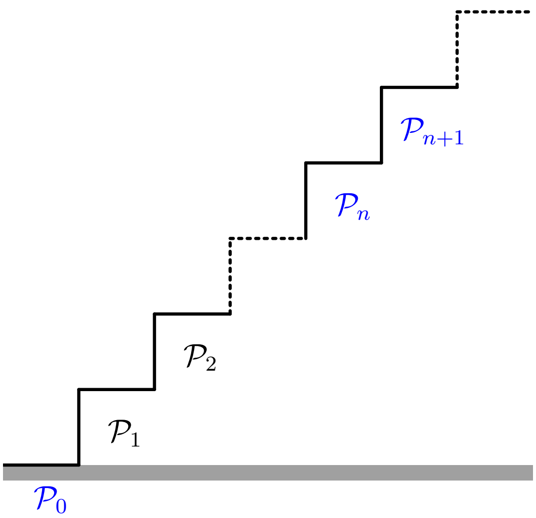


FIGURE.– Escalier de récurrence

Plus formellement, un raisonnement par récurrence se rédige ainsi :

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$: « ... ».
Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ▷ Initialisation : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- ▷ Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel n tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie.

Remarques.

(i) L'entier n dont on parle dans l'hérédité est fixé arbitrairement : ce n'est pas un entier naturel explicite comme $0, 1$ ou 42, mais un entier naturel pour lequel on sait uniquement que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie (c'est ainsi qu'on le définit).

(ii) Il existe de nombreuses variantes du raisonnement par récurrence. Notamment :

- **Récurrence à partir d'un certain rang.**
  Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n supérieur ou égal à un entier k donné (qui ne vaut pas forcément 0) :
  - ▷ Initialisation : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie.
  - ▷ Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel $n \geq k$ tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie.
- **Récurrence finie.**
  Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n tel que $0 \leq n \leq N$ (où $N \in \mathbb{N}$ est un rang fixé) :
  - ▷ Initialisation : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
  - ▷ Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel $n \leq N - 1$ tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie.
- **Récurrence forte.**
  Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n, quand $\mathcal{P}_n$ ne suffit pas à prouver $\mathcal{P}_{n+1}$, on peut aussi procéder ainsi :
  - ▷ Initialisation : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
  - ▷ Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel n tel que les propriétés $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$, ..., $\mathcal{P}_n$ sont toutes vraies. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie.
- **Récurrence descendante.**
  On préfère ce type de récurrence quand la propriété est difficile à initialiser en 0 : voir pour exemple l'exercice 7.
  Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n tel que $0 \leq n \leq N$ (où $N \in \mathbb{N}$ est un rang fixé) :
  - ▷ Initialisation : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_N$ est vraie.
  - ▷ Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel $1 \leq n \leq N$ tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n-1}$ est aussi vraie.

Exercice 12 Trouver et prouver avec l'aide de la récurrenceune formule explicite pour $1 + 2 + \ldots + n$.

Solution de l'exercice 12 Après quelques exemples au brouillon, on a envie de prouver la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante pour $n \in \mathbb{N}$: "$1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$"

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ▷ Initialisation : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie, en effet $0 = 0 \times 1/2$.
- ▷ Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel n tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie.

$$(1 + ... + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

- ▷ Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 13 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solution de l'exercice 13 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}_n = "1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}"$$

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ▷ Initialisation : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie, en effet $0 = 0 \times 1 \times 1/6$.
- ▷ Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel n tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{2n^2+n}{6} + n + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)}{6}(2n^2+7n+6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

- ▷ Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 14 Montrer que pour tout $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

Solution de l'exercice 14 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}_n = "2^n \geq n^2"$$

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ▷ Initialisation : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_4$ est vraie, en effet $2^4 \geq 4^2$.
- ▷ Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel $n \geq 4$ tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie.

$$\begin{aligned}2^{n+1} &= 2^n \times 2 \geq 2n^2 = 2n^2 + (n+1)^2 - n^2 - 2n - 1 \\ &= (n+1)^2 + (n^2 - 2n - 1) = (n+1)^2 + ((n-1)^2 - 2) \geq (n+1)^2\end{aligned}$$

  $((n-1)^2 - 2 \geq 0$ car $n \geq 4)$
- ▷ Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n^2$.

Exercice 15 Dans un certain pays, deux villes sont toujours reliées soit par une ligne aérienne, soit un canal navigable (à double sens). Montrer qu'il est possible de choisir un moyen de transport, tel que, en partant de n'importe quelle ville, on puisse atteindre n'importe quelle autre ville uniquement à l'aide de ce moyen de transport.

Solution de l'exercice 15 Notons n le nombre de villes. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante : "Pour toute configuration de n villes, il existe un moyen de transport vérifiant les conditions requises".

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

- ▷ Initialisation : $\mathcal{P}_2$ est clairement vérifiée.
- ▷ Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel $n \geq$ tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie. Considérons A une ville quelconque et appliquons la propriété $\mathcal{P}_n$ à la configuration des n villes restantes. Sans perte de généralité, supposons que c'est l'avion qui convient. Alors : soit il existe une ligne aérienne reliant A à une autre ville, auquel cas l'avion convient, soit A est relié à toutes les autres villes par un canal, auquel cas le bateau convient. Dans les deux cas, l'hérédité est vérifiée.

Exercice 16 Soit x un réel non nul tel que $x + \frac{1}{x}$ soit un entier, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est aussi un entier.

Solution de l'exercice 16

Le principe de cet exercice est le suivant : on veut obtenir $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}$ à partir des $x^k + \frac{1}{x^k}$ précédents par des opérations, qui conservent le caractère entier des nombres (addition, soustraction, multiplication).

Or, on constate que :

$$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+2} + x^n + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}} \qquad (\star)$$

A partir de cela, il suffit de supposer que $x^n + \frac{1}{x^n}$ et $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ sont des entiers pour passer la même propriété à $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}$.

Donc on rédige notre récurrence ainsi : soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$: « $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier ».

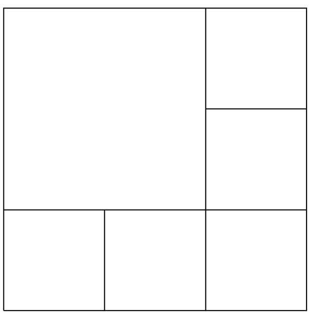
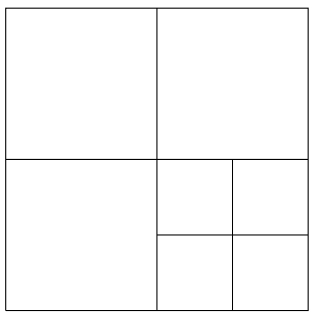
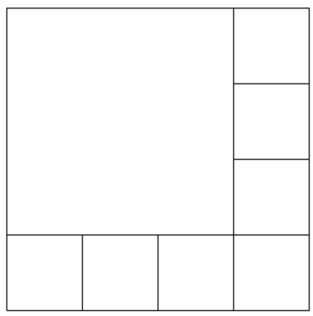
L'initialisation doit être faite pour $n = 0$ et $n = 1$. Or $x^0 + \frac{1}{x^0} = 2$ est entier et $x + \frac{1}{x}$ aussi, par hypothèse de l'énoncé.

On passe donc à l'hérédité, en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont toutes les deux vraies. Alors, d'après $(*)$, $\mathcal{P}_{n+2}$ est aussi vraie. Ceci conclut par principe de récurrence.

Remarque. D'un point de vue technique, il s'agit ici d'un schéma de récurrence double, qui est un cas simplifié de récurrence forte. C'est pourquoi il faut initialiser au deux premiers rangs (avec un seul rang, on ne peut pas encore déclencher l'hérédité).

Exercice 17 Montrer que pour tout $n > 5$, il est possible de découper un carré en n carrés plus petits. Montrer que ceci est impossible pour $n = 2$ et $n = 3$.

Solution de l'exercice 17 Si l'on a un découpage pour un carré en n carrés, alors on en a un pour un carré de côté $n+3$, il suffit de découper un des petits carrés du découpage en 4, on gagne 3 carrés ! Reste à initialiser convenablement, c'est a dire trouver un découpage convenable pour $n = 6$, $n = 7$ et $n = 8$.

Les figures ci-dessus exposent des découpages qui conviennent.
Voyons comment rédiger cette récurrence plus proprement : on initialise en prouvant que le découpage est possible aux rangs $6, 7$ et 8. Maintenant, soit n plus grand que 8, supposons que le découpage est possible à tous les rangs compris entre 6 et n. Alors en particulier le découpage est possible au rang $n-2$ (car comme $n \geq 8, n-2 \geq 6$), et en découpant en 4 un carré du découpage en $n-2$ carrés, on obtient un découpage en $n+1$ carrés, ce qui clôt la récurrence.
Pour montrer que c'est impossible pour 2 ou 3, utilisons le principe des tiroirs. Supposons que l'on ait un découpage en 3 (ou 2) carrés, alors par principe des tiroirs un de ces 3 (ou 2) carrés comporte 2 des sommets du carré d'origine, contradiction.

Exercice 18 On pose pour $n \geq 1$:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$$

Montrer que pour tout $n \geq 2$, H_n réduit sous forme irréductible admet un numérateur impair et un dénominateur pair.

<u>*Solution de l'exercice 18*</u>

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n =$ "La fraction $\mathcal{H}_n$ sous forme irréductible admet un numérateur impair et un dénominateur pair"

Montrons par récurrence forte que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ▷ <u>Initialisation</u> : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_2$ est vraie, en effet $\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}$.
- ▷ <u>Hérédité</u> : on suppose qu'il existe un entier naturel n tel que la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout k entre 2 et n. On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie. Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{H}_n = \frac{i}{p}$ avec i impair et p pair. Alors

$$\mathcal{H}_{n+1} = \frac{i}{p} + \frac{1}{n+1} = \frac{i(n+1)+p}{p(n+1)}$$

  Si n est pair, le tour est joué. Sinon si n est impair, $n = 2m-1$ avec $2 \leq m \leq n$ un entier.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{n+1} &= 1 + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2m} \\ &= \frac{a}{b} + \frac{1}{2} \times \mathcal{H}_m\end{aligned}$$

  Où a est entier et b est impair.
  Par hypothèse de récurrence forte, $\mathcal{H}_m = \frac{p'}{q'}$ avec p' impair et q' pair et $p' \wedge q' = 1$.
  Ainsi

$$\mathcal{H}_{n+1} = \frac{2aq' + bp'}{2bq'}$$

  Avec le numérateur impair et le dénominateur impair. La réduction éventuelle sous forme irréductible conserve la parité, d'où la validité de l'hérédité.
- ▷ <u>Conclusion</u> : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$ s'écrit comme quotient d'un impair par un pair sous forme irréductible.

Exercice 19 Dans un polygone convexe à $n \geq 4$ sommets on trace des diagonales de sorte que deux quelconques d'entre elles ne s'intersectent pas (sauf peut-être aux extrémités). Montrer qu'il existe deux sommets non adjacents du polygone dont ne part aucune diagonale.

Solution de l'exercice 19 Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre de sommets. Pour $n = 4$ c'est clair. Supposons que ce soit vrai pour tous les polygones à n sommets, et considérons un polygone à $n + 1$ sommets. Si aucune diagonale n'a été tracée, on a fini. Sinon, choisissons l'une des diagonales tracées, et appelons A et B ses extrémités. Elle coupe le polygone en deux plus Â« petits Â»polygones convexes de strictement moins de $n+1$ sommets, et chaque autre diagonale choisie appartient à seulement un de ces deux Â« petits Â» polygones, vu qu'elle ne peut intersecter la diagonale $[AB]$. Si l'un de ces deux Â« petits Â» polygones est un triangle, on a déjà un sommet non utilisé et il reste à en trouver un autre. Par hypothèse de récurrence, dans l'autre plus Â« petit Â»polygone, il existe deux sommets adjacents non utilisés. Or A et B sont des sommets adjacents de ce Â« petits Â»polygone, donc par le principe des tiroirs, un des sommets non utilisé n'est ni A ni B donc c'est gagné. Si aucun des Â« petits Â»polygones n'est un triangle, il existe deux sommets non adjacents non utilisés dans chacun d'eux. Comme avant, A et B sont des sommets adjacents dans chacun de ces deux Â« petits Â» polygones. Donc par le principe des tiroirs, dans chaque Â« petit Â» polygone, il existe au moins un sommet non utilisé différent de A et B, et donc aussi non utilisé dans le grand polygone et c'est gagné aussi.

Exercice 20 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On place $2n$ points dans l'espace, et $n^2 + 1$ segments entre ces points. Montrer que l'on a tracé au moins un triangle.

Solution de l'exercice 20 L'initialisation se fait pour $n = 2$: on a 4 points et 5 segments. Or, il existe exactement 6 segments distincts reliant 4 points. Donc on a oublié de tracer exactement un segment, notons-le $[AB]$. Si C et D sont nos deux autres points, les triangles ACD et BCD sont complets. Maintenant, on fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et on se place dans une configuration à $2n + 2$ points et $(n + 1)^2 + 1$ segments. Soit $[AB]$ l'un de ces segments, et C_i l'un des $2n$ points restants (avec $1 \leq i \leq 2n$). Si, pour un certain i, les segments $[AC_i]$ et $[BC_i]$ sont tous les deux tracés, alors on a tracé le triangle ABC_i et c'est gagné. Sinon, cela veut dire que, pour chaque valeur de i , au plus l'un des deux segments $[AC_i]$ ou $[BC_i]$ est tracé. Cela donne au plus $2n$ segments reliant A ou B à un des points restants. Si l'on efface alors les points A et B et tous les segments dans lesquels ces deux points interviennent, il nous reste alors au moins $(n+1)^2+1-(2n+1) = n^2+1$ segments et $2n$ points. Dans cette configuration, on a tracé, par hypothèse de récurrence, au moins un triangle, et donc c'est aussi gagné.

Exercice 21 De combien de manières peut on paver une bande horizontale $2 \times n$ avec des briques 1×2 ou 2×1

Solution de l'exercice 21 En regardant les petits cas, on remarque assez vite que la réponse est le n-ème terme de la suite de Fibonnacci définie par $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1 = 1$, et pour $n \geq 2$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$.

On le montre par récurrence, en faisant attention à bien initialiser au rangs 1 et 2.

Pour l'hérédité, on suppose que le résultat est valable aux rangs $n-1$ et n, et l'on remarque qu'au rang $n + 1$, le dernière brique est soit verticale, auquel cas il y a $\mathcal{F}_n$ possibilités, soit horizontale, auquel cas il y en a $\mathcal{F}_{n-1}$. Ces deux éventualités sont disjointes et couvrent tous les cas, il y a donc $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n-1}$ manières de paver la bande de côté $n + 1$.

3 samedi 19 matin : Antoine Séré

L'intégralité de ce cours peut se retrouver dans le polycopié du stage olympique de Montpellier 2014, page 57 pour les invariants et page 63 pour le principe de l'extremum.

4 Groupe B : arithmétique

1 jeudi 17 après-midi : Victor Vermès

Ce cours constitue une introduction à l'arithmétique. Il rappelle les notions de divisibilité, de PGCD et de nombre premier. Le théorème de Bezout, le lemme de Gauss et la décomposition en facteur premier sont démontrées et appliquées à quelques exercices. Ce cours correspond aux parties 1 et 2 du polycopié d'arithmétique débutant de Jean-Louis Tu, et voici le corrigé des exercices.

2 vendredi 18 après-midi : Raphaël Ducatez

Ce cours portait sur les congruences. Il peut se retrouver dans la partie 3 du polycopié de Jean-Louis Tu.

3 samedi 19 après-midi : Victor Vermès

Ce cours complète les deux cours précédents d'arithmétique en insistant sur l'utilité de la factorisation, et introduit la descente infinie, en l'appliquant à des exercices. Ce cours correspond à la partie 4 du polycopié d'arithmétique débutant de Jean-Louis Tu, et voici le corrigé.

5 Groupe C : combinatoire

1 jeudi 17 matin : Félix Breton

Exercice 1 Le pays d'Euleria contient 1000 villes, reliées par un réseau de routes à double sens qui joint toutes les villes. Le gouvernement veut transformer certaines de ces routes en autoroutes de manière à ce que chaque ville aie un nombre impair d'autoroutes. Montrer qu'il peut le faire.

Exercice 2 Montrer qu'on peut colorier les sommets de tout graphe en deux couleurs de manière à ce que pour chaque sommet, au moins la moitié de ses voisins soit de l'autre couleur.

Exercice 3 Les arêtes du graphe complet à n sommets sont coloriées en n couleurs. Pour chaque triplet de couleurs, il existe trois sommets reliés avec des arêtes de ces trois couleurs.
a) Peut on avoir $n = 6$?
b) Peut on avoir $n = 7$?

Exercice 4 $2n$ mathématiciens sont présents à une conférence. Chacun d'eux connait exactement k autres mathématiciens. Trouver la plus petite valeur de k qui assure l'existence d'un

triplet de mathématiciens se connaissant tous.
Question bonus : et si $2n+1$ mathématiciens étaient présents ?

Exercice 5 Alice et Bob jouent à un jeu sur un graphe G complet a 2014 sommets. Ils jouent à tour de rôle, en commen çant par Alice. A chaque coup, Alice oriente une arête non orientée de G. A chaque coup, Bob choisit un entier m, avec $1 \leq m \leq 1000$ et oriente m arêtes non orientées de G. La partie se finit quand toutes les arêtes sont orientées. Alice gagne si et seulement si il y a un cycle. Existe-t-il une stratégie gagnante pour Alice ?

Exercice 6 Montrer que pour tout couple (A, B), il existe un entier $R(A, B)$ tel que tout graphe à $R(A, B)$ sommets contienne soit A sommets tous reliés, soit B sommets tous non reliés.
Calculer $R(3, 3)$.

Exercice 7 Calculer $R(3, 4)$.
Question bonus : calculer $R(4, 4)$.

Exercice 8 Montrer que pour tout triplet (A, B, C), il existe un entier $R(A, B, C)$ tel que tout graphe complet à $R(A, B, C)$ sommets dont les arêtes sont coloriées en vert, bleu et noir contienne soit A sommets tous reliés par des arêtes vertes, soit B sommets tous reliés par des arêtes bleues, soit C sommets tous reliés par des arêtes noires.

Exercice 9 Montrer que $R(A, B, C) \leq R(A, R(B, C))$.
Question bonus : trouver un cas où l'inégalité est stricte.

Exercice 10 Montrer qu'un graphe représenté de manière planaire vérifie la formule $S + F = A + 2$.

Exercice 11 K_5 est il planaire ? $K_{3,3}$?

Exercice 12 Un physicien fou découvre une nouvelle particule qu'il nomme imon. Certains couples d'imons sont intriqués. Le physicien peut faire 2 opérations :
-Détruire un imon qui est intriqué avec un nombre impair d'autres imons.
-Dupliquer la structure, chaque imon devenant alors intriqué avec son double.
Montrer que le physicien peut isoler tous les imons (c'est à dire faire en sorte qu'il n'y ait plus d'intrication).

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Si $k = n$, on peut répartir les mathématiciens en 2 groupes de n tels que chacun connaisse les n mathématiciens de l'autre groupe. On n'a alors aucun triangle. Si $k > n$, on peut prendre 2 mathématiciens qui se connaissent. Chacun connait alors au moins n autres mathématiciens, mais il n'y a que $2n-2$ autres mathématiciens, donc d'après le principe des tiroirs, les 2 mathématiciens ont une connaissance commune, et un triangle existe. Par conséquent, la plus petite valeur de k assurant l'existence d'un triplet de mathématiciens se connaissant tous est $n + 1$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Alice peut gagner en formant une chaine (une suite de sommets distincts, chacun étant relié au suivant par une arête orientée). A chaque tour, elle prend la plus grande chaine existante, un sommet hors de cette chaine et relie le sommet à la chaine de manière à rallonger cette dernière (une disjonction de cas montre que c'est toujours possible). Après au plus 2017 coups, la chaine sera complète, et comme il y a$2017 * 2016/2$, soit plus de $2017 * 1001$ arêtes, il restera des arêtes non orientées. Toute paire de sommets étant alors indirectement liée par la chaine, il suffit à Alice de prendre une arête non orientée et de l'orienter dans la direction inverse de la chaine pour former un cycle et gagner.

L'exercice 3 provient de la JBMO 2012, le 12 est le C3 de la shortlist de l'IMO 2013.
Pour les exercices 1,2,6,10 et 11 : voir le cours de théorie des graphes de Po-Shen Loh.
Les solutions des exercices 7,8 et 9 sont trouvables sur la page Wikipédia du théorème de Ramsey.

2 vendredi 18 matin : Antoine Martin

Ce cours est dédié aux comptages et aux doubles-comptages. Le principe est de montrer des égalités mathématiques plus ou moins puissantes, sans aucun calcul, simplement en se ramenant à un ensemble canonique et à son nombre d'éléments.

Pour les questions d'applications, on se référera au cours d'Igor et plus particulièrement aux exercices 2, 3, 5, 6 et 11.

Exercice 1 Par un double comptage, calculer la somme :

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + ... + n\binom{n}{n}$$

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> $k\binom{n}{k}$ est le nombre de manières de choisir $A \subset [\![1, n]\!]$ de cardinal k et $x \in A$, donc la somme est égale au nombre de couples (x, A) avec $x \in A \subset [\![1, n]\!]$.
D'autre part, pour choisir un tel couple, on peut d'abord choisir x (il y a n choix possibles), puis A (pour chaque choix de x, il y a 2^{n-1} sous-ensembles de A possibles). La somme vaut donc $n2^{n-1}$.

Exercice 2 Montrer par des bijections les identités suivantes :

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

et :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On veut que les nombres soient les cardinaux d'ensembles, donc soient positifs. On passe donc les termes négatifs de l'autre côté, et on veut montrer qu'il y a autant de sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ de cardinal pair que de cardinal impair.
Pour cela, on considère la fonction qui à A associe A privé de 1 si $1 \in A$, et A avec 1 en plus si $1 \notin A$. On vérifie que cette fonction est une bijection entre les sous-ensembles de cardinal pair et ceux de cardinal impair.
Pour la deuxième, on montre que la fonction qui à un sous-ensemble associe son complémentaire est une bijection.

Exercice 3 Une araignée possède 8 chaussettes identiques et 8 chaussures identiques. Dans combien d'ordres différents peut-elle se chausser, sachant qu'évidemment, sur chaque patte, elle doit mettre la chaussure après la chaussette ?

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Numérotons les pattes de l'araignée de 1 à 8. Appelons a_i l'action consistant à mettre une chaussette sur la i-ième patte, et b_i l'action consistant à mettre une chaussure sur la i-ième patte. Il y a $16!$ façons d'ordonner les 16 actions (a_i) et (b_i). Considérons l'un de ces ordres. à partir de cet ordre, on s'autorise à échanger, pour tout i, les positions des actions

a_i et b_i, ce qui permet d'atteindre 2^8 ordres différents. Parmi ces ordres, seul un correspond à une façon correcte de se chausser : l'ordre pour lequel pour tout i, a_i apparaît avant b_i. L'araignée peut donc se chausser de $16!/2^8 = 81729648000$ façons différentes.

Exercice 4 (Théorème de Erdös-Szekeres) D'une suite de $mn+1$ nombres réels, montrer qu'on peut extraire

- ▷ une sous-suite croissante de $m+1$ réels
- ▷ ou une sous-suite décroissante $n+1$ réels.

Solution de l'exercice 4 On note $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ ces nombres. On note c_k la longueur de la plus longue sous-suite croissante commençant par a_k, et d_k la longueur de la plus longue sous-suite décroissante commençant par a_k. Remarquons alors que si $k \neq l$ sont deux indices, $(c_k, d_k) \neq (c_l, d_l)$. En effet, dans la situation contraire, et quitte à suppose $k < l$ on traite deux cas :

- ▷ Si $a_k \leq a_l$, on peut prolonger la sous-suite croissante commençant par a_l en une sous-suite commençant par a_k de longueur $c_l + 1 > c_k$, ce qui contredit la maximalité de c_k.
- ▷ Sinon, on prolonge une sous-suite décroissante pour obtenir la une contradiction sur la maximalité de d_k.

Or, d'après le principe des tiroirs, les $mn+1$ couples (c_k, d_k) ne peuvent pas tous appartenir à $\{1, \ldots m\} \times \{1, \ldots n\}$. D'où le résultat.

Exercice 5 (Identités de Vandermonde et d'anti-Vandermonde) Soient a, b,n des entiers. On choisit la convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$. Montrer que :

1. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$
2. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{a}\binom{n-k}{b} = \binom{n+1}{a+b+1}$$

Solution de l'exercice 5 La principale difficulté en double-comptage est de choisir la grandeur à double-compter.

1. Ici, il paraît assez naturel de double-compter le nombre de mannières de choisir n personnes parmi a filles et b garçons. Dans un premier temps, ce nombre vaut $\binom{a+b}{n}$. D'autre part, si on commence par choisir k filles parmi a, il ne reste plus que $n-k$ garçons parmi b. En faisant varier k entre 0 et n, on partitionne toutes les possibilités. D'où :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$
2. De la même façon, on double compte le nombre de mannières de choisir $a+b+1$ personnes parmi $n+1$ individus : $\binom{n+1}{a+b+1}$. Maintenant, au lieu de partitionner selon le nombre de filles, on partitionne selon le choix du $a+1$-ième élément en notant ce paramètre $k+1$. Une fois ce choix fait, il reste a personnes à choisir par k puis b parmi $n-k$. Il reste à faire varier $k+1$ entre 1 et $n+1$ pour conclure :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{a}\binom{n-k}{b} = \binom{n+1}{a+b+1}$$

3 samedi 19 matin : Jean-Louis Tu

Exercice 1 Montrer qu'un damier $m \times n$ peut être pavé par des dominos $1 \times k$ (on autorise les rotations) si et seulement si k divise m ou k divise n.

Solution de l'exercice 1 Si k divise m alors chaque colonne peut évidemment être pavée par des dominos $k \times 1$. Le cas où k divise n est analogue.

Supposons qu'il existe un tel pavage. On numérote les lignes entre 0 et $m-1$ et les colonnes entre 0 et $n-1$. On colorie la case (i, j) en la couleur $i + j \pmod k$. Chaque couleur doit apparaître un même nombre de fois. Supposons par l'absurde que $m = km' + r$ et $n = kn' + s$ avec $0 < r < k$ et $0 < s < k$. Supposons par exemple que $s \leqslant r$.

On note que pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$, (i, j) est de couleur $x-1$ si et seulement si $(i, j+1)$ est de couleur x. Donc le nombre de i tels que $(i, n-1)$ est de couleur $x-1$ est égal au nombre de i tels que $(i, 0)$ est de couleur x.

Soit $f(x)$ le nombre de $0 \leqslant i < m$ tels que $i \equiv x \pmod k$. L'assertion précédente s'écrit $f(x-n) = f(x)$, ou encore $f(x-s) = f(x)$.

Or, $f(r) = m' + 1$ et $f(r-s) = m'$. Contradiction.

Exercice 2 Est-il possible de paver un rectangle 11×12 avec 19 dominos 1×6 ou 1×7 (rotations autorisées) ?

Solution de l'exercice 2 Non. On numérote les lignes entre 0 et 10 et les colonnes entre 0 et 11. On colorie la case (i, j) en noir si $i + j + 4$ est divisible par 7. Il y a 20 cases noires, et chaque domino couvre au plus une case noire, donc il y a au moins une case noire non recouverte par des dominos.

Exercice 3 On appelle forme en L un domino 2×3 dont on a retiré deux cases adjacentes sur le long côté (rotations autorisées). Soient $m, n > 1$. Montrer qu'on peut paver un damier $m \times n$ par des formes en L si et seulement si mn est divisible par 8.

Solution de l'exercice 3 Supposons qu'un tel pavage existe. Comme une forme en L comporte 4 cases, mn est divisible par 4. Supposons par exemple que n est pair. On colorie une colonne sur deux en noir. Chaque forme en L recouvre un nombre impair de cases noires. Or, le nombre total de cases noires est $mn/2$ qui est pair, donc il y a un nombre pair de formes en L, et donc mn est divisible par 8.

Réciproquement, supposons que mn est divisible par 8. Si l'un est divisible par 4 et l'autre par 2, on peut paver le damier avec des rectangles 4×2, et chacun de ces deux rectangles est pavé par deux formes en L.

Si par exemple m est impair et n divisible par 8. On se ramène d'abord à $n = 8$. Comme $m = 3 + (m-3)$ et que $m-3$ est pair, on se ramène à $m = 3$ (puisque le rectangle $(m-3) \times 8$ peut être pavé), ce qui est facile.

Exercice 4 On considère un damier 8×9. Combien peut-on placer de dominos 1×2 (rotations autorisées) si les dominos $(k, 9-k) - (k, 10-k)$ pour $2 \leqslant k \leqslant 7$ ont déjà été placés ?

Solution de l'exercice 4 34. Considérons l'ensemble A constitué des cases $(1, 9)$, $(8, 1)$ et des cases situées en haut à gauche de l'ensemble formé par ces deux cases et des dominos déjà placés. De même, on note B l'ensemble analogue en bas à droite. Tout domino autre que l'un des six de départ est entièrement contenu dans l'un de ces deux ensembles.

On colorie les cases comme aux échecs. Dans A, il y a 17 cases noires et 14 cases blanches. Or, un domino recouvre autant de cases noires que de cases blanches, donc il y a au plus 14

dominos entièrement contenus dans A. Idem pour B. Donc il y a au plus $6 + 14 + 14 = 34$ dominos au total.

Exercice 5 (RMM 2016, partiellement traité en cours) Soient $n \geqslant m$ des entiers.

Quel est le nombre maximum de dominos 1×2 (rotations autorisées) que l'on peut placer sur un damier $m \times 2n$ tel que la ligne du bas soit totalement couverte par des dominos horizontaux, et de sorte que deux dominos ne forment jamais de carré 2×2 ?

Solution de l'exercice 5 On peut atteindre $mn - [m/2]$ avec l'arrangement en briques.

Plaçons l'origine en bas à gauche, de sorte que la ligne du bas soit constituée des cases $(k, 1)$ avec $1 \leqslant k \leqslant 2n$. Appelons *bon emplacement* tout ensemble de deux cases $\{(k + 2\ell, k), (k + 2\ell + 1, k)\}$ avec $0 \leqslant \ell \leqslant n - k$.

Supposons d'abord que chaque bon emplacement soit entièrement recouvert par un domino horizontal. Colorions les cases du damier en noir et blanc comme d'habitude. Le complémentaire de la réunion des bons emplacements est la réunion de deux zones triangulaires sur lesquelles la différence entre le nombre de cases noires et le nombre de cases blanches est $[m/2]$, donc sur chaque zone triangulaire, il y a au moins $[m/2]$ cases inoccupées. Donc on peut placer en tout au plus $mn - [m/2]$ dominos.

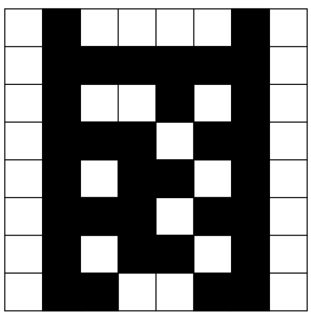
Traitons le cas général. Il suffit pour cela de transformer une configuration en une autre ayant au moins autant de dominos, mais avec moins de bons emplacements non recouverts. Prenons donc un bon emplacement, d'ordonnée minimale, qui n'est pas totalement recouvert par un domino.

S'il est vide, on peut y placer un domino horizontal et éventuellement retirer le domino horizontal juste au-dessus s'il y en avait un.

S'il n'est pas vide, supposons par exemple que la case de gauche soit occupée. Il est facile de voir que le domino D qui l'occupe est vertical, et que la case de droite est vide, donc on peut déplacer D pour qu'il recouvre le bon emplacement.

Exercice 6 On dispose de 21 pièces de type Γ (formées de trois petits carrés). On est autorisé à les placer sur un échiquier 8×8 (sans recouvrement, de sorte que chaque pièce recouvre exactement trois cases). Un arrangement est dit maximal si on ne peut pas ajouter de pièce supplémentaire en respectant cette règle. Quel est le plus petit k tel qu'il existe un arrangement maximal de k pièces de type Γ ?

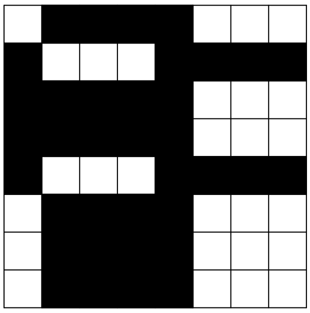
Solution de l'exercice 6 On pave l'échiquier avec 16 carrés 2×2. Chaque carré contient deux cases de l'arrangement, donc celui-ci recouvre au moins 32 cases, ce qui nécessite au minimum 11 pièces. Inversement, on peut construire un tel arrangement :



Exercice 7 Même question avec un damier $2n \times 2n$ et des pièces $1 \times n$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On trouve facilement 4 pour $n = 1$ et 6 pour $n = 2$. Montrons que la réponse est $2n + 1$ pour $n \geqslant 3$.

Voici un arrangement maximal avec $2n + 1$ pièces, illustré dans le cas $n = 4$:



Réciproquement, montrons qu'un arrangement maximal comporte au moins $2n+1$ pièces.

Si toutes les pièces sont horizontales, déjà il y a au moins une pièce par ligne. De plus, la première colonne ne peut pas être vide par maximalité, donc il existe une pièce horizontale rencontrant la première colonne, et par maximalité, la ligne de cette pièce en contient deux, donc il y a bien $2n + 1$ pièces au total.

Supposons dorénavant qu'il y a des pièces horizontales et des pièces verticales, et qu'il y en a au plus $2n$. Supposons par exemple qu'il y a au plus n barres verticales. S'il y a une barre verticale sur la colonne k avec $1 \leqslant k \leqslant n$, alors par maximalité il y a une case occupée juste à gauche. La barre qui l'occupe ne peut pas être horizontale car il n'y a pas assez de place, donc elle est verticale. Par conséquent, il y a une barre verticale sur chacune des colonnes $1, 2, \ldots, k$. On raisonne de même sur $k > n$, donc il existe $a < b$ tel que les colonnes occupées par les barres verticales sont les colonnes $1, 2, \ldots, a$ et $b, b + 1, \ldots, 2n$. Il y a donc une suite de n colonnes non occupées par des barres verticales. Par maximalité, chaque ligne est occupée par une barre horizontale, donc il y a au moins $2n$ barres horizontales. Comme il y a au moins une barre verticale, ceci est contradictoire.

Exercice 8 (EGMO 2016, non traité en cours) Idem avec un damier $n \times n$ et des dominos $1 \times k$ avec $k \leqslant n < 2k$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> La réponse est n si $n = k$ ou $n = 2k - 1$, et $2n - 2k + 2$ si $k < n < 2k - 1$.

Le cas $n = k$ est trivial. Supposons donc $n > k$. Donnons d'abord des exemples de configurations maximales.

Si $n = 2k - 1$, on empile k dominos horizontaux en bas à gauche, k dominos horizontaux en haut à gauche, et on met un domino horizontal à droite de la ligne du milieu.

Si $k < n < 2k - 1$, on met 4 dominos sur le périmètre du carré $(k + 1) \times (k + 1)$ en bas à gauche, on empile $n - k - 1$ dominos horizontaux au-dessus de ce carré sur les colonnes de 2 à $k + 1$, et on place $n - k - 1$ dominos verticaux à droite de ce carré sur les colonnes de 2 à $k + 1$.

Réciproquement, étant donné une configuration maximale, si toutes les lignes sont occupées par des dominos horizontaux c'est gagné, et idem pour les colonnes. Dans le cas contraire, on montre comme dans l'exercice précédent que s'il y a $a > 0$ lignes non occupées par des dominos horizontaux, alors ces lignes sont consécutives, et donc $a < k$, ce qui fait qu'il y a au moins $n - k + 1$ dominos horizontaux, et idem pour les dominos verticaux.

6 Groupe C : arithmétique

1 jeudi 17 après-midi : Raphaël Ducatez

Méthodes Usuelles

Pour aborder les exercices d'arithmétiques, il faut généralement utiliser l'une des trois méthodes suivantes.

1. La factorisation et la décomposition en facteur premiers.

   Par exemple : **Exercice 1** si ab est un carré et a et b premier entre eux, alors a et b sont des carrés.

   Solution de l'exercice 1 On décompose a et b en facteur premiers. $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$. $a = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k}$. Et $ab = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} ... p_k^{\gamma_k}$ avec $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$ pour tout i. Puisque a et b sont premier entre eux. $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow \beta_i = 0$ et inversement $\beta_i \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$. Ainsi pour tout i,$\alpha_i = 0$ ou $\alpha_i = \gamma_i$ et $\beta_i = 0$ ou $\beta_i = \gamma_i$. Or puisque ab est un carré, les γ_i sont pairs. On en déduit que les α_i et les β_i sont pairs. Conclusion a et b sont bien des carrés.

   Pour factoriser, ne ratez pas les identités remarquables :

   $$(b^n - a^n) = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-2}b + a^{n-1}) \quad \text{(V.1)}$$

   Pour le cas ou n est impaire

   $$(b^n + a^n) = (b^n - (-a)^n) = (b+a)(b^{n-1} - b^{n-2}a + \cdots + (-a)^{n-2}b + (-a)^{n-1}) \quad \text{(V.2)}$$

   Un grand classique, mais un peu moins connu est l'identité de Sophie Germain.

   $$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2) \quad \text{(V.3)}$$

   Par exemple **Exercice 2** Montrer que $n^4 + 4^n$ n'est jamais un nombre premier pour $n > 1$.

   Solution de l'exercice 2 Pour les n pairs, 2 est diviseur. Pour n impair, $n = 2k + 1$ on a

   $$n^4 + 4^n = n^4 + 4(2)^4 k = (n^2 + 2n2^k + 2^{2k+1})(n^2 - 2n2^k + 2^{2k+1}) \quad \text{(V.4)}$$

   Et on vérifie que les deux termes sont différents de 1.

2. Les congruences ! Dans beaucoup de problème il suffit de regarder l'équation modulo un entier n bien choisit.

   Par exemple **Exercice 3** L'équation $a^2 + b^2 = 1003$ n'admet aucune solution.

   Solution de l'exercice 3 On considère l'équation modulo $[4]$. Le terme de droite est égale à $3[4]$ or tout carré est congrue à $0[4]$ ou $1[4]$. Ainsi la somme de deux carré n'est jamais égale à $3[4]$.

3. Se restreindre à un nombre fini (raisonable) de cas à traiter. Puis les résoudres les uns après les autres.
   Exemple **Exercice 4** Résoudre $a^2 + b^2 = (ab)^2$

   Solution de l'exercice 4 On va commencer par résoudre le problème plus générale $x + y = xy$ pour x, y positif. Par symétrie on peut supposer que $x \leq y$. Si $x > 2$ il n'y a pas de solution. En effet : $x + y \leq y + y = 2y < xy$. Il suffit alors de traiter les trois cas $x = 0, 1, 2$.
   Pour $x = 0$ on déduit que $y = 0$.
   Pour $x = 1$ cela donne $y = y + 1$ aucune solution
   Pour $x = 2$ on a $y = 2$.
   On peut revenir au problème initial en cherchant alors que x et y soient des carrés. Il ne reste alors que la solution $x = 0, y = 0$.

TD

Exercice 5 Pour quels n a t-on $7^n + n^3$ divisible par 9 ?

Solution de l'exercice 5 On commence par calculer $7^n[9]$.

- ▷ $7 = 7[9]$
- ▷ $7^2 = 4[9]$
- ▷ $7^3 = 1[9]$

L'ordre de 7 modulo 9 est donc 3. Pour tout $n = 3k + r$ on a donc $7^{(3k+r)} = 7^r[9]$

On calcule maintenant n^3.

- ▷ $1^3 = 1[9]$
- ▷ $2^3 = 8[9]$
- ▷ $3^3 = 0[9]$
- ▷ $4^3 = 1[9]$
- ▷ $5^3 = 8[9]$
- ▷ $6^3 = 0[9]$
- ▷ $7^3 = 1[9]$
- ▷ $8^3 = 8[9]$
- ▷ $9^3 = 0[9]$

On en déduit que pour $n = 3k + r$ on a $n^3 = 0[9]$ si $r = 0$, $n^3 = 1[9]$ si $r = 1$, $n^3 = 8[9]$ si $r = 2$. On vérifie maintenant que pour tout $r = 0, 1, 2$ on n'a jamais $7^n + n^3 = 0[9]$.

Exercice 6 Montrez qu'il n'existe pas de solution à l'equation : $a^4 + 6 = b^3$. Indication : on pourra essayer modulo 13.

Solution de l'exercice 6 On fait la table de b^3 modulo 13.

- ▷ $0^3 = 0[13]$
- ▷ $1^3 = 1[13]$
- ▷ $2^3 = 8[13]$
- ▷ $3^3 = 1[13]$
- ▷ $4^3 = -1[13]$
- ▷ $5^3 = 8[13]$
- ▷ $6^3 = 8[13]$

Pour les $7, .., 12$ on les écrire $-6, ..., -1[13]$ ainsi les cubes modulo 13 sont $0, 1, 5, 8, 12$.

On fait ensuite la table des a^4

- ▷ $0^4 = 0[13]$
- ▷ $1^4 = 1[13]$
- ▷ $2^4 = 3[13]$
- ▷ $3^4 = 3[13]$
- ▷ $4^4 = 9[13]$
- ▷ $5^4 = 1[13]$
- ▷ $6^4 = 9[13]$

Ainsi les $a^4 + 6$ sont $2, 6, 7, 9$ modulo 9. Ces deux tables n'ont aucune valeur en commune. Il n'y a donc pas de solution.

Exercice 7 Résoudre $7^x - 3 \cdot 2^y = 1$

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On cherche à factoriser : $7^x - 1 = 3 \cdot 2^y$.

$$(7-1)(7^{x-1} + 7^{x-2} + \cdots + 7 + 1) = 3 \cdot 2^y. \tag{V.5}$$

Ce qui donne

$$7^{x-1} + 7^{x-2} + \cdots + 7 + 1 = 2^{y-1}. \tag{V.6}$$

Cela donne une permiere solution : $y = 1$ et $x = 1$. (on peut vérifier $7 - 3 * 2 = 1$)

Ensuite on remarque que le terme de gauche est une somme de x termes impaires, x est donc paire. On peut alors grouper les termes par deux.

$$\begin{aligned}2^{y-1} &= (7^{x-1} + 7^{x-2}) + (7^{x-1} + 7^{x-2}) + \cdots + (7+1) \\ &= (7+1)7^{x-2} + (7+1)7^{x-4} + \cdots + (7+1). \\ &= (7+1)(7^{x-2} + 7^{x-4} + \cdots + 7^2 + 1)\end{aligned}$$

Et donc

$$7^{x-2} + 7^{x-4} + \cdots + 7^2 + 1 = 2^{y-4} \tag{V.7}$$

Cela donne alors une deuxième solution : $y = 4$ et $x = 2$. On peut vérifier $49 - 3 * 2^4 = 1$.

On peut continuer de la mÃªme manière : il doit y avoir un nombre paire de terme dans la somme de gauche.

$$\begin{aligned}2^{y-4} &= (7^{x-2} + 7^{x-4}) + (7^{x-6} + 7^{x-8}) + \cdots + (7^2+1) \\ &= (7^2+1)7^{x-4} + (7^2+1)7^{x-8} + \cdots + (7^2+1). \\ &= (7^2+1)(7^{x-4} + 7^{x-8} + \cdots + 7^2 + 1)\end{aligned}$$

Mais ce n'est pas possible car $7^2 + 1$ ne divise pas 2^{y-4}. Les deux seules solutions sont donc $x = 1, y = 2$ et $x = 2, y = 4$.

Exercice 8 Résoudre $abc - 1 = (a-1)(b-1)(c-1)$. Avec $a, b, c \geq 2$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> On cherche k $abc - 1 = k(a-1)(b-1)(c-1)$ tel que On peut remarquer que $abc - 1 > abc - bc > (a-1)(b-1)(c-1)$. Donc $k > 1$. Idée : pour a, b, c assez grand alors on a $abc \sim (a-1)(b-1)(c-1)$, il n'y a pas de solution. Montrons cela rigoureusement. On peut supposer $a \leq b \leq c$

$$\frac{abc}{(a-1)(b-1)(c-1)} - \frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)} = k$$

Donc en particulier :

$$1 < k < \frac{abc}{(a-1)(b-1)(c-1)} \tag{V.8}$$

La fonction $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$ est décroissante on en déduit que $\frac{a}{a-1} \leq \frac{b}{b-1} \leq \frac{c}{c-1}$. Et donc

$$1 < k < \frac{a^3}{(a-1)^3} \tag{V.9}$$

Pour $a \geq 5$, cela donne $1 < k < \frac{125}{64}$ et donc $1 < k < 2$ pas de solution. Il suffit donc de résoudre les cas $a = 2, 3, 4$.

Cas $a = 4$. $1 < k < \frac{64}{27} \leq 3$. donc $k = 2$. On cherche donc $4bc - 1 = 6(b-1)(c-1)$. donc $1 = 0[2]$ pas de solution.

Cas $a = 3$. $1 < k < \frac{27}{8} \leq 4$ donc $k = 2$ ou $k = 3$.

Pour $k = 3$, $3bc - 1 = 6(b-1)(c-1)$. donc $-1 = 0[3]$ pas de solution.

Pour $k = 2$, $3bc - 1 = 4(b-1)(c-1)$ et donc

$$bc - 4b - 4c + 5 = 0 \tag{V.10}$$

On peut factoriser

$$(b-4)(c-4) = 11 \tag{V.11}$$

Puisque 11 est premier, les solution sont donc $b = 5$ et $c = 15$.

Cas $a = 2$, $1 < k < \frac{8}{1} = 8$. $2bc - 1 = k(b-1)(c-1)$. On en déduit donc que k est impaire.

Pour $k = 3$. Cela donne

$$bc - 3b - 3c + 4 = 0 \tag{V.12}$$

Soit donc $(b-3)(c-3) = 5$ avec pour solution donc $b = 4$ et $c = 8$.

Pour $k = 5$. Cela donne

$$3bc - 5c - 5b + 6 = 0 \tag{V.13}$$

Soit donc $9bc - 15c - 15b + 18 = 0$ soit donc $(3b-5)(3c-5) = 7$ avec pour solution : $b = 2$ et $c = 4$.

Enfin pour $k = 7$. On a

$$5bc - 7b - 7c + 8 = 0 \tag{V.14}$$

Et donc $25bc - 35b - 35c + 40 = 0$, soit donc $(5b-7)(5c-7) = 49 - 40 = 9$. On a donc $b = 2$ et $c = 2$ Pour conclure les solutions sont alors $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 4)$, $(2, 4, 8)$, $(3, 5, 15)$ (et les permutations de ces solutions)

2 vendredi 18 après-midi : Victor Vermès

Ce cours rappelle la notion d'ordre d'un inversible modulo n, et le petit théorème de Fermat. Ce dernier est généralisé avec la fonction indicatrice d'Euler, qui est introduite, et appliquée dans une séance d'exercice. Le cours et les exercices correspondent au cours de Thomas Budzinski donné au groupe C au stage de Montpellier 2014.

3 samedi 19 après-midi : Wassim Trabelsi

Outil : le PGCD

Dans une équation diophantienne, lorsque l'on possède une expression factorisée, il est parfois utile de chercher le PGCD entre les deux nombres en question. On obtiens alors une information très utile pour la résolution du problème.

Par exemple, si a et b sont premiers entre-eux et $ab = k^2$, alors on peut en déduire que a est un carré et que b est un carré.

Si $PGCD(a, b) = 2$ et $ab = k^2$, alors a est le double d'un carré et b aussi.

Exercice 1

a) Résoudre pour (x, n) entiers naturels l'équation

$$2^n = x^2 + 1$$

b) Résoudre pour (x, n) entiers naturels

$$2^n + 1 = x^2$$

Solution de l'exercice 1

a) (x=0,n=0) et (x=1, n=1) sont les seules solutions pour $n \leq 1$ Pour $n \geq 2$, l'équation n'admet pas de solution modulo 4. Les solutions sont donc les couples (0,0) et (1,1)

b) L'équation se réécrit

$$2^n = (x - 1)(x + 1)$$

$(x - 1)et(x + 1)$ sont deux puissance de 2 ayant une différence égale à 2. Donc $x - 1 = 2$ et $x + 1 = 4$ Ainsi, la seule solution de ce problème est $(x = 3, n = 3)$

Exercice 2

Résoudre en nombres entiers naturels l'équation :

$$4^x + 3^y = z^2$$

Solution de l'exercice 2

$4^x = (2^x)^2$ donc l'équation se réécrit

$$3^y = (z - 2^x)(z + 2^x)$$

Soit d le pgcd des deux facteurs de droite. Alors en prenant la différence des deux facteurs, on en déduit que d divise 2^{x+1}. Or, on sait que chaque facteur est une puissance de 3. Donc le plus petit facteur vaut 1. Donc $z - 2^x = 1$ soit $z = 2^x + 1$ On remplace z dans l'équation précédente, on a donc $2^{x+1} + 1 = 3^y$. $(x = 0, y = 1, z = 2)$ est solution. On s'intéresse désormais aux solutions avec $x \geq 1$. En prenant l'équation modulo 4, on remarque que y est pair. Donc $y = 2y_1$.

L'équation se réécrit :

$$2^{x+1} = (3^{y_1} - 1)(3^{y_2} + 1)$$

$PGCD((3^{y_1} - 1), (3^{y_2} + 1))|2$. Comme les deux facteurs sont pairs, alors le PGCD vaut 2.

Donc $3^{y_1} - 1 = 2$ et $y_1 = 1$ donc $(y = 2, x = 2, z = 5)$ est la seconde solution.

Exercice 3

Trouver le PGCD des éléments de l'ensemble des $n^7 - n$ avec n entier.

Solution de l'exercice 3

Soit d le PGCD.

$$2^7 - 2 = 126 = 2 * 3 * 3 * 7$$

$$3^7 - 3 = 2184 = 3 * 2 * 2 * 2 * 7 * 13$$

Donc d divise 2*3*7=42.
Montrons qu'en fait d=42.
Modulo 2 : Par le petit théorème de Fermat $n^7 = n^5 = n^3 = n[2]$
Modulo 3 : $n^7 = n^4 = n[3]$
Modulo 7 : $n^7 = n[7]$
Donc $42|d$ puis $d = 42$.

Outil : les puissances consécutives

ThéorÃ¨me 18. Pour a entier naturel, il n'y a pas de carré parfait entre a^2 et $(a+1)^2$.

ThéorÃ¨me 19. Pour a entier naturel, il n'y a pas de puissance k-ème entre a^k et $(a+1)^k$

Exercice 4

Trouver les (x, y) entiers naturels tels que $x^2 = y^2 + 7y + 6$

Solution de l'exercice 4

On trouve l'ordre de grandeur de x par rapport à y :
$(y+2)^2 = y^2 + 4y + 4$ Donc $x > y + 2$
$(y+4)^2 = y^2 + 8y + 16$ Donc $x < y + 4$
On en déduit que $x = y + 3$. Il reste à résoudre $y^2 + 6y + 9 = y^2 + 7y + 6$. Soit $y = 3$ puis $x = 6$ La seule solution est donc $(6, 3)$

Exercice 5

Trouver les (x,y) entiers naturels tels que $x^5 = y^5 + 10y^2 + 20y + 1$

Solution de l'exercice 5

$y^5 < y^5 + 10y^2 + 20y + 1 = x^5$ $(y+2)^5 = y^5 + 10y^4 + 40y^3 + 40y^2 + 16 > y^5 + 10y^2 + 20y + 1 = x^5$
Donc $x = y + 1$
Il reste donc à résoudre :

$$y^5 + 5y^4 + 10y^3 + 10y^2 + 5y + 1 = y^5 + 10y^2 + 20y + 1$$

Soit :

$$y(y^3 + 2y^2 - 3) = 0$$

Les solutions sont donc les couples $(y = 0, x = 1)$ et $(y = 1, x = 2)$

Exercice 6

Les entiers naturels a et b ont la propriété suivante : Pour tout n entier naturel, $2^n a + b$ est un carré parfait. Montrer que a est nul.

Solution de l'exercice 6

On sait que la suite (x_n) telle que $x_n = 2^{n+2}a + b$ est une suite de carrés parfaits Et la suite (y_n) telle que $y_n = 4(2^n a + b)$ est aussi une suite de carrés parfaits

Or $x_n - y_n = 3b$ et dès que $x_n > 2b$ la distance entre deux carrés consécutifs vaut au moins $4b + 1$.

Donc (x_n) est bornée (ie, elle ne tends pas vers l'infini), Donc $a = 0$.

Exercice 7

Trouver les (x, y) entiers naturels tels que $(x + y)^2 + 3x + y + 1$ soit un carré parfait.

Solution de l'exercice 7

$$((x + y) + 2)^2 = (x + y)^2 + 4x + 4y + 4 > (x + y)^2 + 3x + y + 1$$

$$(x + y)^2 < (x + y)^2 + 3x + y + 1$$

Donc le carré en question vaut $(x + y + 1)^2$

On doit donc résoudre $(x + y + 1)^2 = (x + y)^2 + 3x + y + 1$ ce qui reviens à $x = y$

On vérifie d'ailleurs que si x=y alors $(2x)^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$ est bien un carré parfait.

Donc l'ensemble des solutions et l'ensemble des couples (x, x) avec x entier naturel quelconque.

Outil : la barre qui divise tout

Parfois, on peut rencontrer des exercices qui demandent de vérifier qu'une fraction est entière ou bien qu'une certaine expression en divise une autre. Une technique commune dans les olympiades est de recenser un maximum d'expression divisibles par un certain entier a à l'aide d'une barre verticale. Il est autorisé de faire des combinaisons linéaires des éléments divisibles par a, le résultat sera toujours divisible par a.

Exercice 8

Trouver tous les a entiers naturels tels que $a^2 + a + 1$ divise $a^7 + 3a^6 + 3a^5 + 3a^4 + a^3 + a^2 + 3$

Solution de l'exercice 8

$$a^2 + a + 1 | a^7 + 3a^6 + 3a^5 + 3a^4 + a^3 + a^2 + 3$$
$$a^2 + a + 1 | (a^5 + 2a^4 + a^3)(a^2 + a + 1)$$
$$a^2 + a + 1 | a^7 + 3a^6 + 3a^5 + 3a^4 + a^3 + a^2$$
$$a^2 + a + 1 | 3$$

Donc a=0 ou bien a=1 et ce sont bien les seules solutions.

Exercice 9

a) Montrer que $pgcd(n + 5, n^2 - 5n + 25)$ divise $15n$ et 75.

b) On suppose que $b^2 - a | a^2 + b$ montrer que $b^2 - a | a^3 + b^3$

Solution de l'exercice 9

a) Soit k le pgdc. $k | (n + 5)^2 - n^2 - 5n + 25$ donc k divise $15n$. Or k divise aussi $15(n + 5)$ donc k divise $15n - (15n + 75)$. Donc k divise 75

b)

$$b^2 - a|a^2 + b$$
$$b^2 - a|a^3 + ba$$
$$b^2 - a|b^3 - ab$$
$$b^2 - a|a^3 + b^3$$

Exercice 10

Déterminer les (a, b) entiers naturels supérieurs ou égaux à 3 tels que : $ab^2+b+7|a^2b+a+b$

Solution de l'exercice 10

$$ab^2 + b + 7|a^2b + a + b$$
$$ab^2 + b + 7|a^2b^2 + ab + b^2$$
$$ab^2 + b + 7|a^2b^2 + ab + 7a$$
$$ab^2 + b + 7|b^2 - 7a$$

Or $b^2 - 7a < ab^2 + b + 7$ et $7a - b^2 < 7a < ab^2 + b + 7$ car $b \geq 3$

Donc $b^2 - 7a = 0$ b est un multiple de 7 disons $7k = b$ Donc $a = 7k^2$

Vérifions que l'ensemble des couples $(a = 7k^2, b = 7k)$ est solution.

On a $ab^2 + b + 7 = 7^3k^3 + 7k + 7$ et $a^2b + a + b = 7^3k^4 + 7k^2 + 7k = k(ab^2 + b + 7)$. On a bien la divisibilité souhaité.

7 Groupe D : algèbre

1 mercredi 16 après-midi : équations fonctionnelles, Jean-Louis Tu

Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une fonction.

On dit que f est injective si pour tous $a, b \in E$, on a $(f(a) = f(b)) \implies a = b$. Autrement dit, tout élément de l'espace d'arrivée admet au plus un antécédent.

On dit que f est surjective si pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, tout élément de l'espace d'arrivée admet au moins un antécédent.

On dit que f est bijective si elle est injective et surjective. Dans ce cas, il existe une et une seule fonction $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. On note cette fonction $g = f^{-1}$ et on l'appelle la réciproque de f.

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions. On a les implications suivantes :

▷ Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
▷ Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
▷ Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
▷ Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Dans les équations fonctionnelles suivantes, il pourra être utile (mais pas nécessairement indispensable) de déterminer si les fonctions sont injectives ou surjectives.

Exercices

Dans les exercices qui suivent, il s'agit de déterminer toutes les fonctions f satisfaisant les conditions suivantes :

Exercice 1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(f(x) + xf(y)) = xf(y+1)$.

Exercice 2 $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $\forall x, y > 0$, $f(x + f(x) + y) = f(y) + 2x$.

Exercice 3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(f(x) - xf(y)) + xy = 2f(x)$.

Exercice 4 (shortlist 2007) $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $\forall x, y > 0$, $f(x + f(y)) = f(x+y) + f(y)$.

Exercice 5 (shortlist 2009) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2$.

Solutions abrégées

Dans toutes les solutions suivantes, on notera $E(x, y)$ l'équation fonctionnelle.

<u>Solution de l'exercice 1</u> La fonction identiquement nulle est évidemment solution. Supposons dorénavant f non identiquement nulle. On choisit y tel que $f(y+1) \neq 0$, alors $x \mapsto f(f(x) + xf(y))$ est bijective, donc f est surjective.

Il existe donc u tel que $f(u) = 0$. L'équation $E(x, u)$ donne $f(f(x)) = xf(u+1)$ donc $f(u+1) \neq 0$, donc f est injective.

$E(1, y)$ donne $f(f(1) + f(y)) = f(y+1)$ donc, par injectivité, $f(y) = y + 1 - f(1)$. En prenant $y = 1$ on obtient $f(1) = 1$, puis $f(y) = y$. Réciproquement, on vérifie que $f(y) = y$ est bien solution.

<u>Solution de l'exercice 2</u> Supposons $f(a) = f(b)$. Alors $E(a, b) - E(b, a)$ donne $a = b$, donc f est injective.

Soient $y_1 < y_2$ des réels strictement positifs. Supposons par l'absurde que $f(y_1) > f(y_2)$. Alors il existe $x > 0$ tel que $f(y_1) = f(y_2) + 2x$. On a donc $f(y_1) = f(x + f(x) + y_2)$ donc $y_1 = x + f(x) + y_2 > y_2$, contradiction. Donc f est strictement croissante.

Si $z \in \mathrm{Im}(f)$ alors $z + 2x \in \mathrm{Im}(f)$, donc l'image de f est un intervalle. On en déduit que f est continue, et que son image est de la forme $]a, +\infty[$.

En faisant $x \to 0$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient $f(a + y) = f(y)$, donc $a = 0$ par injectivité, ce qui montre que f est bijective et se prolonge par continuité en $f(0) = 0$.

$E(x, x)$ donne alors $f(g(x)) = g(x)$ où $g(x) = 2x + f(x)$. Comme g est continue strictement croissante et vérifie $g(0) = 0$ et $g(x) \geqslant 2x$, g est surjective donc $f(t) = t$ pour tout $t > 0$.

Solution de l'exercice 3 $E(1, y)$ donne $f(f(1)-f(y)) = 2f(1)-y$, donc f est bijective. Pour $x \neq 0$, notons $g(x) = f(x)/x$. Pour $y = g(x)$, on a $f(f(x) - xf(y)) = f(x)$, donc $f(x) - xf(y) = x$ par injectivité, ce qui donne

$$f(g(x)) = g(x) - 1 \qquad (1)$$

Supposons $f(0) = 0$. D'après $E(x, 0)$, on a $f(f(x)) = 2f(x)$, donc par surjectivité, on en déduit que $f(x) = 2x$ pour tout x, mais on vérifie que cette fonction ne convient pas. Donc $f(0) \neq 0$.

Soit $a = f^{-1}(0)$. Comme $a \neq 0$, $g(a) = 0$ et donc d'après (1), on a $f(0) = -1$. D'après $E(0, 0)$, on en déduit que $f(-1) = -2$, donc $g(-1) = 2$, ce qui implique $f(2) = 1$.

$E(0, 0)$ donne $f(-1) = -2$.

$E(a, a)$ donne $-1 + a^2 = 0$. Comme $f(-1) \neq 0$, on a $a \neq -1$ donc $a = 1$, d'où $f(1) = 0$.

$E(x, 2)$ implique $f(f(x) - x) = 2(f(x) - x)$.

$E(x, 1)$ donne $f(f(x)) + x = 2f(x)$. Notons $(*)$ cette égalité.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $a = f(x_0) - x_0$. On a $f(a) = 2a$. En prenant $x = f^{-1}(a)$ dans $(*)$, on obtient $x = 0$, donc $a = f(0) = -1$, ce qui donne $f(x_0) = x_0 - 1$ pour tout x_0.

Solution de l'exercice 4 L'équation implique $f(y) \neq y$. Si $f(y) < y$ alors soit $x = y - f(y)$. On a alors $f(y) = f(x + y) + f(y)$, ce qui est impossible. Donc $f(y) > y$.

Posons $g(x) = f(x)-x$. L'équation devient $g(x+y)+g(y)) = g(x+y)+y$ pour tous $x, y > 0$, donc $g(t + g(y)) = g(t) + y$ pour tous $t > y > 0$. En particulier, g est injective.

Si $u + v < t$ alors $g(t + g(u) + g(v)) = g(t + g(u)) + v = g(t) + u + v = g(t + g(u + v))$ donc $g(u) + g(v) = g(u + v)$ par injectivité. De plus, on en déduit que g est strictement croissante.

Comme précédemment, on voit que $g(x) = ax$ pour un certain $a > 0$. En reportant dans l'équation, on trouve que $a = 1$ puis $f(x) = 2x$.

Solution de l'exercice 5 $E(0, y)$ donne $f(0) = f(yf(0))$. Si $f(0) \neq 0$ alors f est constante, ce qui est impossible. Donc $f(0) = 0$.

$E(x, 0)$ et $E(x, -x)$ donnent

$$f(xf(x)) = x^2, \quad f(-xf(x)) = -x^2 \qquad (1)$$

On en déduit que f est surjective.

Soit a tel que $f(a) = 0$, alors $f(af(a + y)) = a^2$. Si $a \neq 0$ alors le membre de gauche est surjectif et le membre de droite est constant, ce qui est contradictoire. Donc on a : $f(a) = 0 \iff a = 0$.

$E(x, y - x)$ donne $f(xf(y)) = f((y - x)f(x)) + x^2)$. Supposons $f(a) = f(b)$. En substituant $x = a, y = a$ et $x = a, y = b$, on obtient $f(0) = f((b - a)f(a))$, donc $(b - a)f(a) = 0$ d'après le résultat précédent. Si $f(a) = 0$ alors $f(b) = 0$ donc $a = 0 = b$, donc dans tous les cas on a $a = b$, ce qui montre que f est injective. Finalement, f est bijective.

(1) montre alors que f est impaire. Par conséquent, $-f$ vérifie l'équation, et donc on peut supposer que $f(1) > 0$.

Soit a tel que $f(a) = 1$. Alors (1) donne $a^2 = f(af(a)) = f(a) = 1$ donc $a = \pm 1$, ce qui donne $f(1) = 1$.

$E(1, y)$ donne $f(f(y + 1)) = f(y) + 1$, i.e. $f(f(x)) = f(x - 1) + 1$. Par imparité de $f \circ f$, on a donc $f(x - 1) + f(-x - 1) + 2 = 0$, ou encore $f(x + 2) = f(x) + 2$ pour tout x.

En utilisant cette équation, on voit d'après $E(2, x)$ que $f(2f(x + 2)) = f(xf(2)) + 4 = f(2x) + 4 = f(2x + 4)$. Par injectivité, $2f(x + 2) = 2x + 4 = 2(x + 2)$, donc $f(t) = t$ pour tout t.

2 jeudi 17 matin : polynômes, Eva Philippe

Motivation pour étudier les polynômes à plusieurs variables

Usuellement, quand on parle de polynômes, cela sous-entend polynômes à une variable. Pour un cours complet sur le sujet, vous pourrez lire avec profit le polycopié d'Igor Kortchemski : http://www.animath.fr/IMG/pdf/polynomes.pd.

Néanmoins, il arrive aussi que certains exercices d'olympiade fassent intervenir des polynômes à plusieurs variables. De manière inattendue au premier abord, c'est par exemple le cas du très joli (et très difficile) exercice suivant (problème 6 de l'olympiade 2007).

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit

$$S = \left\{(x, y, z) \in \{0, \ldots, n\}^3 | x + y + z > 0\right\}$$

un ensemble de $(n + 1)^3 - 1$ points de l'espace à trois dimensions. Déterminer le nombre minimal de plans dont l'union contient S mais pas le point $(0, 0, 0)$.

Indications :

- ▷ Commencer par trouver un ensemble de plans qui marchent, éventuellement en passant par l'analogue en dimension 2 pour mieux visualiser les choses.
- ▷ Essayer de comprendre comment un polynôme à plusieurs variables peut intervenir. Il faut notamment avoir à l'esprit la proposition 1 énoncée ci-dessous.
- ▷ Penser à essayer de diminuer le degré du polynôme trouvé, en faisant intervenir des opérateurs bien choisis.

Proposition 20. Un plan en dimension 3 peut être décrit comme l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y, z) vérifient une équation linéaire de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c, d sont quatre réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (de la même manière qu'une droite en dimension 2 est caractérisée par une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b, c sont trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$).

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

On peut trouver une solution avec $3n$ plans, par exemple les plans d'équation $x+y+z-k = 0$, pour k prenant toutes les valeurs de $\{1, \ldots, 3n\}$.

étonnamment, les seules preuves connues pour montrer que ce nombre est minimal passent par des méthodes algébriques, par exemple l'utilisation d'un polynôme à trois variables.

Supposons que l'on peut trouver m plans, avec $m < 2n$, qui recouvrent S et ne passent pas par l'origine. On peut décrire chacun d'eux par une équation linéaire de la forme $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ avec $d_i \neq 0$ pour $i \in \{1, \ldots, m\}$. On obtient donc le polynôme de degré m suivant :

$$P(x,y,z) = \prod_{i=1}^{m} (a_i x + b_i y + c_i z + d_i),$$

qui s'annule en tous les points de S mais pas en l'origine.

On définit maintenant l'opérateur Δ_x qui agit sur les polynômes à trois variables en remplaçant un polynôme Q par le polynôme $\Delta_x Q$ défini par :

$$\Delta_x Q(x,y,z) = Q(x+1,y,z) - Q(x,y,z).$$

On définit de manière similaire les opérateurs Δ_y et Δ_z. (Ces opérateurs sont des versions discrètes des opérateurs de dérivation, l'idée peut être utile dans d'autres contextes).

On remarque que chacun de ces opérateurs décroît le degré du polynôme auquel il est appliqué d'au moins 1. En appliquant ces opérateurs successivement à notre polynôme P on constate (et on montre par récurrence) que $\Delta_x^r \Delta_y^s \Delta_z^t P(0,0,0)$ (ce qui signifie qu'on applique r fois Δ_x, s fois Δ_y, t fois Δ_z au polynôme P et qu'on évalue en $(0,0,0)$) n'est jamais nul pour $r, s, t \leq n$. En particulier on a $\Delta_x^n \Delta_y^n \Delta_z^n P(0,0,0) \neq 0$. Mais puisque $\Delta_x^n \Delta_y^n \Delta_z^n P$ est de degré au plus $m - 3n < 0$, ce doit être le polynôme nul et on obtient une contradiction.

Un tout petit peu de théorie

A priori, l'utilisation de polynômes à plusieurs variables dans des exercices d'olympiades ne nécessitent pas la connaissance d'une théorie très poussée. Néanmoins, si certaines définitions et propriétés s'adaptent bien des polynômes à une variable aux polynômes à plusieurs variables, d'autres ne fonctionnent pas de la même manière et il faut faire attention à ne pas dire de bêtises ! Après quelques définitions formelles, nous verrons un peu quelles propriétés s'adaptent bien et pour lesquelles il faut faire plus attention.

Définitions

Définition 21. Un polynôme réel à n variables est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à un n-uplet de réels $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ associe :

$$P(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{N}^n} a_{k_1,\ldots,k_n} X_1^{k_1} \ldots X_n^{k_n}$$

où les coefficients $a_{k_1,\ldots,k_n}$ sont des nombres réels dont seuls un nombre fini sont non nuls.

Remarque 22. On ne s'attardera pas ici sur la distinction entre polynôme et fonction polynomiale.

Remarque 23. On peut aussi considérer des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Définition 24. Un *monôme* de *degré* d est un polynôme de la forme $aX_1^{k_1} \ldots X_n^{k_n}$ où a est un coefficient réel non nul et $d = k_1 + \ldots k_n$. Tout polynôme peut s'écrire comme somme de monômes et on appelle *degré* (ou *degré total*) d'un polynôme P le plus grand des degrés de ses monômes non nuls.

Exemple 25. $4X^2YZ + Y^3Z + 9XZ^2$ est un polynôme à 3 variables (ici notées X, Y, Z car c'est plus commode à lire que X_1, X_2, X_3) de degré 4 (car les monômes $4X^2YZ$ et Y^3Z sont de degré 4 alors que $9XZ^2$ est de degré 3).

Remarque 26. On utilise toujours la convention que le polynôme nul est de degré $-\infty$.

Remarque 27. On ne peut plus parler de coefficient dominant puisque plusieurs monômes distincts peuvent être de degré maximal.

Définition 28. Un polynôme à n variables est dit *homogène de degré* d si tous ses monômes sont de degré d.

Exemple 29. $X^4YZ + X^2YZ^3 + XY^3Z^2$ est homogène de de degré 6.

On peut également voir les polynômes à n variables de manière différente : on peut construire $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, l'ensemble des polynômes réels à n variables, par récurrence en considérant un polynôme en $(X_1, \dots, X_n)$ comme un polynôme en X_n dont les coefficients sont des polynômes en $(X_1, \dots, X_{n-1})$. (De manière savante, on dit qu'il y a un isomorphisme entre $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ et $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$.)

Définition 30. Dans ce cadre, on pourra parler du degré d'un polynôme P en chacune de ses variables X_i. On notera $deg_{X_i}(P)$ le plus grand indice k_i tel que l'un des coefficients $a_{k_1,\dots,k_n}$ pour $(k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^{n-1}$ est non nul.

Exemple 31. $4X^2YZ + X^2Z + Y^3Z + 9XZ^2 = (4YZ + Z)X^2 + (9Z^2)X + (Y^3Z) = (Z)Y^3 + (4X^2Z)Y + (X^2Z + 9XZ^2)$ est de degré 2 en X et 3 en Y.

Comme dans le cas à une variable, on a unicité de l'écriture d'un polynôme P comme somme de monômes d'après le théorème suivant :

ThéorÃ¨me 32. Soit $P(X_1, \dots, X_n) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} a_{k_1,\dots,k_n} X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$ un polynôme réel à n variables tel que $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour tous réels $x_1, \dots, x_n$. Alors $a_{k_1,\dots,k_n} = 0$ pour tout $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$.

Démonstration 33. On prouve ce résultat par récurrence sur n.

Notons $b_k(X_1, \dots, X_{n-1})$ les coefficients devant les X_n^k dans P vu comme polynôme en X_n, c'est-à-dire :

$$P(X_1, \dots, X_n) = \sum_{k=0}^{deg_{X_n}(P)} b_k(X_1, \dots, X_{n-1}) X_n^k.$$

Comme dans le cas des polynômes à une variable, le fait que P s'annule pour toutes les valeurs de X_n implique que les coefficients b_k sont nuls. Sinon, si l'un des b_k pouvait prendre une valeur non nulle en $(x_1, \dots, x_{n-1})$, on pourrait diviser $P(x_1, \dots, x_{n-1}, X_n)$ par X_n^k et en faisant tendre X_n vers 0 on obtient une contradiction. Or les b_k sont des polynômes à $n-1$ variables donc par hypothèse de récurrence leurs coefficients réels sont tous nuls et c'est donc également le cas pour les coefficients de P.

Les propriétés qui s'adaptent bien Lorsque les preuves sont identiques au cas des polynômes à une variable, elles ne seront pas redonnées.

Opérations et conséquences sur le degré

Proposition 34. Les opérations $+$ et $\times$ sur les polynômes à une variable s'étendent facilement aux polynômes à plusieurs variables et on a les mêmes propriétés pour les degrés : si P et Q sont deux polynômes à n variables alors
▷ $deg(P+Q) \leq \max(deg(P), deg(Q))$
▷ $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$.
Les mêmes propriétés sont vraies si on considère le degré en une certaine variable.

Dérivation On peut dériver un polynôme par rapport à l'une de ses variables. Par exemple si on dérive $P(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{k=0}^{d} b_k(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^k$ par rapport à X_n on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial X_n}(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{k=1}^{d} k b_k(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^{k-1}.$$

Divisibilité

Définition 35. Si $A, B \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, on dit que A *divise* B s'il existe $Q \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $B = AQ$.

Définition 36. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est *irréductible* si les seuls polynômes qui le divisent sont les polynômes constants (de degré total 0).

On a quelques critères d'irréductibilité, par exemple :
▷ Si $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, alors il le sera aussi vu dans $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$.
Exemple 37. $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X, Y]$.
▷ Si l'une des variables est de degré 1 alors P est irréductible.
Exemple 38. $X^2Z - 3XYZ + Y^4$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ car de degré 1 en Z.
▷ Si P et Q sont des polynômes homogènes de degrés différents et sans facteur commun alors $P + Q$ est irréductible.
Exemple 39. $X^6 + X^2Y^3 - Y^5$ est irréductible.
▷ On peut adapter certains critères d'irréductibilité dans $\mathbb{R}[X]$, par exemple le critère d'Eisenstein (voir exercice 4) ou le fait suivant : si $(a_1, \ldots a_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $P(X_1, \ldots, X_n)$ est irréductible si et seulement si $P(X_1 + a_1, \ldots, X_n + a_n)$ l'est.

Même si on n'a pas de bonne division euclidienne (ce qui empêche de faire beaucoup de choses), on a quand-même l'unicité de la décomposition en irréductible, le lemme d'Euclide et le lemme de Gauss. On ne fera pas les démonstrations ici, qui requièrent des arguments d'algèbre générale sur les anneaux factoriels.

ThéorÃ¨me 40. Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ peut s'écrire de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

On peut donc définir le $PGCD$ de deux polynômes.

ThéorÃ¨me 41. (Lemme d'Euclide) Si P irréductible divise AB, alors P divise A ou P divise B.

ThéorÃ¨me 42. (Lemme de Gauss) Si Q est premier avec A et divise AB, alors Q divise B.

Les propriétés qui s'adaptent moins bien

Localisation des zéros Alors que les polynômes à une seule variable s'annulent en un nombre fini de points, les choses sont beaucoup plus compliquées avec plusieurs variables ! Le lieu d'annulation peut être des unions de courbes avec deux variables, des unions de surfaces avec trois variables, ... L'étude de ces ensembles constitue tout l'objet de la géométrie algébrique.

La difficulté d'étudier les lieux d'annulation d'un polynôme vient aussi de la non-existence de décomposition canonique sous forme de produit (contrairement à $\mathbb{C}[X]$, où d'après le théorème de d'Alembert-Gauss tous les polynômes peuvent s'écrire $P(X) = c\prod_{i=1}^{d}(X-\lambda_i)$, où les $\lambda_i \in \mathbb{C}$ sont les racines de P). Même dans les cas des polynômes homogènes, où on pourrait espérer une décomposition de la forme $P(X_1,\ldots,X_n) = c\prod_{i=1}^{d}(\lambda_{1,i}X_1 + \ldots + \lambda_{n,i}X_n)$ (dans ce cas le lieu des zéros est une union de d hyperplans), c'est loin d'être toujours possible même dans $\mathbb{C}$ (considérer par exemple $XY + YZ + ZX$, à trois variables). Il n'y a que dans le cas des polynômes homogènes à deux variables qu'une telle décomposition est toujours possible dans $\mathbb{C}$. (Pour le montrer, utiliser le théorème de d'Alembert-Gauss et les relations coefficients-racines).

Division euclidienne On ne peut pas faire de division euclidienne naïvement en isolant une variable car dans ce cas on obtient la plupart du temps des fractions rationnelles (quotients de deux polynômes) comme coefficients, au lieu de polynômes. (Vous pouvez vous en rendre compte facilement en essayant de faire des divisions euclidiennes sur des exemples.)

Exercices

Exercice 2 (Un peu de manipulation)

Déterminer les polynômes $P(x,y,z,w)$ et $Q(x,y,z,w)$ vérifiant :

$$(xy+z+w)^2 - (x^2-2z)(y^2-2w) = (P(x,y,z,w))^2 - (x^2-2z)\left(Q(x,y,z,w)\right)^2.$$

Exercice 3 (Explorer un peu la divisibilité)

Soit A et B deux polynômes à deux variables tels que $\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ est un polynôme en x pour une infinité de valeurs de y et un polynôme en y pour une infinité de valeurs de x. Montrer que B divise A.

Exercice 4 (Un critère d'irréductibilité)

Montrer que le polynôme $2X^2Y + 2XYZ^3 - XZ + Y^3Z$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X,Y,Z]$.

Exercice 5 (IMO 1975, Problème 6)

Soit n un entier positif. Trouver tous les polynômes f à deux variables tels que :

1. pour tous réels t,x,y : $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$;
2. pour tous réels a,b,c : $f(a+b,c) + f(b+c,a) + f(c+a,b) = 0$;
3. $f(1,0) = 1$.

<u>Solution de l'exercice 2</u> On va diminuer le nombre de variables, en établissant l'égalité devant les coefficients en y. L'expression de gauche étant de degré 2 en y, les polynômes P et Q sont de degré au moins 1 en y car il doit y avoir un coefficient non nul devant y^2. Supposons-les de degré d strictement plus grand que 1 et notons $c_P(x,z,w)$ et $c_Q(x,z,w)$ les coefficients devant y^d de P et Q respectivement. Alors en développant, le coefficient devant y^{2d} de l'expression de droite est de la forme $c_P(x,z,w)^2 - (x^2-2z)c_Q(x,z,w)^2$, qui ne peut pas être le polynôme nul car (x^2-2z) n'est pas un carré (on peut aussi regarder le degré en z, qui devrait être pair à gauche mais impair à droite. On en déduit que P et Q sont de degré 1 en y. Si on écrit P de la forme $A(x,z,w)y + R(x,z,w)$ et Q de la forme $B(x,z,w) + S(x,z,w)$, on peut comparer les degrés en w, z pour trouver que A et B ne dépendent que de x, puis en regardant $A(x)^2 - (x^2-2z)B(x)^2$ comme une équation en z, on trouve $A(x)^2 = x^2$ et $B(x)^2 = 1$.

En cherchant à nouveau les coefficients devant y et l'évaluation pour $y = 0$ on trouve que $R = x^2 - z + w$ et $S = x$ dans le cas $A = x$ et $B = 1$, soit finalement $P = \pm(xy + x^2 - z + w)$ et $Q = \pm(x+y)$.

<u>Solution de l'exercice 3</u> On peut effectuer la division euclidienne de A par B si on les voit comme polynômes en x à coefficients dans $\mathbb{R}(y)$: $A = QB + R$ avec $deg_x B > deg_x R$. Or, pour une infinité de y_0, $B(x,y_0)$ divise $A(x,y_0)$, ce qui implique que $B(x,y_0)$ divise $R(x,y_0)$. Donc $deg_x B(x,y_0) \leq deg_x R(x,y_0)$ excepté pour un nombre fini de y_0 (ceux qui annulent le coefficient dominant de x dans R). D'où $R(x,y) = 0$. On peut donc écrire $\frac{A}{B} = \frac{F(x,y)}{M(y)}$ où F et M sont deux polynômes.

On montre exactement de la même manière en les considérant comme des polynômes en y que $\frac{A}{B} = \frac{G(x,y)}{N(x)}$. On peut bien sûr faire en sorte que $PGCD(F,M) = PGCD(G,N) = 1$ et on a évidemment $PGCD(M,N) = 1$. Comme $FN = GM$, on a que M divise FN, d'où M est constant et B divise bien A.

<u>Solution de l'exercice 4</u> Il se trouve que le critère d'irréductibilité d'Eisenstein (je vous redirige encore une fois vers le poly d'Igor pour avoir la version dans $\mathbb{Z}[X]$ et sa démonstration) s'adapte très bien aux polynômes à plusieurs variables sous la forme suivante :

ThéorÃ¨me 43. Soit $A(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{k=0}^{d} a_k(X_1,\ldots,X_{n-1})X_n^k$ vu comme polynôme en X_n à coefficients dans $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_{n-1}]$. Supposons qu'il existe un polynôme irréductible $P \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_{n-1}]$ tel que :

1. P ne divise pas a_n
2. P divise a_k pour tout $k \in \{1,\ldots,d\}$
3. P^2 ne divise pas a_0.

Alors A est irréductible.

Ici on peut voir $2X^2Y + 2XYZ^3 - XZ + Y^3Z$ comme un polynôme en Y et appliquer le critère d'Eisenstein avec le polynôme X, irréductible dans $\mathbb{R}[X,Z]$.

<u>Solution de l'exercice 5</u> La première condition indique que l'on cherche un polynôme homogène de degré n à deux variables.

On peut appliquer la deuxième condition pour $a = b = c$, qui nous donne que $f(2y,y) = 0$ pour tout réel y. On en déduit que $X - 2Y$ divise f.

On sait que les facteurs irréductibles de f sont de la forme $X - \lambda Y$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et le coefficient devant X^n est 1 (car $f(1,0) = 1$). On écrit $f(X,Y) = (X-2Y)g(X,Y)$ avec g

polynôme homogène de degré $n-1$ et $g(1,0)=1$. On va montrer que pour tous réels x, y tels que $x+y=1$ on a $g(x,y)=1$, ce qui implique $g(X,Y)=(X+Y)^{n-1}$. En effet, pour tous x, y tels que $x+y \neq 0$ on a $g(x,y)=(x+y)^{n-1}g(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y})=(x+y)^{n-1}$ puis on conclue par continuité.

On veut montrer que $x+y=1$ implique $f(x,y)=x-2y$, soit $f(x,1-x)=3x-2$ pour tout x. On effectue le changement de variable suivant : on pose $z=3x-2$ et $f(x,1-x)=P(z)$, où P est un polynôme en une variable. En appliquant la deuxième condition avec $a=2x-1$ et $b=c=1-x$, on a que pour tout x, $2f(x,1-x)+f(2-2x,2x-1)=0$, d'où $2P(z)+P(-2z)=0$ pour tout z. D'où $P(z)=-\frac{1}{2}P(-2z)$ et en itérant : $P(z)=\left(-\frac{1}{2}\right)^k P\left((-2)^k z\right)$ pour tout entier k. En faisant tendre k vers l'infini, on a que P est de degré 1 et de coefficient constant nul. De plus on sait que $P(1)=1$ (troisième condition). On en déduit que $P(z)=z$, ce qui est bien ce qu'on voulait. Finalement, la seule solution est $f(X,Y)=(X-2Y)(X+Y)^{n-1}$.

Comment penser à regarder $x+y=1$? Peut-être en cherchant à exploiter la deuxième condition en faisant apparaître $f(\lambda c, c)$ où $X-\lambda Y$ est un facteur potentiel. Par exemple, en posant $a+b=\lambda c$ et $a=c$, on obtient $2f(\lambda c,c)+f(2c,(\lambda-1)c)=0$ donc $f(\lambda c,c)=0$ pour tout c si et seulement si $f(\frac{2}{\lambda-1}c,,c)=0$ pour tout c ($\lambda=1$ ne convient pas d'après la troisième condition). En cherchant pour quels λ les deux valeurs λ et $\frac{2}{\lambda-1}$ sont égales, on trouve $\lambda=2$, que l'on avait déjà, ou $\lambda=-1$, qui correspond au facteur $(X+Y)^{n-1}$. On peut aussi montrer que $f(0,1)=-2$, le coefficient devant Y^{n-1} dans g est donc 1 ou -1.

3 vendredi 18 matin : polynômes, Antoine Séré

Parité

Soit P à coefficients entiers, tel que $P(0)$ et $P(1)$ sont impairs. Montrez que P n'a pas de racines entières.

Solution : passer le problème modulo 2.

Nombre premiers

Prouvez qu'il n'existe pas de polynôme non constant P tel que $P(0), P(1), P(2), \ldots$ soient tous premiers.

Solution : regarder les $P(kP(0))$. Ils sont égaux à $P(0)$ car premiers et divisibles par $P(0)$. Donc P est constant ce qui est impossible.

Images des carrés

Soit P polynôme de degré n. Supposons que $P(0), P(1), P(4), \ldots, P(n^2)$ sont entiers. Montrez que pour tout entier i, $P(i^2)$ est un entier.

Solution : introduire $Q(X) = P(X^2)$, et utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange ou ceux de Newton.

Fibonacci

Soit P de degré au plus 990, tel que pour tout entier k entre 992 et 1982, $P(k) = F_k$ où F est la suite de Fibonacci. Donnez une expression simple de $P(1983)$.

Solution : utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange ou ceux de Newton.

Interprétation géométrique ?

Soit $P(X) = X^4 - pX^3 + qX^2 - rX + s$. On sait qu'il existe un triangle ABC tel que $tan(A), tan(B), tan(C)$ sont trois des quatre racines de P. exprimer la quatrième racine en fonction de p, q, r, s seulement.

Solution : se rappeler, ou retrouver la relation :$a = tan(A)+tan(B)+tan(C) = tan(A)tan(B)tan(C)$, vraie pour tout triangle ABC.
écrire $X^4 - pX^3 + qX^2 - rX + s = (X - R)(X^3 - aX^2 + bX - a) = X^4 - (R + a)X^3 + (Ra + b)X^2 - (Rb + a)X + Ra$.
Par identification des coefficients, on trouve un système d'équations. En manipulant ces équations, on trouve :

$$R = \frac{r - p}{q - s - 1}$$

Bourrinage

Trouvez le coefficient en x^2 de P_n défini par :

$P_0 = X$
$P_{n+1} = (P_n - 2)^2$

Solution : trouver par récurrence la forme du coefficient unitaire de P_n, puis celle de son coefficient en X, puis celle du coefficient en X^2.

4 samedi 19 matin : inégalités, Guillaume Conchon–Kerjan

Cours sur les inégalités

Que ce soit aux OIM ou dans d'autres compétitions internationales, les inégalités sont en perte de vitesse depuis un certain nombre d'années. Toutefois, il est important de connaître les techniques standard, qui pourraient être utiles dans des problèmes d'arithmétique ou de combinatoire. Nous avons ainsi passé en revue un certain nombre d'inégalités classiques (Schur, Muirhead, inégalité arithmético-géométrique), et abordé la méthode dite "du triangle" pour les inégalités homogènes à trois variables. Nous avons terminé par une propriété un peu plus fine que les inégalités usuelles, dite "théorème SOS", qui peut servir dans quelques exercices

retors.
Le cours est tiré de celui de Matthieu Piquerez au stage olympique de Valbonne 2015 (), et la dernière partie peut se retrouver dans le papier "SOS theorem" d'Evan Chen.
Pour un cours général sur les inégalités et une base d'exercices conséquente, on pourra consulter l'article "Inequalities" sur la page d'Evan Chen ainsi que ceux de Thomas Mildorf et Kiran Kedlaya sur la page correspondante d'art of problem solving.

Exercices

Exercice 1 (OIM 2000) Soit a, b, c des réels positifs tels que $abc = 1$, montrer que

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$$

Exercice 2 Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs tels que

$$\frac{1}{1+x_1}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}=1.$$

Montrer que $x_1x_2\ldots x_n \geq (n-1)^n$.

Exercice 3 Soit a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que

$$a^2c(a-b)+b^2a(b-c)+c^2b(c-a)\geq 0.$$

Exercice 4 (non traité en classe) Soit $k, n, r \in \mathbb{N}$ tels que $n, k \geq 1$ et $r \leq n-1$. Soit $a_1, \ldots, a_n$ des entiers dont la somme vaut $kn+r$. Prouver que

$$\binom{a_1}{2}+\ldots+\binom{a_n}{2}\geq r\binom{k+1}{2}+(n-r)\binom{k}{2}.$$

Exercice 5 Soit a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{(a-b)(a-c)}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a-b)(a-c)}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a-b)(a-c)}{2a^2+(b+c)^2}\geq 0.$$

Exercice 6 Inégalité de Kantorovich (non traité en classe)
Soit $0 < x_1 < \ldots < x_n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ des réels, tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. On pose $\alpha = \frac{x_1+x_n}{2}, \beta = \sqrt{x_1x_n}$. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{x_i}\right)\leq\frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

Solutions

<u>Solution de l'exercice 1</u> La condition $abc = 1$ permet d'affirmer qu'il existe des réels x, y, z tels que $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}$ et $c = \frac{z}{x}$. En remplaçant dans l'inégalité de départ et en multipliant par xyz, on peut la réécrire ainsi :

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leq xyz.$$

On développe et on réduit, et il suffit de montrer que

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz - x^2y - y^2x - x^2z - z^2x - y^2z - z^2y \geq 0.$$

Le membre de gauche peut se réécrire $x(x - y)(x - z) + y(y - x)(y - z) + z(z - x)(z - y)$, et l'inégalité de Schur affirme qu'il est positif.

<u>Solution de l'exercice 2</u> Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose $u_i = \frac{1}{1+x_i}$, on a donc $u_i \geq 0$ pour tout i et $u_1 + \ldots + u_n = 1$. On a

$$x_1 \ldots x_n = \frac{(1 - u_1) \ldots (1 - u_n)}{u_1 \ldots u_n} = \frac{(\sum_{j \neq 1} u_j) \ldots (\sum_{j \neq n} u_j)}{u_1 \ldots u_n}$$

et on conclut par l'inégalité arithmético-géométrique.

<u>Solution de l'exercice 3</u> On peut appliquer la transformation de Ravi : le fait que a, b, c soient les longueurs des côtés d'un triangle (éventuellement dégénéré) équivaut à l'existence de $x, y, z \geq 0$ tels que $a = y + z, b = x + z$ et $z = x + y$. En remplaçant, le membre de gauche devient

$$\sum_{cyc} (y + z)^2(y^2 - x^2) = \sum_{cyc} (y^2 + z^2)(y^2 - x^2) = \sum_{cyc} 2yz(y^2 - x^2).$$

On développe et on réduit pour trouver

$$(x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2) + 2(x^3y + y^3z + z^3x - x^2yz - y^2zx - z^2xy).$$

La première parenthèse est toujours positive (en effet, pour tous réels A, B, C, $A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA = \frac{1}{2}((A - B)^2 + (B - C)^2 + (C - A)^2)$. La seconde l'est aussi par inégalité du réordonnement. Attention, comme la somme est cyclique et non symétrique, il faut distinguer les cas $x \geq y \geq z$ et $x \geq z \geq y$.

Remarque 44. Après avoir fait la substitution, on peut directement développer la somme et appliquer la méthode du triangle.

<u>Solution de l'exercice 4</u> La fonction $f : x \to \binom{x}{2}$ étant convexe, on peut appliquer l'inégalité de Karamata : quitte à ordonner les a_i, on peut supposer que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $b_i := k$ si $i \leq n - r$, et $b_i := k + 1$ sinon. On vérifie aisément que pour tout $j \leq n$, $a_1 + \ldots + a_j \leq b_1 + \ldots + b_j$. En outre, $a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n$, donc on est bien dans les conditions d'application de Karamata.

<u>Solution de l'exercice 5</u> **Première solution.** En utilisant l'identité $(a - c)^2 = ((a - b) + (b - c))^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + 2(a - b)(b - c)$, on constate que l'inégalité de l'énoncé est équivalente à

$$S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2 \geq 0$$

avec $S_a = X_b + X_c - X_a$, $S_b = X_a + X_c - X_b$ et $S_c = X_a + X_b - X_c$, si on appelle X_a la quantité $\frac{1}{2a^2+(b+c)^2}$ et ainsi de suite.
On peut supposer que $a \geq b \geq c$. D'après le théorème SOS, il suffit que $S_b, S_b + S_a$ et $S_b + S_c$ soient positifs. $S_b + S_a = 2X_c \geq 0$ et $S_b + S_c = 2X_a \geq 0$. Il reste donc à prouver que $S_b \geq 0$, soit $X_b \leq X_a + X_c$. On montre aisément que $S_a \geq S_b/2$ et $S_c \geq S_b/2$, d'où le résultat.

Seconde solution. On utilise le fait suivant : une expression polynômiale $f(a, b, c)$ symétrique en a et b (à savoir, $f(a, b, c) = f(b, a, c)$ pour tous a, b) et nulle dès lors que $a = b$ est factorisable par $(a-b)^2$. Ainsi, en supposant sans perte de généralité $a \geq b \geq c$, le troisième terme est positif, et la somme des deux autres est factorisable par $(a-b)^2$. En additionnant ces deux fractions mises au même dénominateur, cet indice nous permet de trouver assez vite de factoriser le numérateur en

$$(a-b)^2(a^2 - ab + b^2 + 3c(a+b) - c^2)$$

qui est clairement positif, car $a^2 + b^2 \geq 2ab$ et $ca \geq cb$.

Solution de l'exercice 6 Soit $A := \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{x_i}\right)$. On a $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{(x_1+x_n)^2}{4x_1x_n}$. On remarque que pour tout $1 \leq i \leq n$, $(x_i - x_n)(x_i - x_1) \leq 0$, ce qui peut se transformer en

$$\frac{1}{x_i} \leq \frac{x_1 + x_n - x_i}{x_1 x_n}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
A &\leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{x_1+x_n}{x_1x_n} - \frac{\lambda_i x_i}{x_1 x_n}\right)\\
A &\leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)\left(\frac{x_1+x_n}{x_1x_n} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{x_i}{x_1 x_n}\right)\\
A &\leq \frac{x_1+x_n}{x_1x_n}\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i x_i}{x_1x_n}\right)\\
A &\leq \frac{x_1+x_n}{x_1x_n}\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i - \frac{1}{x_1x_n}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)^2 A \leq \qquad \frac{1}{x_1x_n}((x_1+x_n)U - U^2)
\end{aligned}$$

où $U := \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Or, la fonction réelle $x \to ax - x^2$ atteint son maximum en $x = a/2$, et il vaut $a^2/4$, donc

$$A \leq \frac{(x_1+x_2)^2}{4x_1x_n},$$

ce qui conclut.

8 Groupe D : arithmétique

1 jeudi 17 après-midi : LTE, Guillaume Conchon–Kerjan

Cours

Ce cours portait sur l'ordre multiplicatif. Nous avons fait quelques rappels puis vu le lemme dit "LTE" (pour "Lifting the Exponent Lemma") avec de nombreuses applications, ainsi

que le puissant théorème de Zsigmondy.
Pour un cours sur LTE, on peut se référer à celui d'Amir Hossein Parvardi, trouvable sur cette page du site d'art of solving problems.
Sur la page d'Igor Kortchemski, on peut trouver un cours complet sur LTE et Zsigmondy en passant par les polynômes cyclotomiques, ainsi que des exercices sur l'ordre puis LTE et Zsigmondy.

Exercices

Exercice 1
Trouver tous les entiers naturels n tels que $n|2^n - 1$.

Exercice 2
Quels sont les entiers $n, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $n|k^n - 1$ et $n \wedge (k-1) = 1$?

Exercice 3 Irlande 1996
Soit p un nombre premier, a et n des entiers strictement positifs. Montrer que si $2^p + 3^p = a^n$, alors $n = 1$.

Exercice 4
Quels sont les nombres premiers p tels que $(p-1)^p + 1$ soit une puissance de p ?

Exercice 5 Russie 1996
Trouver tous les entiers $n \geq 1$ tels qu'il existe $x, y, k \in \mathbb{N}^*$ avec $x \wedge y = 1$ et $k > 1$ vérifiant $3^n = x^k + y^k$.

Exercice 6 Bulgarie 1997
Montrer que si $3^n - 2^n$ est une puissance de nombre premier, alors n est un nombre premier.

Exercice 7 OIM 1990
Trouver tous les entiers naturels n tels que $n^2|2^n + 1$.

Exercice 8
Soit $a > b > 1$ des entiers avec b impair. On suppose que pour un certain $n \geq 1$, $b^n|a^n - 1$. Montrer que $a^b > 3^n/n$.

Exercice 9
Trouver toutes les paires d'entiers naturels (a, b) tels que $b^a|a^b - 1$.

Exercice 10 Malaisie 15
Trouver tous les entiers positifs a, b, c tels que $2^a 3^b = 7^c - 1$.

Exercice 11 Roumanie 15
Trouver tous les entiers positifs a, b, c tels que $11^a + 3^b = c^2$.

Exercice 12 SL 97
Soit $b, m, n \in \mathbb{N}^*$, avec $b \neq 1$ et $m \neq n$. Montrer que si $b^m - 1$ et $b^n - 1$ ont les mÃªmes facteurs premiers, alors $b + 1$ est une puissance de 2.

Exercice 13 SL 02
Soit $n \geq 1$ un entier et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des nombres premiers distincts, tous supérieurs ou égaux à 5. Montrer que $N = 2^{p_1 \cdots p_n} + 1$ a au moins 2^{2^n} diviseurs distincts.

Exercice 14 SL 04
Trouver tous les entiers strictement positifs a, m, n tels que $a^n + 1$ divise $(a+1)^m$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
On voit que n doit Ãªtre impair. $n = 1$ étant solution, on suppose désormais $n > 1$. Soit p son plus petit diviseur premier, qui est donc impair, et ω l'ordre de 2 modulo p. Alors d'après l'énoncé, $\omega | n$, et d'après le petit théorème de Fermat, $\omega | p-1$. Or $p-1$ n'a que des diviseurs premiers strictement plus petits que p, donc ne divisant pas n par minimalité de p. Donc $n \wedge (p-1) = 1$ et ainsi $\omega = 1$. Donc $2 \equiv 1 \pmod p$, ce qui est absurde. Donc $n = 1$ est le seul entier naturel tel que $n | 2^n - 1$.

Solution de l'exercice 2
On raisonne comme dans l'exercice précédent : soit k le plus petit diviseur premier de n, qui est premier avec k, et ω l'ordre de k modulo p. On trouve de mÃªme que $\omega = 1$, donc $p | k-1$. Ainsi, $n | (k-1) \geq p > 1$. Donc pour satisfaire à la condition de l'énoncé, il faut $n = 1$, mais dans ce cas le pgcd de n et $k-1$ vaut 1. Donc il n'y a pas d'entiers $n, k \in \mathbb{N}^*$ qui conviennent.

Solution de l'exercice 3
Si $p = 2$, $a^n = 13$ donc $a = 13$ et $n = 1$. Sinon, p est impair, donc $5 | 2^p + 3^p$. Donc, si $n > 1$, $25 | 2^p + 3^p$. Or

$$2^p + 3^p \equiv 2^p + (5-2)^p \equiv 5p \times 2^{p-1} \pmod 5,$$

donc il faut que $5 | p$, donc que $p = 5$. Mais dans ce cas, $a^n = 275 = 5^2 \times 11$ donc $a = 275$ et $n = 1$. On pouvait aussi utiliser LTE pour vérifier que $v_5(2^p + 3^p) = 1$ si $p \wedge 5 = 1$.

Solution de l'exercice 4
$p = 2$ convient. Sinon, on applique LTE à p impair pour obtenir $v_p((p-1)^p + 1) = 2$, donc $(p-1)^p + 1 = p^2$ donc $(p-1)^{p-1} = p+1$. On vérifie aisément que le membre de gauche est bien trop grand pour $p \geq 5$. Mais $p = 3$ convient, donc le problème a deux solutions : 2 et 3.

Solution de l'exercice 5
Soit n, x, y, k de tels entiers. Ni x ni y ne peuvent Ãªtre multiple de 3. Ainsi, si k est pair, $x^k + y^k \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 3$, impossible. Donc k est impair, et $x^k \equiv x \pmod 3$, et de mÃªme pour y. Donc $3 | x+y$. Ainsi, on peut appliquer LTE, ce qui donne $n = v_3(x+y) + v_3(k)$. On pose $j = v_3(x+y)$. Donc $x + y = 3^j$ ($x+y$ est clairement une puissance de 3, car il divise $x^k + y^k$). Sans perte de généralité, $x \geq y$, donc $x \geq 3^j/2$. Notons de plus que $k > 1$, donc $x^k + y^k > x+y$, donc $j \leq n-1$, donc $v_3(k) \geq 1$, donc $k \geq 3$.
Alors $3^n \geq 3^{kj}/2^k$ donc $2^k \geq 3^{kn - kv_3(k) - n}$. Mais $3^{v_3(k)} \leq k$, donc $(2k)^k \geq 3^{(k-1)n}$. Si $n < k$, $x < 3$, donc $x = 2$,$y = 1$ et $j = 1$. Donc $v_3 k = n-1$, donc $k \geq 3^{n-1}$. Donc $x^k = 3^{3^{n-1}} > 3^n$ pour $n \geq 2$. Ainsi, $n \geq k$ donc $(2k)^k \geq 3^{(k-1)k}$, soit $2k \geq 3^{k-1}$, qui est faux pour $k \geq 3$.
En conclusion, il n'existe pas de solutions à cette équation.

Solution de l'exercice 6
On montre d'abord que n est impair (sinon, on factorise avec la troisième identité remarquable et on conclut rapidement). Puis on considère q un diviseur premier de n : on pose $n = qn'$, en supposant que $q \neq n$. Alors $3^q - 2^q = p^{k'}$. En utilisant LTE, on obtient : $v_p(n') = k - k'$, et $n' = p^{k-k'}u$ pour un certain u premier avec p. On écrit $p^k = (3^q)^r - (2^q)^r$ en écrivant r, et on remplace 3^q par $2^q + p^{k'}$. On aboutit rapidement à la conclusion.

Solution de l'exercice 7
Il est clair que n est impair. On considère p le plus petit diviseur premier de n. L'ordre de 2 modulo p divise $p-1$ et $2n$ (on raisonne comme dans l'exercice 1). Donc ce ne peut Ãªtre que 2,

et $2^2 \equiv 1 \pmod 3$. Donc $p = 3$. On écrit $n = 3u$, on applique LTE avec $p = 3$: $2v_3(n) \leq v_3(n)+1$, donc $v_3(n) = 1$. Ainsi, $3 \not| u$, on considère le plus petit diviseur premier de u, noté q. q^2 divise $8^u + 1$, donc l'ordre de 8 modulo q divise $2u$ et $q - 1$ et vaut ainsi 1 ou 2. Donc $q|7$ ou $q|63$. Comme $q \neq 3$, $q = 7$ dans tous les cas. Alors n est multiple de 21, mais $8^u + 1 \equiv 2 \pmod 7$, contradiction.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>
Si b n'est pas premier, on considère q un de ses diviseurs premiers : on a $q^n|a^n - 1$, donc on doit avoir $a^q > 3^n/n$ d'après l'énoncé. On aura alors $a^b > a^q > 3^n/n$. On peut donc se borner à étudier le cas où b est premier. Soit ω l'ordre de a mod b. D'après le petit théorème de Fermat, $\omega \leq b - 1$. D'après l'énoncé, il existe n_1 tel que $n = \omega n_1$. LTE nous informe que $v_b(a^n - 1) = v_b(a^\omega - 1) + v_b(n_1)$. Donc

$$a^q > a^\omega - 1 \geq \frac{b^{v_b(a^n-1)}}{b^{v_b(n-1)}} \geq b^n/n,$$

car $n_1|n$ et $b^n|a^n - 1$, ce qui conclut car $b \geq 3$.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>
On élimine rapidement les cas $a = 1$ ou $b = 1$. Soit p le plus petit diviseur premier de b, et m l'ordre de a modulo p. m divise b et $p - 1$ donc c'est 1. D'après LTE, si p est impair, $av_p(b) \leq v_p(a-1) + v_p(b)$, donc $(a-1)v_p(b) \leq v_p(a-1) < a - 1$. Or $v_p(b) \geq 1$, contradiction. Donc $p = 2$.
On écrit $p = 2c$, on voit que a est impair. Par LTE, on trouve $a = 3$ et $v_2(b) = 1$. Donc $8c^3|3^{2c} - 1$ et c est impair. Soit q son plus petit diviseur premier. On considère son ordre modulo 3, et on aboutit rapidement à la conclusion : $a = 3$ et $b = 2$ fournit la seule solution (pour $a, b \neq 1$).

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>
Si $c > 1$, $7^c - 1$ a des diviseurs premiers que $7 - 1$ ne possède pas d'après le théorème de Zsigmondy, donc autres que 2 et 3. Ainsi, $c = 1$, et par suite $a = b = 1$, ce qui donne une unique solution.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u>
En raisonnant modulo 3, on voit que a est pair. On pose $k = a/2$. On a $3^b = (c - 11^k)(c + 11^k)$. Donc pour certains u, v tels que $u \geq v \geq 0$ et $u + v = b$, $c + 11^k = 3^u$ et $c - 11^k = 3^v$. Donc $2 \times 11^k = 3^v(3^{u-v} - 1)$. Alors $v = 0$, donc $2 \times 11^k = 3^u - 1$. Soit ω l'ordre de 3 modulo 11. On a $\omega|u$. Et si $u > \omega$, d'après le théorème de Zsigmondy, il existe un nombre premier $p \neq 11$ tel que $p|3^u$. De mÃªme, $p \neq 2$ car $3^1 - 1$ est un multiple de 2. Donc $u = \omega = 5$. Ainsi, $2 \times 11^k = 242$, ce qui est vrai lorsque $k = 2$ uniquement.
Il y a donc une seule solution : $a = 4$, $b = 5$ et $c = \frac{3^5+1}{2}$.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u>
On peut supposer que $m > n$. D'après le théorème de Zsigmondy, $b^m - 1$ a des diviseurs premiers que n'a pas $b^n - 1$ sauf si $b + 1$ est une puissance de 2 ou si $m = 6$ et $b = 2$. Dans ce dernier cas, $2^6 - 1 = 63 = 3^2 \times 7$. Donc $21|2^n - 1$, donc $2^n \geq 22$. Il ne reste que $n = 5$ comme possibilité, mais $2^5 - 1 = 31$ n'est multiple ni de 3 ni de 7. Ainsi, $b + 1$ est une puissance de 2.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u>
Pour E un sous-ensemble de $\{p_1, \ldots, p_n\}$, on pose $q_E = 2^{\pi_{i \in E} p_i} + 1$. Clairement, $q_E|N$. Si E et F sont différents, $q_E - 1$ et $q_F - 1$ sont des puissances de 2 distinctes, d'exposant impair, dont

la plus grande est strictement plus grande que 8. D'après le théorème de Zsigmondy, q_E a un facteur premier que q_F n'a pas (en supposant $q_E > q_F$).
Soit maintenant $\mathcal{E}$ l'ensemble des q_E. Si $\tilde{E} \neq \tilde{F}$ sont deux sous-ensembles distincts de $\mathcal{E}$, en notant $r_{\tilde{E}}$ et $r_{\tilde{F}}$ les produits des éléments respectifs de $\tilde{E}$ et $\tilde{F}$. Supposons qu'ils soient égaux : le paragraphe précédent assure que $r_{\tilde{E}}$ et $r_{\tilde{F}}$ ont le mÃªme plus grand élément, r_0. En divisant par r_0 et en recommençant, on obtient que $\tilde{E} = \tilde{F}$, contradiction. Ainsi, N a au moins $2^{Card(\mathcal{E})}$ éléments. Or $\mathcal{E}$ possède 2^n éléments, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 14
On a $a^n + 1 < (a+1)^n$ donc $n > m$. D'après le théorème de Zsigmondy, $a^n + 1$ a des diviseurs premiers que $a + 1$ n'a pas ($n > m \geq 1$ donc $n \neq 1$), sauf si $a = 2$, $n = 3$, auquel cas il y a une unique solution, pour $m = 2$.

2 vendredi 18 après-midi : Félix Breton

Exercice 1 Trouver tous les entiers $m, n \geq 1$ tels que mn divise $3^m + 1$ et mn divise $3^n + 1$.

Exercice 2 Soient p,q deux nombres premiers tels que q divise $3^p - 2^p$. Montrer que p divise $q - 1$.

Exercice 3 Trouver les $a, n \geq 1$ tels que $n | (a+1)^n - a^n$.

Exercice 4 Soient $a, b > 1$ impairs tels que $a + b$ soit une puissance de 2. Montrer qu'il n'y a pas d'entiers $k > 1$ tels que k^2 divise $a^k + b^k$.

Exercice 5 Soit n un entier naturel. Montrer que les diviseurs premiers du nième nombre de Fermat $2^{2^n} + 1$ sont tous de la forme $k(2^{n+1}) + 1$.

Exercice 6 Montrer que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \mod p$.

Exercice 7 Montrer que $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$.

ThéorÃ¨me 45. $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

Exercice 8 Quels entiers divisent une somme de deux carrés premiers entre eux ?

Exercice 9 Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Exercice 10 On définit les x_i par $x_1 = a$ et $x_{i+1} = 2x_i + 1$. On définit la suite $y_i = 2^{x_i} - 1$. Déterminer le plus grand entier k tel qu'il soit possible que $y_1, ..., y_k$ soient tous premiers.

ThéorÃ¨me 46. $\left(\frac{p}{q}\right) = -1^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}} \left(\frac{q}{p}\right)$

ThéorÃ¨me 47. $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

Exercice 11 Dans quels cas 3 est il un résidu quadratique mod p ?

Exercice 12 219 est il un résidu quadratique modulo 383 ?

Exercice 13 Trouver tous les x,y,z premiers entre eux tels que $4x^2 + 77y^2 = 487z$.

Solution de l'exercice 10 On va montrer que $k_{max} = 2$. Si un nombre premier p divise x_i, alors une identité remarquable donne $2^p - 1 \mid 2^{x_i} - 1$. Par conséquent, pour que y_i soit premier, il faut que x_i le soit aussi. En particulier, si $k \neq 0$, a est premier. On commence par traiter le cas $a = 2$. Comme $2^{11} - 1 = 23 * 89$, k vaut au plus 2 dans ce cas. Sinon, a est impair de la forme $2n + 1$, donc $x_1 = 2n + 1$, $x_2 = 4n + 3$ et $x_3 = 8n + 7$. Si $k > 2$, alors y_2 et x_3 sont premiers, donc d'après le théorème 3, 2 est un résidu quadratique modulo x_3, et il existe s tel que $2 \equiv s^2 \mod x_3$. On a alors $y_2 \equiv 2^{x_2} - 1 \equiv 2^{(x_3-1)/2} - 1 \equiv s^{x_3-1} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \mod x_3$, donc $x_3 \mid y_2$, ce qui contredit l'hypothèse de primalité de y_2. Par conséquent, $k < 3$, et le cas $a = 2$ montre que k peut atteindre 2.

Solution de l'exercice 11 $\left(\dfrac{3}{p}\right) = (-1)^{\dfrac{2(p-1)}{4}} \left(\dfrac{p}{3}\right)$.

$\left(\dfrac{p}{3}\right)$ vaut -1 si $p \equiv 2 \mod 3$ et 1 si $p \equiv 1 \mod 3$, et $(-1)^{\dfrac{2(p-1)}{4}}$ vaut -1 si $p \equiv 3 \mod 4$ et 1 si $p \equiv 1 \mod 4$. En regardant les 4 valeurs que peut prendre p modulo 12 (les cas 2 et 3 sont traités à part), on obtient que 3 est un résidu quadratique modulo p si et seulement si $p \equiv \pm 1 \mod 12$.

Pour les exercices 1 à 4, voir le cours sur l'ordre multiplicatif du stage olympique de Grésillon en 2011, page 15.
Pour les exercices 5 à 9 et le 12, voir le premier cours d'arithmétique avancée du stage olympique de Montpellier en 2012, page 192.
Pour l'exercice 13, voir le second cours d'arithmétique avancée du même polycopié, page 198.

3 samedi 19 après-midi : Raphaël Ducatez

Définitions et propriétés élémentaires

Définition 48. On introduit le nombre imaginaire i qui vérifie :

$$i^2 = -1 \tag{V.15}$$

Définition 49. On appelle entier de Gauss les nombre de la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Et on notera $Z[i]$ cet ensemble.

Sur cet ensemble on défini l'addition et la multiplication :

Définition 50. Addition et Multiplications :

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \tag{V.16}$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + da) \tag{V.17}$$

Exercice 1 Calculer $(1 + 2i)(3 - i)$, $(1 + i)^2$ et $(2 - 2i)^4$.

Puisque l'on a la multiplication, quid de la division ?

Définition 51. Soit x, y deux entiers de Gauss. On dit que x divise y si il existe au entier de Gauss k tel que $y = kx$.

Définition 52. Soit $z = (a + ib)$ un entier de Gauss, on appelle le conjugué de z que l'on note $\bar{z}$

$$\bar{z} = a - ib \tag{V.18}$$

Proposition 53. Soit z_1, z_2 deux entiers de Gauss. Alors :

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2} \tag{V.19}$$

$$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z_1}\bar{z_2} \tag{V.20}$$

Démonstration. Il suffit de vérifier

$$(a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i(bc + ad) \tag{V.21}$$

□

Représentation géométrique des entiers de Gauss On peut représenter les entiers de Gauss $z = a + ib$ sur le plan en lui associant le point Z de coordonnées (a, b).

On introduit maintenant la notion de norme.

Définition 54. On note la norme de $z = a + ib$, $\|z\|$ définie par

$$\|z\|^2 = a^2 + b^2 \tag{V.22}$$

Remarque 55.

$$\bar{z}z = \|z\|^2 = a^2 + b^2 \tag{V.23}$$

Proposition 56.

$$|xy\| = \|x\|\|y\| \tag{V.24}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\|xy\|^2 &= (xy)(\bar{xy}) \\
&= (xy)\bar{x}\bar{y} \\
&= (x\bar{x})(y\bar{y}) \\
&= \|x\|^2\|y\|^2
\end{aligned}$$

□

On obtient ainsi la proposition suivante que les entiers somme de deux carrés sont stable par multiplication.

Proposition 57. Si $x, y \in \mathbb{N}$ sont somme de deux carrés, alors xy est aussi somme deux carrés

Démonstration. Soit $x = a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$, $y = c^2 + d^2 = (c + id)(c - id)$ on a alors $xy = \|(a + ib)(c + id)\|^2 = (ac - bd)^2 + (bc + da)^2$ □

On peut alors en déduire la remarque simple mais extrÃ¨mement pratique :

Remarque 58. Si x divise y (pour les entiers de Gauss) alors $\|x\|^2$ divise $\|y\|^2$ (dans $\mathbb{N}$)

On peut en déduire alors que les seuls entiers de Gauss qui divise 1 sont $1, -1, i, -i$. Remarquez qu'ils divisent tous les entiers de Gauss : $z = (-1)(-z) = (i)(-iz) = (-i)(iz)$.
Exercice 2 Quels sont les diviseurs de 2 ? Quels sont les diviseurs de 3 ?

Solution de l'exercice 2 Soit z divise 2 alors $\|z\|^2|4$. On a donc $\|z\|^2 = 1, 2, 4$. Pour $\|z|\|^2 = 1$, on a les diviseurs canoniques $1, -1, i, -i$. Pour $\|z\|^=2$ cela donne $z = \pm 1 \pm i$, En effet $2 = (1+i)(1-i) = (-1+i)(-1-i)$. Pour $\|z\|^2 = 4$ ce sont les autres diviseurs évidents $z, -z, iz, -iz$.

Soit z divise 3. Alors $\|z\|^2|9$ et donc $\|z\|^2 = 1, 3, 9$. On ne peut avoir $a^2 + b^2 = 3$, il ne reste donc que $\|z\|^2 = 1, 9$ qui donne les diviseurs triviaux ± 1, $\pm i$, ± 3 et $\pm 3i$. On peut maintenant introduire la notion de nombre premier de Gauss.

Définition 59. On dit qu'un entiers de Gauss z est premier si il n'admet comme diviseur que ± 1, $\pm i$, $\pm z$ et $\pm iz$.

Remarque 60. Les entiers qui ne sont pas premier dans $\mathbb{N}$ ne sont évidement pas premier dans $\mathbb{Z}[i]$. Les entier premier usuels (dans $\mathbb{N}$) ne sont pas forcement premier dans $\mathbb{Z}[i]$. (exemple : $2 = (1 + i)(1 - i)$)

On peut donc se poser la question, quels sont les entiers premiers de Gauss ?

Théorèmes d'arithmétique pour les entiers de Gauss.

Définition 61. La division euclidienne pour les entiers de Gauss. Pour tout z, m entier de Gauss, il existe un couple d'entier de Gauss q, r tel que

$$z = qm + r \tag{V.25}$$

avec $\|r\| < \|m\|$.

Démonstration. On note $z = a - ib$ et $m = c + id$. Avec les nombres complexe $\mathbb{C}$, ($\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{Z}$). On peut calculer les fractions de nombres complexe de la manière suivante.

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd-i(ad-bc))}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{ad-bc}{c^2+d^2} \tag{V.26}$$

Pour la division euclidienne dans $\mathbb{N}$, on peut calculer sa fraction et conserver la partie entière ce qui donne le quotient. On fait ici la même chose pour à la fois la partie réel et la partie imaginaire : il existe un unique entier e,

$$e - \frac{1}{2} < \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \leq e + \frac{1}{2}$$

et unique entier f tel que

$$f - \frac{1}{2} < \frac{ad-bc}{c^2+d^2} \leq f + \frac{1}{2}$$

. On pose alors $q = e + if$. On a alors que

$$\begin{aligned}
|\frac{z}{m} - q\|^2 &\leq (e - \frac{ac+bd}{c^2+d^2})^2 + (f - \frac{ad-bc}{c^2+d^2})^2 \\
&\leq (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 \\
&\leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

et donc $\|z - qm\| \leq \frac{\|q\|}{\sqrt{2}}$.

□

On a une division euclidienne, on peut donc faire l'algorithme d'euclide !!!

Définition 62. Soit x, y deux entiers de Gauss non nuls. On définit le pgcd de x et y comme l'entier de Gauss w non nul de plus petite norme tel que $w = kx + ly$ avec k et l deux entiers de Gauss.

Il existe et est unique à multiplication par $\pm 1, \pm i$ et on vérifie que c'est le plus grand (pour la norme) diviseur commun à x et y.

Démonstration. Parmi l'ensemble des $(kx+ly), (k, l) \in \mathbb{Z}[i]$. le minimum pour la norme existe car c'est un ensemble discret. Montrons l'unicité : Soit $w_1 = (k_1 x + l_1 y)$ et $w_2 = (k_2 x + l_2 y)$ deux minimum. Soit r le reste de la division euclidienne de w_1 par w_2 alors $r = w_1 - qw_2 = (k_1 x + l_1 y) - q(k_2 x + l_2 y) = (k_1 - qk_2)x + (l_1 - ql_2)y$. Donc r est dans l'ensemble considéré et par division euclidienne $\|r\| < \|w_2\|$. Donc par minimalité de w_2, on en déduit que $r = 0$. Conclusion w_2 divise w_1 et comme $\|w_1\| = \|w_2\|$, cela donne $w_2 = \pm w_1$, ou $w_2 = \pm i w_1$. □

En remplaçant w_1 par x ou y et w_2 par w dans la preuve, on montre de la même manière que w divise x et y. De plus tout diviseur commun à x et y divise les entiers de Gauss de la forme $kx + ly$ et donc tout diviseur commun divise w. C'est donc bien le plus grand diviseur commun.

On dira que deux entiers sont premier entre eux si leur pgcd est 1.

ThéorÃ¨me 63. Lemme de Gauss. Si $z|xy$ et z premier avec x, alors z divise y.

Démonstration. Soit k, l tel que $kz + lx = 1$. Alors $kzy + lxy = y$ et donc $z|y$ car $z|kzy$ et $z|lxy$. □

On peut alors en déduire le théorème des nombres premiers pour les entiers de Gauss.

ThéorÃ¨me 64. Soit z un entier de Gauss. Il existe alors une unique décomposition en facteurs premiers de Gauss au facteur ± 1,$\pm i$ près.

Démonstration. Existence de la décomposition : par récurence soit z n'admet pas de diviseur non trivial, alors z est premier. Sinon il existe x et y tel que $xy = z$ et $\|x\| < \|z\|$ et $\|y\| < z$. Par hypothèse de récurence, x et y sont décomposable en facteur premier. Pour z il suffit donc de choisit le produit de cette décomposition.

Unicité : Soit deux décomposition en facteurs premiers Π_1 et Π_2 de z et soit p un facteur premier dans Π_1 alors $p|\Pi_2$. Puisqu'il est premier, par Gauss il divise au moins un des termes q de Π_2 et comme ce terme est premier on a bien $p = q$ (au facteur triviaux près.) On a alors $\Pi_1/p = \Pi_2/p$ et on peut conclure par hypothèse de récurence. □

Les nombres premiers de Gauss et le théorème des 2 carrés

On cherche dans cette partie à trouver les nombres premiers de Gauss. On vera que cela a pour implication le théorème des deux carrés.

Remarque 65. Soit un entier premier de Gauss z alors il divise un nombre premier de $\mathbb{N}$. En effet $z\bar{z} = \|z\|^2 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition usuel en facteur premier de $\mathbb{N}$. Alors par Gauss, il divise un de ces facteurs.

Il suffit donc de trouver les diviseur premier de Gauss pour chaque entier premier p de $\mathbb{N}$.

Remarque 66. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors si z divise n alors $\bar{z}$ divise n. En effet $n = \bar{n} = \bar{kz} = \bar{k}\bar{z}$.

Il faut également remarquer que si $z = a + ib$ est premier de Gauss différent de $\pm 1 \pm i$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et que z et $\bar{z}$ sont premier entre eux. En effet soit ils sont premier entre eux, soit $z = \pm\bar{z}$ ou $z = \pm i\bar{z}$ et dans ce cas $a = \pm b$ et donc $1 + i|z$.

Proposition 67. Les entier premier p (dans $\mathbb{N}$) tel que $p = 3[4]$ sont des entiers premier de Gauss.

Démonstration. Soit $z = a^2 + b^2$ diviseur non trivial de p. Alors $\|z\|^2|p^2$. Donc $\|z\|^2 = 1, p, p^2$. Comme il est non trivial on a donc $\|z\|^2 = p$. Donc $p = a^2+b^2$, mais c'est impossible car $p = 3[4]$ et n'est donc jamais somme de deux carrés. □

Proposition 68. Les entier premier p (dans $\mathbb{N}$) tel que $p = 1[4]$ ne sont pas des entiers premier de Gauss.

Démonstration. Puisque $p = 1[4]$, il existe x dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que dans $x^2 = -1[p]$. On peut choisir $x \leq \frac{p}{2}$ (sinon on prend $p - x$) et alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x^2 + 1 = pk$ avec donc $k < p$. Dans $\mathbb{Z}[i]$ on peut alors écrire :

$$(x - i)(x + i) = kp \tag{V.27}$$

Supposons que p soit un entier premier de Gauss. Alors $p|(x - i)$ ou $p|(x + i)$ or dans les deux cas c'est absurde car $\|x \pm i\|^2 = kp < p^2 = \|p\|^2$. □

Proposition 69. Soit un entier premier p (dans $\mathbb{N}$) tel que $p = 1[4]$, alors il existe un entier premier de Gauss tel que $z\bar{z} = p$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, p n'est pas premier, il admet donc un diviseur non trivial z avec donc $\|z\|^2 = p$. De plus puisque pour tout diviseur x de z on a $\|x\|^2|p$ on en déduit que z est premier. □

On peut alors résumer tout cela dans le théorème des entiers premiers de Gauss

ThéorÃ¨me 70. Les entiers premier de Gauss sont
- ▷ $(\pm 1 \pm i)$
- ▷ les $p, -p, ip, -ip$ tel que p premier dans N et $p = 3[4]$
- ▷ les $(\pm a \pm ib)$ tel que $a^2 + b^2 = p$ avec p premier dans $\mathbb{N}$ et $p = 1[4]$.

Et en passant on a démontré le fameux théorème des 2 carrés :

Corollaire 71 (Théorème des deux carrés)**.** Si $p = 1[4]$, alors il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $p = a^2+b^2$.

Démonstration. Soit $z = a + ib$ diviseur premier de Gauss de p. Alors $a^2 + b^2 = z\bar{z} = p$. □

Quaternion et théorème des 4 carrés

Définition 72. L'ensemble des quaternions est les éléments de la forme

$$q = a + ib + jc + kd \tag{V.28}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ pour les quaternions entiers (ou dans $\mathbb{R}$ lorsque l'on parle de quaternions en générale). Et i, j, k ont les relations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned}
&i^2 = -1\\
&j^2 = -1\\
&k^2 = -1\\
&ij = k, ji = -k\\
&jk = i, kj = -i\\
&ki = j, ik = -j
\end{aligned}$$

L'addition se fait naturellement

$$q_1+q_2 = (a_1+ib_1+jc_1+kd_1)+(a_2+ib_2+jc_2+kd_2) = (a_1+a_2)+i(b_1+b_2)+j(c_1+c_2)+k(d_1+d_2) \tag{V.29}$$

Par exemple $q_1 = 3 + j - 7k$, $q_2 = 2 - i + 3j + k$, alors $q_1 + q_2 = 5 - i + 4j - 6k$.

Pour la multiplication, attention ! Cette algèbre est non commutative pour la multiplication !!! $q_1q_2 \neq q_2q_1$. Pour calculer une multiplication, on developpe le produit, puis on utilise les règles algébriques de i, j et k. Par exemple

$$(1 + i)(j + 2k) = j + 2k + ij + 2ik = j + 2k + k - 2j = -j + 3k \tag{V.30}$$

La multiplication est par contre bien associative par exemple : $ijk = (ij)k = kk = -1$ et $i(jk) = ii = -1$.

Exercice 3 Calculer : $(1 + 2i + 3j)(1 - j + 2k)$, $(1 + i + j + k)^2$

Remarquer que les entiers (ou les réel) usuels (c'est à dire $a \neq 0$ et $b = 0, c = 0, d = 0$) eux commutent encore avec tout le monde. Par exemple $(1+2i+3j+4k)5 = (5+10i+15j+20k) = 5(1 + 2i + 3j + 4k)$.

Si on développe formellement le produit et cela donne la formule suivante

Proposition 73. Soit $q_1 = a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1$ $q_2 = a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2$ deux quaternions. Alors

$$\begin{aligned}
q_1q_2 = {} & a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2\\
& + i(a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)\\
& + j(a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - d_2b_1)\\
& + k(a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)
\end{aligned}$$

Comme pour les nombres complexes on a la notion de norme :

Définition 74. Soit q un quaternion, on note sa norme $\|q\|$ défini par

$$\|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{V.31}$$

De même on défini le conjugué

Définition 75. Soit q un quaternion, on note son conjugué $\bar{q}$ défini par

$$\bar{q} = a - ib - jc - kd \tag{V.32}$$

Remarquer que pour l'addition on a bien

$$\overline{q_1 + q_2} = (a_1 + a_2) - i(b_1 - b_2) - j(c_1 + c_2) - k(d_1 + d_2) = \bar{q_1} + \bar{q_2} \tag{V.33}$$

Cependant c'est un peu différent pour la multiplication

Proposition 76. Soit q_1, q_2 deux quaternions alors

$$\overline{q_1 q_2} = \bar{q_2}\bar{q_1} \tag{V.34}$$

Démonstration. Il est possible de le vérifier avec la formule du produit. Sinon on peut remarquer que si cette formule est vrai pour q_1, q_2 et pour q_1, q_3 alors elle est encore vrai pour $(q_1 + q_2), q_3$. En effet

$$\begin{aligned}\overline{(q_1 + q_2)}\bar{q_3} &= (\bar{q_1} + \bar{q_2})\bar{q_3} \\ &= \bar{q_1}\bar{q_3} + \bar{q_2}\bar{q_3} \\ &= \overline{q_3 q_1} + \overline{q_3 q_2} \\ &= \overline{q_3(q_1 + q_2)}\end{aligned}$$

Maintenant on vérifie que cela fonctionne pour les couples de base ib_1, ib_2 ib_1, jc_2, ib_1, kd_2,...,kd_1, kd_2, on peut en déduire que la formule est alors vrai pour toute somme des éléments de base et donc pour tous les quaternions. □

Proposition 77.

$$\|q\|^2 = q\bar{q} \tag{V.35}$$

Proposition 78.

$$\|q_1 q_2\| = \|q_1\|\|q_2\| \tag{V.36}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\|q_1 q_2\|^2 &= q_1 q_2 \overline{(q_1 q_2)} \\ &= q_1 q_2 \bar{q_2}\bar{q_1} \\ &= q_1(\|q_2\|^2)\bar{q_1} \\ &= (q_1\bar{q_1})\|q_2\|^2 \\ &= \|q_1\|^2\|q_2\|^2\end{aligned}$$

□

On déduit le lemme des quatres carrés :

Proposition 79. Soit $x, y \in \mathbb{N}$ qui sont sommes de quatres carrés (dans $\mathbb{N}$). Alors xy est aussi somme de quatre carrés.

Démonstration. On écrit $x = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = \|q_1\|^2$. $y = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2 = \|q_2\|^2$ donc $xy = \|q_1 q_2\|^2$. Le produit des quaternions donne même la formule : $xy = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 + d_3^2$ avec $a_3 = a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2$, $b_3 = (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)$ $c_3 = (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - d_2 b_1)$ $d_3 = (a_1 d_2 + a_2 d_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1)$ □

On termine maintenant en montrant le théorème des 4 carrés.

ThéorÃ¨me 80. Tout entier n peut s'écrire comme somme de 4 carré.

Démonstration. Grace au lemme précédent, il suffit de le montrer pour tout p premier (dans $\mathbb{N}$). Soit m le plus petit entier non nul tel que mp soit somme de 4 carrés. Le plan de la démonstration est de prouver que m est égale à 1. Pour cela on va montrer que l'on peut commencer avec $m < p$ et réalisera un descente sur m.

On commence par montrer l'exercice suivant : il existe a, b tel que $a^2 + b^2 + 1 = 0[p]$. Modulo $[p]$, a^2 parcours $\frac{p+1}{2}$ valeurs différentes. De même $-b^2 - 1$ parcours $\frac{p+1}{2}$ valeur différentes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Par principe des tiroirs il existe donc bien a et b tel que $a^2 = -b^2 - 1[p]$. On a donc $mp = a^2 + b^2 + 1$ et quitte à remplacer a par $p - a$ et b par $p - b$ on peut choisir $b, a < \frac{p}{2}$ et donc $mp < \frac{p^2}{2} + 1 < \frac{p^2}{2}$. On a donc bien $m < p$.

On peut maintenant réaliser la descente. Soit $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = pm$. On regarde le problème modulo $[m]$. On choisit a_2, b_2, c_2, d_2 de valeur absolu $\leq \frac{m}{2}$ avec $a_1 = a_2[m]$, $c_1 = c_2[m]$, $c_1 = c_2[m]$, $d_1 = d_2[m]$. Puisque $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 0[m]$, $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2 = 0[m]$ et on peut écrire

$$mr = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2$$

. Puisque $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2 \leq 4\frac{m^2}{4} = m^2$ on a $r \leq m$. Et on a pas égalité $r = m$ car sinon $m|2a_1, m|2b_1, m|2c_1$ et $m|2d_1$ et alors $km^2 = 4pm$ et donc $m = 4$ et a_1, b_1, c_1, d_1 pairs. Il suffit dans ce cas là de diviser par 2. Et maintenant on considère les quaternions q_1 et q_2 modulo m on a alors que $q_1 = q_2[m]$. Et donc

$$q_1 \bar{q_2} = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2) + i0 + j0 + k0[m] = 0 + i0 + j0 + k0[m] \tag{V.37}$$

Conclusion en notant $q_3 = q_1 \bar{q_2}$ on a

$$(mp)(mr) = \|q_3\|^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 + d_3^2 \tag{V.38}$$

Mais puisque $q_3 = 0[m]$, on a $m|a_3$, $m|b_3$, $m|c_3$, $m|d_3$ et donc

$$pr = (\frac{a_3}{m})^2 + (\frac{b_3}{m})^2 + (\frac{c_3}{m})^2 + (\frac{d_3}{m})^2 \tag{V.39}$$

On a donc pu écrire pr comme somme de 4 carrés avec $m < r$, la descente fonctionne Et c'est fini ! □

VI. Dimanche 20 matin : Test de mi-parcours

1 Groupe A

1 énoncé

Exercice 1

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} = 1 - \frac{1}{n}$$

Exercice 2

Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b, on a l'inégalité

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

Exercice 3

Déterminer le plus petit entier n tel que pour toute configuration de n points à coordonnées entières il existe deux de ces points dont le milieu est également à coordonnées entières.

On rappelle que si on note $(x_m; y_m)$ les coordonnées du milieu entre $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$, alors on a $x_m = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ et $y_m = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Exercice 4

Démontrer que pour tout entier n strictement positif,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \geq n(\sqrt[n]{2} - 1)$$

2 Solution

Solution de l'exercice 1

On remarque que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, ainsi

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Autre solution par récurrence :
On pose pour $n \geq 2$ propriété $\mathcal{P}_n$ suivante :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} = 1 - \frac{1}{n}$$

Montrons par récurrence pour tout $n \geq 2$ que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▷ Initialisation : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}_2$ est vraie, en effet

$$\frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}$$

▷ Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel $n \geq 2$ tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.
On montre qu'alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie.

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} + \frac{1}{n \times (n+1)} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

Or $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ Donc

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

▷ Conclusion : pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} = 1 - \frac{1}{n}$$

Solution de l'exercice 2 L'inégalité se réécrit

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2\right)\left(\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2\right) \geq \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \times \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{b}} \times \sqrt{b}\right)^2 = 4,$$

ce qui est vrai par Cauchy-Schwarz.

Autre solution :
L'inégalité se réécrit

$$\frac{1^2}{a} + \frac{1^2}{b} \geq \frac{(1+1)^2}{a+b},$$

ce qui est vrai par inégalité des mauvais élèves.

Autre solution :
L'inégalité se réécrit

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},$$

ce qui est vrai par inégalité arithmético-harmonique.

Autre solution :
L'inégalité se réécrit

$$b(a+b)+a(a+b) \geq 4ab$$
$$a^2+b^2 \geq 2ab$$
$$(a-b)^2 \geq 0,$$

ce qui est vrai car un carré est toujours positif.

Autre solution :
L'inégalité se réécrit

$$b(a+b)+a(a+b) \geq 4ab$$
$$a^2+b^2 \geq 2ab$$
$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2},$$

ce qui est vrai par l'inégalité arithmético-géométrique.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

On s'intéresse au milieu $(x_m;y_m)$ d'un segment entre $(x_1;y_1)$ et $(x_2;y_2)$, pour que ce milieu soit à coordonnées entières, il faut donc que x_m ET y_m soient des entiers, donc que x_1+x_2 ET y_1+y_2 soient des nombres pairs.

Si on regarde un point, on a 4 possibilités :

- ▷ x pair et y pair ;
- ▷ x pair et y impair ;
- ▷ x impair et y pair ;
- ▷ x impair et y impair.

Ces possibilités seront nos tiroirs : en effet, si deux points sont dans la même catégorie, x_1 et x_2 ont même parité, mais aussi y_1 et y_2 ont même parité ; donc x_1+x_2 ET y_1+y_2 sont des nombres pairs.

On veut donc mettre deux points dans le même tiroir.

De là, on cherche combien il faut de points pour que 2 points soient dans le même tiroir.

Comme on a 4 tiroirs, il faut au moins 5 points par principe des tiroirs.

Ainsi, $n=5$ permet d'avoir un milieu à coordonnées entières.

Reste à montrer que $n<5$ ne fonctionne pas : en effet, par exemple pour $n=4$, en prenant les points $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$ et $(1;1)$, on a six milieux et aucun n'a de coordonnées entières.

De là, le plus petit entier n vérifiant la propriété est $n=5$.

Solution de l'exercice 4

L'idée principale est de passer le n de l'autre côté en le réécrivant $1+1+\cdots 1$. L'inégalité se réécrit :

$$\left(\frac{1}{n}+1\right)+\left(\frac{1}{n+1}+1\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}+1\right) \geq n\sqrt[n]{2},$$

puis

$$\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}+\cdots+\frac{2n}{2n-1} \geq n\sqrt[n]{2}.$$

Or d'après l'Inégalité Arithmético-Géométrique,

$$\frac{\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}+\cdots+\frac{2n}{2n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\cdots\times\frac{2n}{2n-1}}.$$

Le produit de droite se simplifie par un téléscopage, ainsi on retrouve exactement :

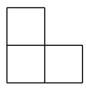
$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1} \geq n(\sqrt[n]{2}-1).$$

2 Groupe B

1 énoncé

Exercice 1

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. On considère un damier de côté 2^n dont on a retiré une case quelconque. Montrer qu'il est possible de le paver avec des pièces de la forme ci-dessous :



Il est possible de tourner et de retourner la pièce.

Exercice 2

Trouver toutes les paires d'entiers naturels (a, b) vérifiant :

$$2019a^{2018} = 2017 + b^{2016}$$

Exercice 3

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. On dispose de n couleurs. On colorie chaque point du plan d'une couleur parmi les n disponibles. Montrer qu'il existe une infinité de rectangles dont les quatre sommets sont de même couleur (cette couleur n'étant pas forcément la même pour tous les rectangles).

Exercice 4

Trouver tous les triplets d'entiers naturels (a, b, k) tels que :

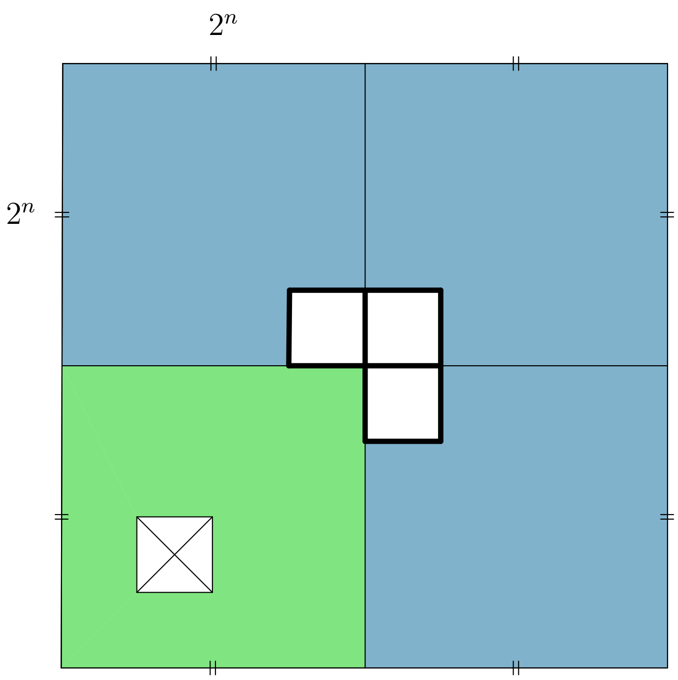
$$2^a 3^b = k(k+1).$$

2 Solution

Solution de l'exercice 1 *Faire des dessins c'est bien ! Cela permet de faire comprendre au correcteur que vous avez compris et de gagner considérablement en clarté dans votre raisonnement. Faites bien attention à la rédaction : n'écrivez pas "et ainsi de suite", ni "et on continue indéfiniment" ou "etc." mais faites une récurrence bien propre en deux parties. Souvenez-vous aussi qu'un coloriage permet de montrer qu'un pavage est impossible mais que ne pas avoir de contradiction avec le coloriage ne suffit pas à montrer que le pavage est possible. En effet, il faut encore prouver qu'on peut effectivement en construire un qui marche.*

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut paver avec des triminos un damier de côté 2^n auquel il manque une case.

- **Initialisation :** Pour $n = 1$ le pavage est évident car la case manquante est dans un coin du damier 2×2.
- **Hérédité :** Supposons qu'on puisse paver tout damier de côté 2^n auquel il manque une case. Considérons un damier de côté 2^{n+1} auquel il manque une case. On divise notre damier en quatre carrés de côté 2^n.



Le carré dans lequel il manque une case est pavable par hypothèse de récurrence (en vert). On place un trimino au centre du damier, de sorte qu'il recouvre un coin de chacun des trois autres carrés. Encore par hypothèse de récurrence, on peut paver ces trois carrés privés d'une case (en bleu). On a ainsi pavé l'intégralité de notre damier de taille 2^{n+1}.

Ainsi, un pavage est possible pour tout n et quelle que soit la case manquante.

Remarque : Cet exercice montre au passage que 3 divise $4^n - 1$ pour tout n lorsqu'on compte le nombre de cases du damier.

Solution de l'exercice 2 On regarde l'équation modulo 3. On trouve

$$b^2 + 2017 \equiv 3a^2 \equiv 0 \mod 3$$

D'autre part, $2017 \equiv 1 \mod 3$ et $b^2 \equiv 0, 1 \mod 3$. Donc $b^2 + 2017 \equiv 1, 2$ et ne sera jamais congru à 0 modulo 3. Il n'y a donc pas de solutions.

Solution de l'exercice 3 Comme le plan est infini, il suffit de montrer que l'on peut trouver un seul rectangle possédant 4 sommets de même couleur. En effet, si on parvient à trouver une méthode pour obtenir un rectangle qui convient dans n'importe quelle portion finie du plan, il suffira de répéter cette méthode une infinité de fois.

Prenons $n+1$ points alignés sur une droite (d). Pour chacun de ces points, on trace la perpendiculaire à (d) passant par ce point. On obtient donc $n+1$ droites perpendiculaires à (d), que l'on note $l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}$ de gauche à droite. Si on trace n^{n+1} parallèles à (d) et distinctes deux à deux et toutes distinctes de (d), on obtient $n^{n+1} + 1$ droites parallèles entre elles perpendiculaires à $n+1$ droites parallèles entre elles. En considérant les points d'intersection de toutes ces droites, on obtient $n^{n+1} + 1$ séquences de $n+1$ points. Dans une séquence, pour chaque point, il y a n couleurs possibles pour le colorier. Le nombre de coloriage différentes d'une séquence est donc de n^{n+1} Puisque l'on a $n^{n+1} + 1$ séquences, deux séquences sont coloriées exactement de la même manière d'après le principe des tiroirs. On appelle ces séquences A et B. Toujours par le principe des tiroirs, comme chaque séquence est faite de $n+1$ points, dans chaque séquence, au moins 2 points sont coloriés de la même couleur. En particulier, dans la séquence A, sans perte de généralité, on peut supposer que 2 points X et Y sont de couleur rouge et se trouvent sur les droites l_i et l_j. Puisque la séquence B est identique, les points situés sur les droites l_i et l_j situés sur la séquence B, notés Z et W respectivement, sont également rouges. On a donc $(WZ)//(XY)$ et $(WX)//(ZY)$ donc les point X, Y, Z, W sont les sommets d'un rectangle et sont tous rouges. On a donc trouvé un rectangle dont les 4 sommets sont de même couleur, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4 Puisque k et $k+1$ sont premiers entre eux, ils ne peuvent tous deux être divisibles par 3 ni tous deux être divisibles par 2. On a donc 4 cas différents : Le premier cas est $2^a 3^b = k$ et $1 = k+1$ mais la dernière équation conduit à $k = 0$ ce qui n'est pas possible d'après la première équation.

Le deuxième cas est $2^a 3^b = k+1$ et $1 = k$ mais alors $2^a 3^b = 2$ soit $a = 1$, $b = 0$ et $k = 1$ mais on vérifie que ce triplet est bien une solution.

Le troisième cas consiste en

$$2^a = k \qquad 3^b = k+1$$

qui se réécrit

$$2^a + 1 = 3^b$$

.

Si $a = 0$, on a $3^b = 2$. Absurde.

Si $a = 1$, on a $3^b = 3$ donc $b = 1$ donc $k = 2$. Réciproquement, le triplet $(1, 1, 1)$ vérifie l'équation initiale.

On suppose désormais que $a \geq 2$. On regarde la dernière équation modulo 4, on trouve que $3^b \equiv 2^a + 1 \equiv 1 \mod 4$ donc b est pair et il existe un entier positif b' tel que $b = 2b'$. On peut réécrire l'équation comme

$$2^a = 3^{2b'} - 1 = (3^{b'} + 1)(3^{b'} - 1)$$

On a un produit de 2 facteurs dont la différence vaut 2 et qui sont tous les deux des puissances de 2. La seule possibilités est $3^{b'} + 1 = 4$ et $3^{b'} - 1 = 2$ ce qui conduit à $b' = 1$ donc $b = 2$ donc $a = 3$ donc $k = 8$. réciproquement, le triplet $(3, 2, 8)$ satisfiat l'équation de l'énoncé.

Le quatrième cas consiste en

$$3^b = k \qquad 2^a = k + 1$$

qui conduit à

$$2^a - 1 = 3^b$$

.

Si $b = 0$ alors $2^a = 2$ soit $a = 1$ ce qui conduit à $k = 1$. Réciproquement, le triplet $(1, 0, 1)$ satisfait l'équation de l'énoncé.

On suppose désormais que $b \geq 1$ et on regarde l'équation modulo 3. On a que $2^a - 1 \equiv 0 \mod 3$ ce qui implique que a est pair. Donc il existe un entier positif a' tel que $a = 2a'$. L'équation devient

$$3^b = 2^{2a'} - 1 = (2a' - 1)(2^{a'} + 1)$$

Le produit de gauche est un produit de 2 puissances de 3 dont la différence vaut 2. Ceci oblige $2a' - 1 = 1$ et $2^{a'} + 1 = 3$ soit $a' = 1$ donc $a = 2$ et $b = 1$ et $k = 3$. Réciproquement, le triplet $(2, 1, 3)$ satisfait l'équation de l'énoncé.

Les triplets solutions sont donc $\{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 3), (3, 2, 8)\}$.

3 Groupe C

1 énoncé

Exercice 1

Pour quels $k \in \mathbb{N}$ existe-t-il des entiers a et b positifs ou nuls tels que

$$2^a 3^b = k(k + 1)?$$

Exercice 2

Est-il possible de paver un damier 23×23 par des carrés 2×2 et 3×3 ? Par un carré 1×1 et des carrés 2×2 et 3×3 ?

Exercice 3

Soit p un nombre premier impair. Montrer qu'il existe un et un unique entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n^2 + np$ soit un carré parfait.

Exercice 4

Montrer qu'on peut colorier les sommets de tout graphe avec deux couleurs de sorte que pour chaque sommet, au plus la moitié de ses voisins soient de la même couleur que lui.

2 Solution

Solution de l'exercice 1

$pgcd(k, k+1) = 1$ donc un facteur est une puissance de 3 tandis que l'autre est une puissance de 2.

Cas 1 : k est une puissance de 2 et $k+1$ est une puissance de 3 soit $2^a + 1 = 3^b$. L'étude des cas $a = 0$,$a = 1$ nous fournit la solutions $(a = 1, b = 1, k = 2)$. Si $a \geq 2$, l'étude de l'équation modulo 4 nous assure que b est pair. $b = 2b'$ donc $2^a = (3^{b'} - 1)(3^{b'} + 1)$ $(3^{b'} - 1)$ et $(3^{b'} + 1)$ sont deux puissances de 2 consécutives. Donc $b' = 1$, puis on arrive a la solution $(a = 3, b = 2, k = 8)$.

Cas 2 : k est une puissance de 3 et $k+1$ est une puissance de 2 soit $2^a = 3^b+1$. L'étude des cas $a = 0$,$a = 1$,$a = 2$ nous fournit les solutions $(a = 1, b = 0, k = 1)$ ainsi que $(a = 2, b = 1, k = 3)$. Si $a \geq 3$, l'étude de l'équation modulo 8 donne $3^b = -1[8]$ ce qui n'a pas de solutions.

La réponse est donc les entiers k valant $1, 2, 3$ ou 8

Solution de l'exercice 2 Réponses : non et oui. Supposons que l'on puisse paver avec des carrés 2×2 et 3×3. On colorie en noir une colonne sur trois. Les carrés 2×2 et 3×3 recouvrent chacun un nombre pair de cases blanches, or le nombre total de cases blanches est impair, d'où une contradiction.

Le damier 23×23 privé de la case 1×1 centrale est réunion de quatre rectangles 11×12. Chacun de ceux-ci est réunion d'un rectangle 9×12 (qui peut être pavé par des 3×3) et d'un rectangle 2×12 (qui peut être pavé par des 2×2).

Solution de l'exercice 3 $n(n + p)$ est un carré parfait. Or $pgcd(n, n + p)|p$ comme p est premier, on a seulement deux cas à traiter.

Cas 1 : $pgcd(n, n+p) = p$ Alors $n = kp$ donc $n(n+p) = p^2k(k+1)$ donc $k(k+1)$ est un carré parfait. Or pour $k \geq 1$ $k^2 < k(k + 1) < (k + 1)^2$ Donc on n'a pas de solutions dans ce cas.

Cas 2 : $pgcd(n, n + p) = 1$ Alors on peux "séparer les deux carrés". On a donc $n = z_1^2$ et $n + p = z_2^2$. Donc $p = (z_2 - z_1)(z_2 + z_1)$. Comme p est premier, on a donc $(z_2 - z_1) = 1$ et $(z_2 + z_1) = p$ Donc $z_1 = \frac{p-1}{2}$ Ce qui conduit à $n = (\frac{p-1}{2})^2$. On vérifie d'ailleurs que c'est bien la seule solution au problème

Solution de l'exercice 4 L'astuce ici est de se concentrer non pas sur les sommets mais sur les arêtes. Soit un coloriage, on peut définir les arêtes de deux manières les "bonnes arêtes" dont les deux sommets sont de couleurs différentes et les "mauvaises arêtes" dont les sommets sont de la mème couleur. Sur le graphe total, il y a $N_{\neq}$ bonnes arêtes et $N_{=}$ mauvaises arêtes. Remarque essentielle : prenons un sommet et considérons les arêtes qui lui sont attachés. Lorsque l'on change la couleur de ce sommet, toutes les bonnes arêtes attachées à ce sommet deviennent des mauvaises arêtes et toutes les mauvaises arêtes deviennent des bonnes arêtes. Le nombre total de bonne arêtes devient alors

$$N_{\neq} \to N_{\neq} + M - B \tag{VI.1}$$

avec M le nombre de mauvaises arêtes et B bonnes arêtes qui ont ainsi été modifiées. Pour un sommet S qui a plus de la moitié de ses voisins de la même couleur que lui, on a $M > B$.

On applique donc l'algorithme suivant : tant qu'il existe un sommet avec trop de mauvaise arête, on lui change sa couleur. Durant cet algorithme, $N_{\neq}$ est strictement croissante. Or c'est un entier il arrive donc à un maximum et l'algorithme s'arrête. À ce moment là, il n'y a plus de sommet qui a plus de la moitié de ses voisins de la même couleur que lui et c'est gagné !

4 Groupe D

1 énoncé

Exercice 1

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(f(x)+2y) = 6x + f(f(y)-x)$.

Exercice 2

Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs (a, b, c) tels que $a^b | b^c - 1$ et $a^c | c^b - 1$.

Exercice 3

Soit $a_1, \dots, a_n$ des entiers distincts. Prouver que le polynôme

$$(X - a_1)^2 \dots (X - a_n)^2 + 1$$

est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 4

Soit P et Q des polynômes Ã coefficients entiers tels que tout polynôme Ã coefficients rationnels divisant Ã la fois P et Q soit constant. On suppose en outre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ et $Q(n)$ sont strictement positifs, et $2^{Q(n)} - 1$ divise $3^{P(n)} - 1$. Prouver que Q est constant.

2 Solution

Solution de l'exercice 1 $E(x, -\frac{f(x)}{2})$ donne $f(\cdots) =$ cste $- 6x$ donc f est surjective.

Si $f(y) = f(y')$ alors $E(x, y) - E(x, y')$ donne $f(f(x)+2y) = f(f(x)+2y')$, donc $f(t+2y) = f(t+2y')$ pour tout t puisque f est surjective. Soit $c = 2(y' - y)$, alors on en déduit que f est c-périodique. Donc $6x = f(f(x) + 2y) - f(f(y) - x)$ est c-périodique. On en déduit que $c = 0$, donc f est injective.

$E(0, y)$ donne $f(f(0) + 2y) = f(f(y))$ donc, par injectivité, $f(0) + 2y = f(y)$. On en déduit qu'il existe a tel que $f(x) = 2x + a$ pour tout x. Réciproquement, toutes ces fonctions sont bien solutions.

Solution de l'exercice 2 Si $a = 1$, $b, c \in \mathbb{N}^*$ quelconques conviennent. On suppose désormais $a > 1$. Si $b = 1$, on a $a^c | c - 1$, or $a^c > c - 1$ si $a \geq 2$, donc il faut que $c - 1 = 0$, soit $c = 1$. Réciproquement, $b = c = 1$ et a quelconque fournit une solution. De même, $c = 1$ implique que $b = 1$.

On suppose donc désormais que $a, b, c \geq 2$. Sans perte de généralité, $c \geq b$.
Si $a = 2^k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, b et c sont impairs, donc $\frac{b^c-1}{b-1} \equiv b^{c-1} + \ldots + b + 1 \equiv 1 \pmod 2$. Donc $2^{kc}|b-1$. Donc $2^c \leq 2^{kc} \leq b-1 \leq c-1$, ce qui est faux pour $c \in \mathbb{N}^*$. Donc a admet un diviseur premier impair. Soit p un tel entier. On note ω_c l'ordre de c modulo p. On applique LTE : $v_p(c^{\omega_c} - 1) + v_p(b/\omega_c) = v_p(c^b - 1) \geq v_p(a^c) \geq c$. Or $c \wedge p = 1$, donc $v_p(c^{\omega_c} - 1) \geq c$. Donc $c^{\omega_c} - 1 \geq p^c$. Or $\omega_c | p-1$ donc $c^p > p^c$. Cette inégalité n'est vraie que lorsque $p > c$ (excepté pour $p = 2$ et $c = 3$, mais p est impair). Donc $a > c$, donc $a^c > c^c > c^b - 1$, or $a^c | c^b - 1$, contradiction.
Conclusion : les triplets (a, b, c) convenables sont $(1, b, c)$ et $(a, 1, 1)$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Supposons qu'il existe $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ non constants tels que

$$(X-a_1)^2 \ldots (X-a_n)^2 + 1 = P(X)Q(X).$$

Alors pour tout i, $P(a_i) = Q(a_i) = \pm 1$. S'il existe deux indices i, j tels que $P(a_i) = 1$ et $P(a_j) = -1$, alors P change de signe entre a_i et a_j, donc il existe un réel r tel que $P(r) = 0$. Donc $(r-a_1)^2 \ldots (r-a_n)^2 = -1$, impossible. Donc ou bien $P(a_i) = Q(a_i) = 1$ pour tout i, ou bien $P(a_i) = Q(a_i) = -1$ pour tout i. Dans le premier cas, $P-1$ et $Q-1$ ont n racines distinctes chacun. Si $deg(P) \leq n-1$, $P-1$ est le polynÃ´me nul, donc $P = 1$. Or, on l'avait supposé non constant : contradiction. Donc $deg(P) \geq n$, et de même, $deg(Q) \geq n$. Or $deg(PQ) = 2n$, donc $deg(P) = deg(Q) = n$. Donc $P(X) = p(X-a_1)\ldots(X-a_n)+1$ et $Q(X) = q(X-a_1)\ldots(X-a_n)+1$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$. On a donc :

$$(pq-1)(X-a_1)^2 \ldots (X-a_n)^2 - (p+q)(X-a_1)\ldots(X-a_n) \geq 0.$$

On en déduit que $pq = 1$ puis que $p + q = 0$, donc $p^2 = -1$, ce qui est impossible.
Dans le second cas, lorsque $P(a_i) = Q(a_i) = -1$ pour tout i, on raisonne de même avec $P+1$ et $Q+1$ et on aboutit à la même conclusion.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Dans $\mathbb{Q}[X]$, P et Q sont premiers entre eux, donc il existe $R_0, S_0 \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $R_0(x)P(x) - S_0(x)Q(x) = 1$. Il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que dR_0 et dS_0 soient à coefficients entiers. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $dR_0(n)P(n) - dS_0(n)Q(n) = d$ et $dR_0(n), dS_0(n) \in \mathbb{Z}$ et donc

$$P(n) \wedge Q(n) \leq d.$$

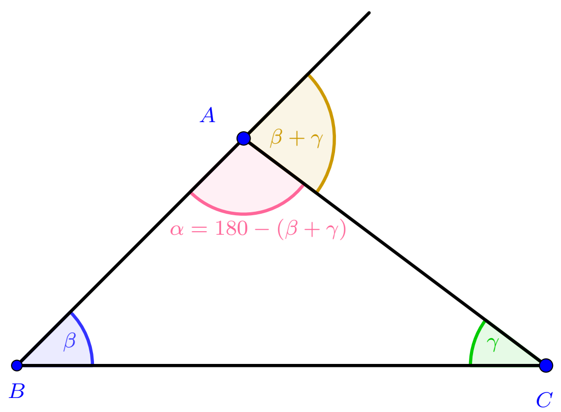
On suppose Q non constant. Il existe donc $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $M := 2^{Q(m)} - 1 > 3^{max(P(1),\ldots,P(d)}$. On vérifie que 2 et 3 sont premiers avec M. Soit a et b les ordres multiplicatifs de 2 et 3 modulo M. $2^{Q(m)} \equiv 1 \pmod M$ et $2^r < M$ si $r < Q(m)$ donc $a = Q(m)$. De plus, $M | 2^{Q(m)} - 1 | 3^{P(m)} - 1$ donc $3^{P(m)} \equiv 1 \pmod M$ et $b | P(m)$. Ainsi, $a | b \leq P(m) | Q(m) \leq d$. On peut donc trouver des entiers x et y tels que $1 \leq m + ax - by \leq d$. On a $Q(m+ax) \equiv Q(m) \pmod a$ donc $2^{Q(m+ax)} \equiv 1 \pmod M$. D'après la condition de l'énoncé, $3^{P(m+ax)} \equiv 1 \pmod M$. Et $P(m+ax-by) \equiv P(m+ax) \pmod M$ donc $3^{P(m+ax-by)} \equiv 1 \pmod M$, donc $M < 3^{P(m+ax-by)}$, ce qui contredit la définition de M.

VII. Deuxième période

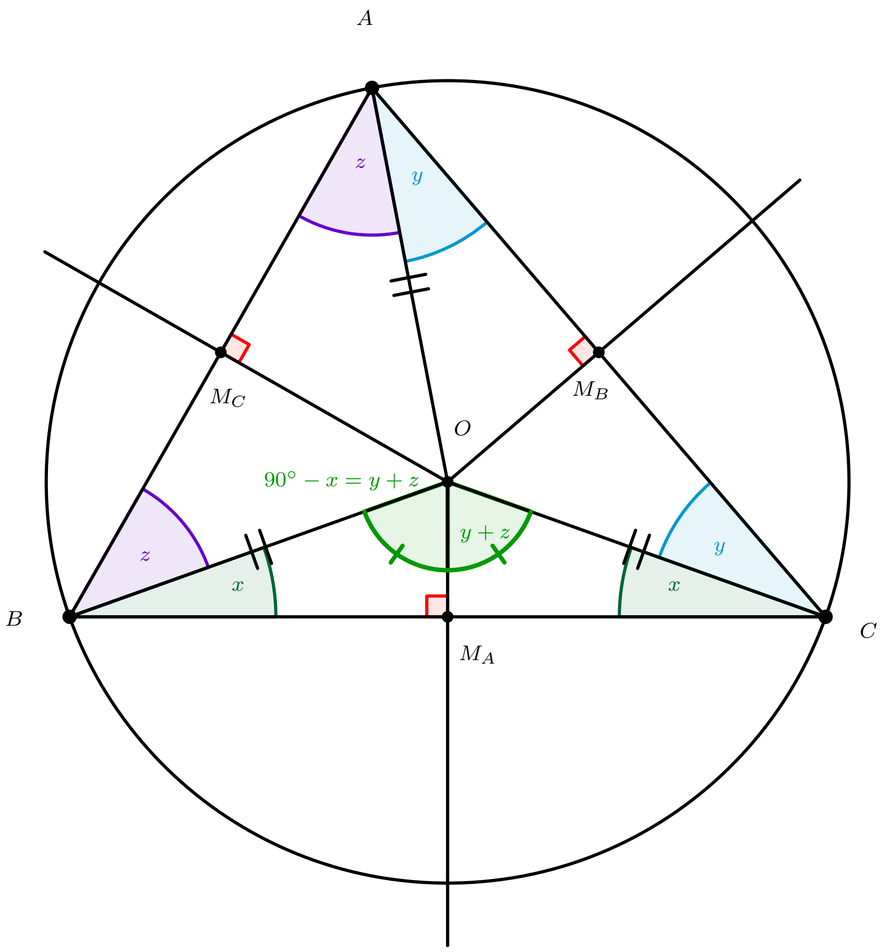
1 Groupe A : géométrie

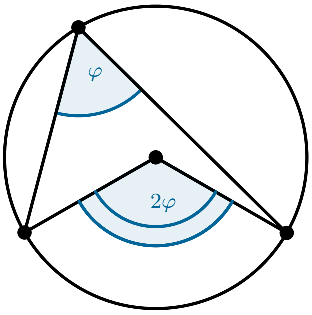
1 lundi 21 après-midi : Linda Gutsche

La configuration de l'angle sur le triangle

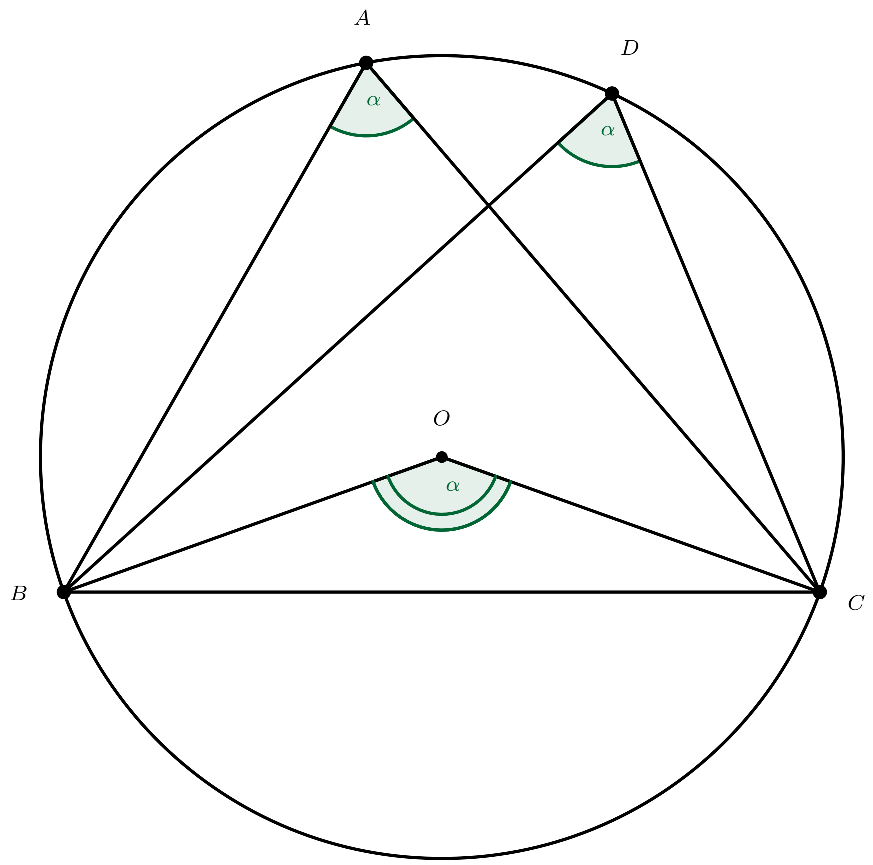


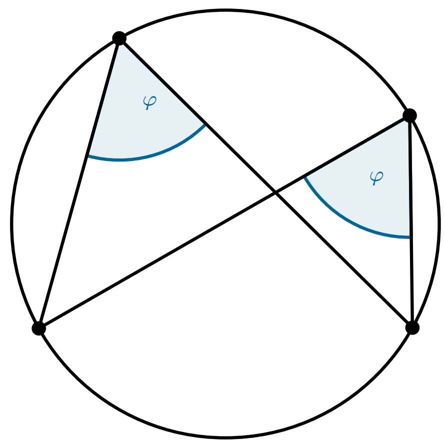
Théorème de l'angle au centre



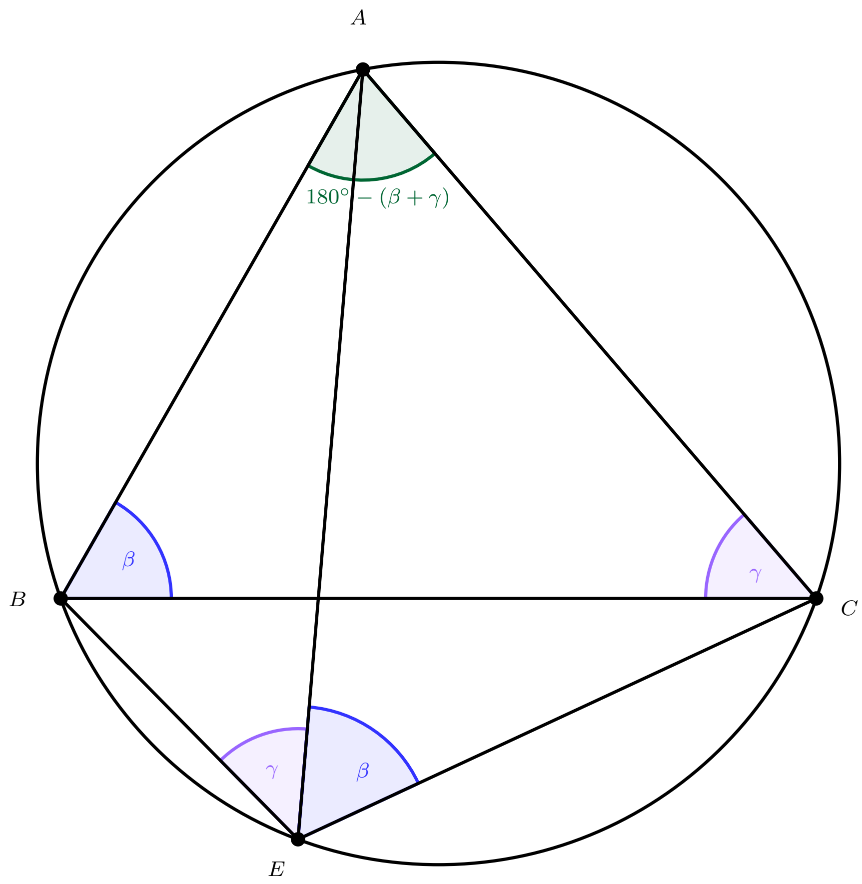


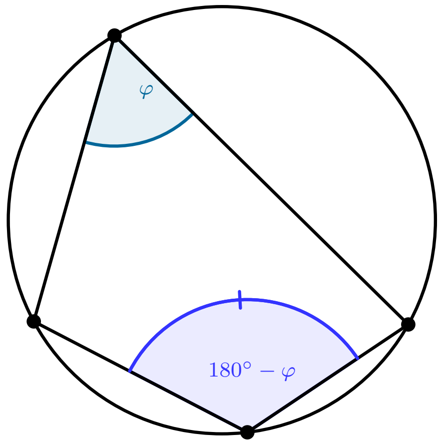
Théorème de l'angle inscrit version 1



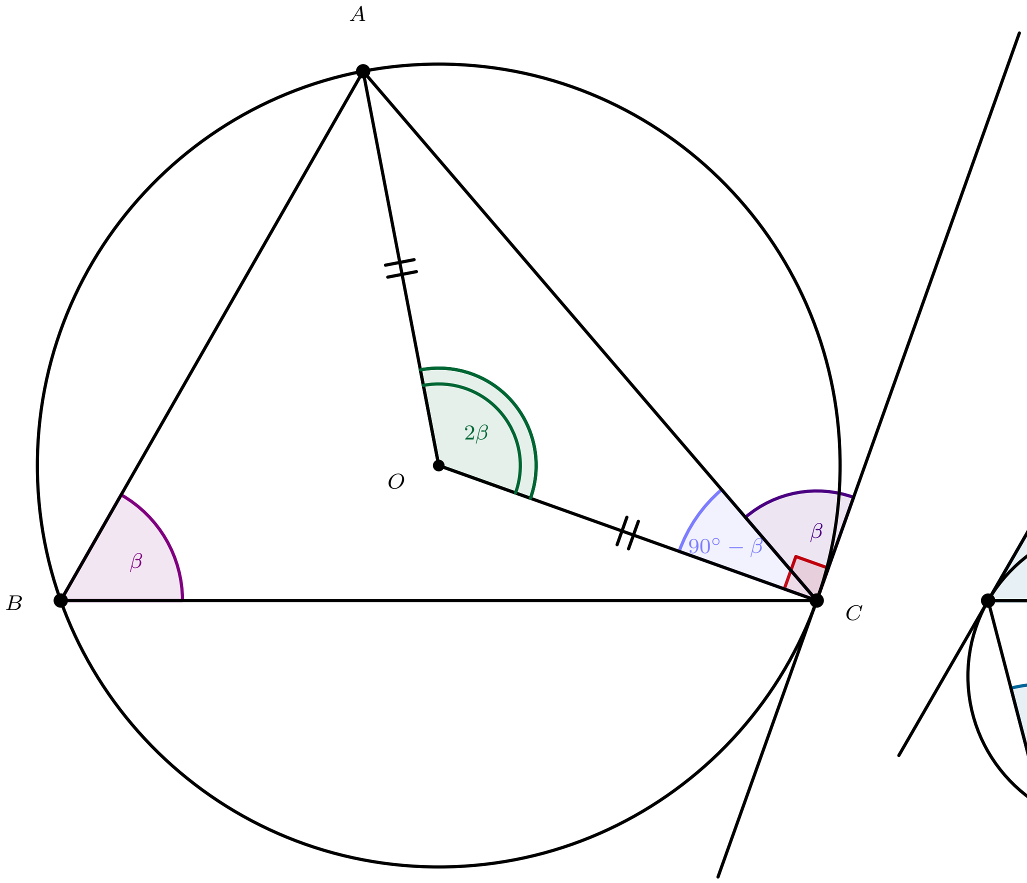


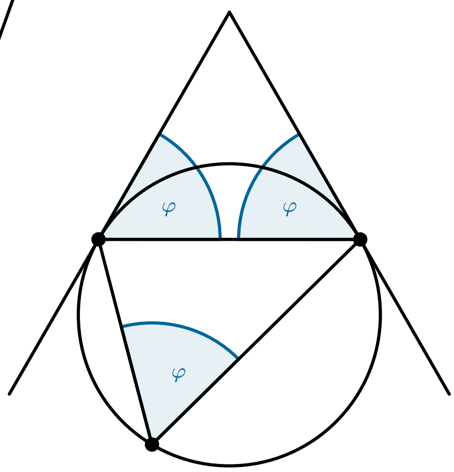
Théorème de l'angle inscrit version 2





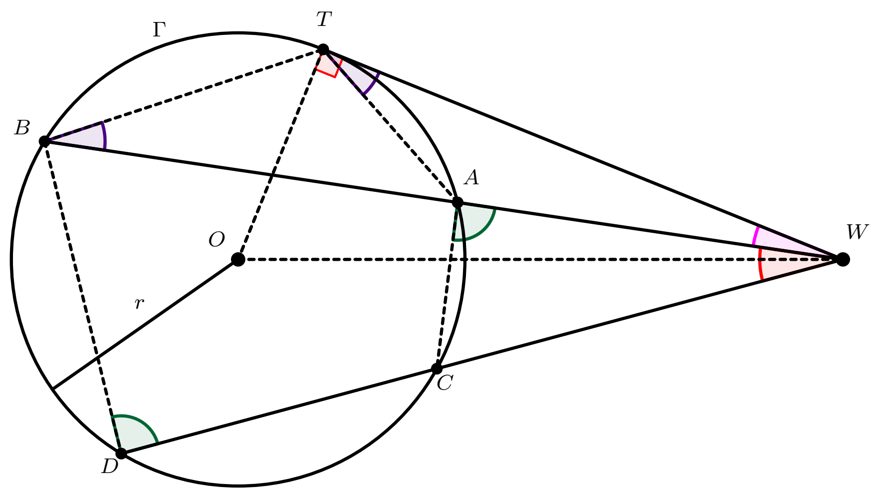
Théorème de la tangente



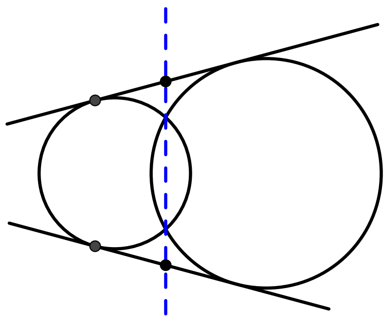


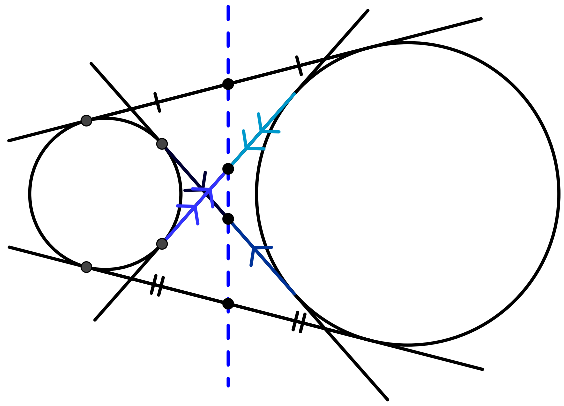
La Puissance d'un point par rapport à un cercle

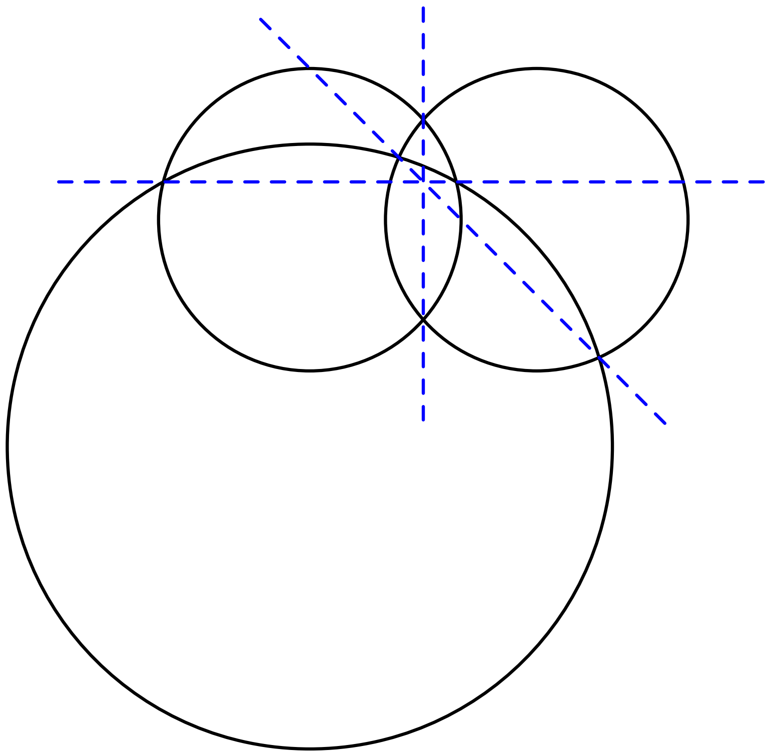
$$P_\Gamma(W) = WA \times WB = WC \times WD = WT^2 = WO^2 - r^2$$



Les axes radicaux



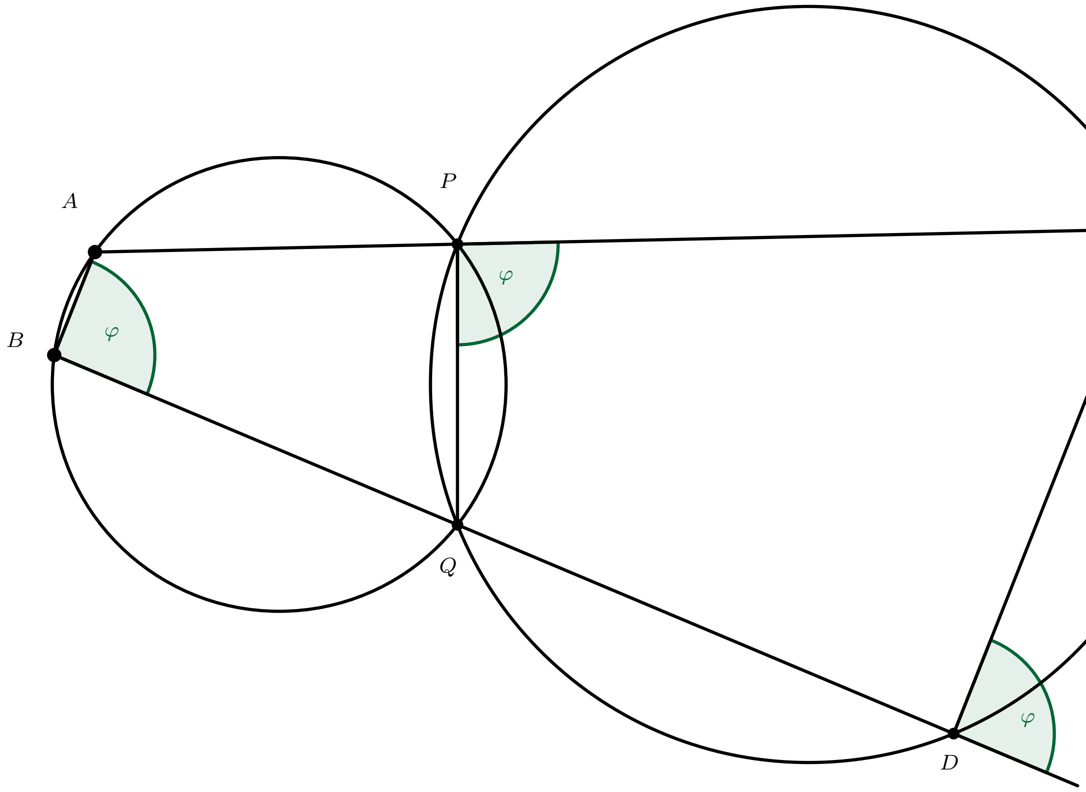




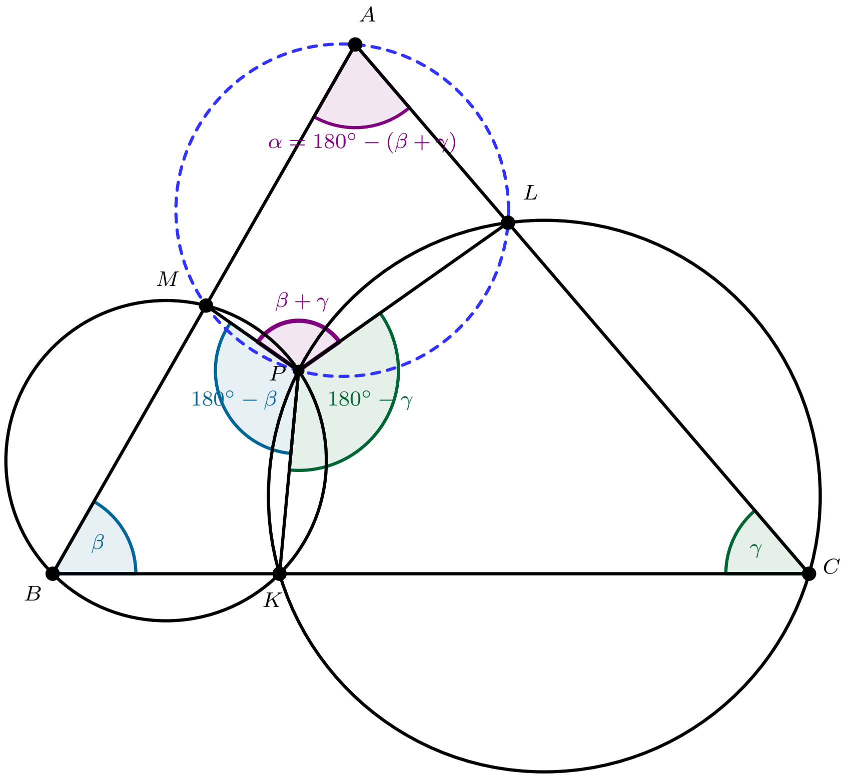
Exercice 1 Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui se coupent en P et Q. Soit A et B deux points sur Γ_1 tel que A, P, Q et B cocycliques dans cet ordre, et soit C et D les secondes intersections avec Γ_2 des droites (AP) et (BQ) respectivement. Montrer que $(AB)//(CD)$

Exercice 2 Soit ABC un triangle, et K, L et M des points quelconques distincts des sommets sur $[BC]$, $[CA]$, et $[AB]$ respectivement. Les cercles circonscrits à BKM et KCL se coupent en P. Montrer que A, M, P, et L sont cocycliques.

Solution de l'exercice 1



<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

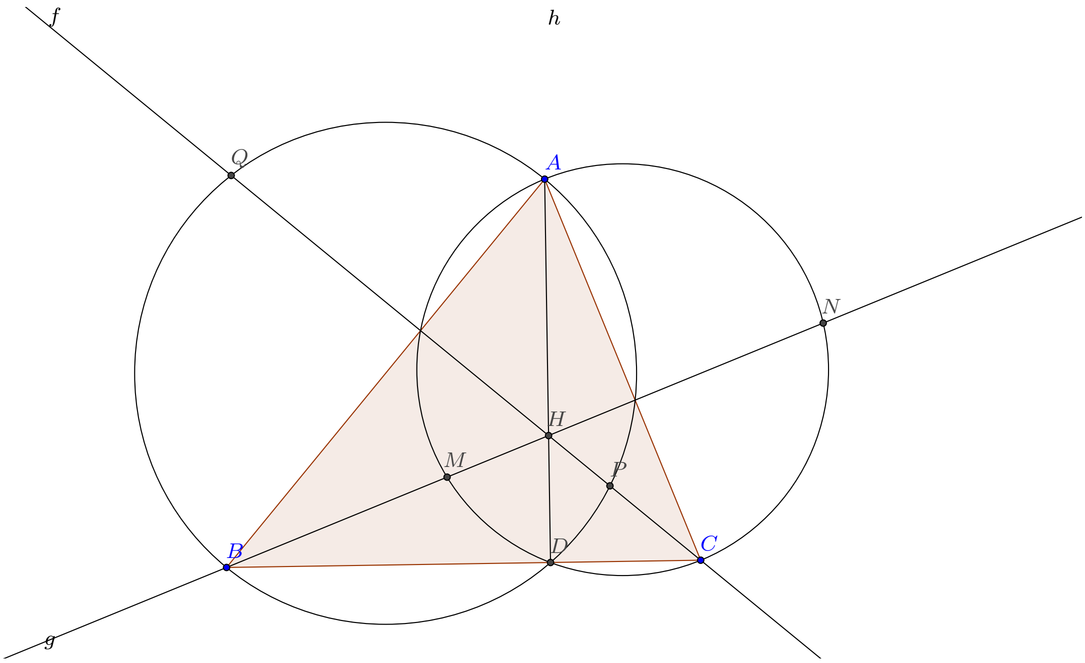


2 mardi 22 matin : Martin Rakovsky

Le but de ce cours est d'élargir la culture en géométrie en voyant plusieurs théorèmes qui peuvent s'avérer efficace dans des situations bien choisies. Après un rappel sur le théorème des axes radicaux, on abordera notamment le théorème dit « du pôle Sud », quelques propriétés du triangle orthique et la droite de Simson.

le théorème des axes radicaux

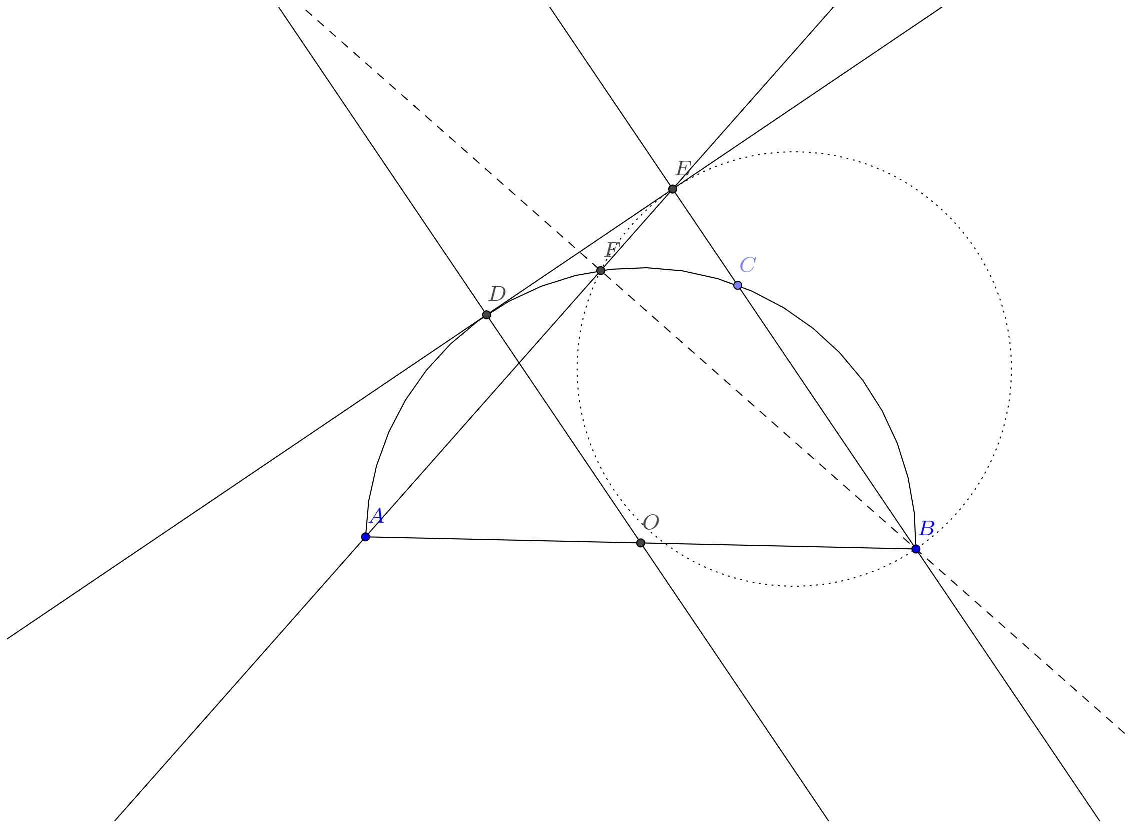
Exercice 1 Dans un triangle ABC, la hauteur issue de C coupe le cercle de diamètre $[AB]$ en M et N. La hauteur issue de B coupe le cercle de diamètre $[AC]$ en P et Q. Montrer que les points M, N, P, Q sont cocycliques.



<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

Soit D le pied de la hauteur issue de A. Puisque $\widehat{CDA} = 90^o$, D appartient au cercle de diamètre $[AC]$. De même, il appartient au cercle de diamètre $[AB]$. Donc (AD) est l'axe radical des cercles de diamètres $[AC]$ et $[AB]$. Puisque (MN) et (PQ) correspondent Ã deux hauteurs du triangles ABC qui sont concourantes en H et comme $H \in (AD)$, H est sur l'axe radical de nos deux cercles donc $HM \cdot HN = HP \cdot HQ$, ce qui signifie, d'après la réciproque de la puissance d'un point par rapport Ã un cercle, que les points M, N, P, Q sont cocycliques.

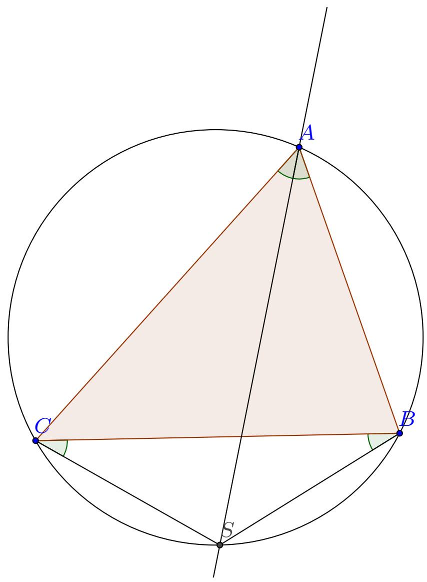
Exercice 2 Soit C un point sur un cercle Ω diamètre $[AB]$ et de centre O. Soit D le point d'intersection de la médiatrice de $[AC]$ avec le cercle Ω. Soit E le projeté de D sur BC et F le point d'intersection de (AE) avec Ω. Montrer que la droite (BF) coupe $[ED]$ en son milieu.



<u>*Solution de l'exercice 2*</u>
Puisque $F \in \Omega$, on a $\widehat{BFE} = 90^o$ donc $[BE]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle BEF donc DE est tangent Ã ce cercle circonscrit. Par ailleurs, $\widehat{ACE} = 90^o = \widehat{DEC}$ donc (DE) et (AC) sont parallèles. Donc $\widehat{EDO} = 90^o$ et (DE) est tangente Ã Ω. Comme BF est l'axe radical du cercle Ω et du cercle circonscrit au triangle BEF, l'intersection M avec la tangente commune vérifie $ME^2 = MD^2$ ce qui signifie $ME = MD$ et cette intersection est bien le milieu de $[DE]$.

Le théorème du pôle Sud

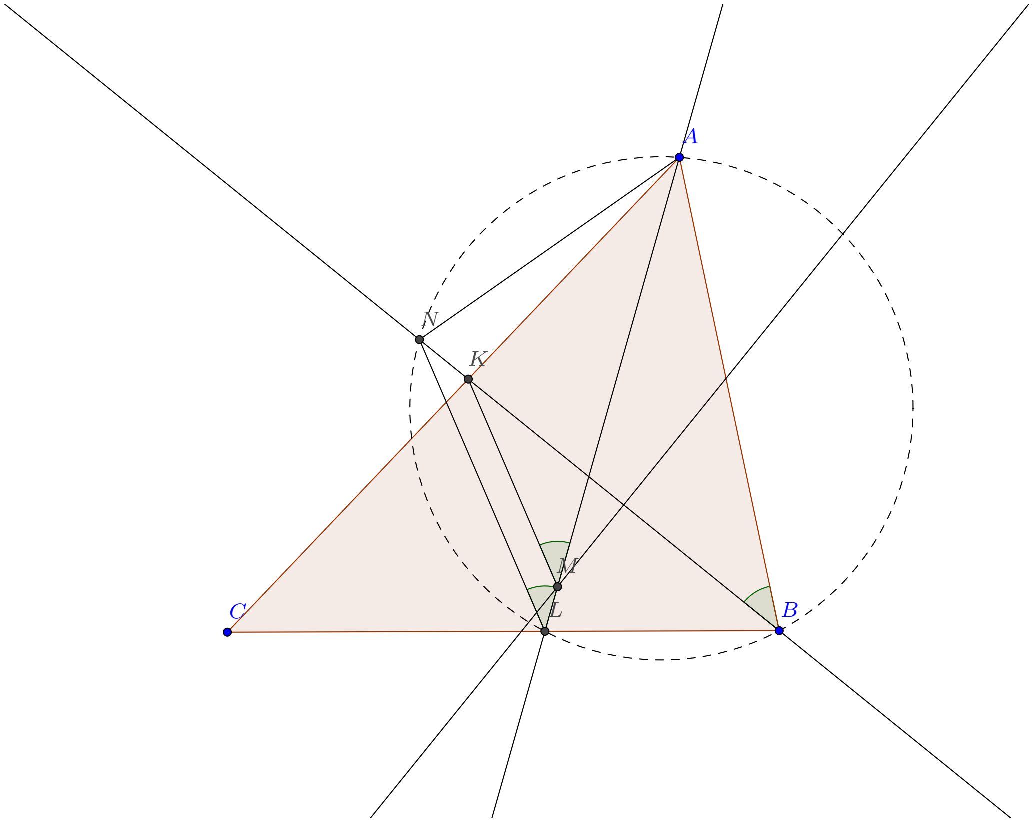
Exercice 3 Soit ABC un triangle et soit S le point d'intersection de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la médiatrice du segment $[BC]$. Montrer que S appartient au cercle circonscrit du triangle ABC. Le point S est appelé pôle Sud de A dans le triangle ABC.



<u>*Solution de l'exercice 3*</u>
Nous allons plutôt montrer que le point S' d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et du cercle circonscrit au triangle ABC appartient Ã la médiatrice du segment $[BC]$. Par unicité du point d'intersection de deux droites, on en déduira que S' et S sont confondus.

Puisque S' est sur le cercle circonscrit au triangle ABC, on a $\widehat{S'AB} = \widehat{S'CB}$ et $\widehat{S'AC} = \widehat{S'BC}$. Comme S est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, on a $\widehat{S'AB} = \widehat{S'AC}$ soit $\widehat{S'CB} = \widehat{S'BC}$ donc le triangle $BS'C$ est isocèle en S' donc on a $S'B = S'C$ donc S' est sur la médiatrice du segment $[BC]$ donc $S' = S$, ce que l'on voulait.

Exercice 4 Soit ABC un triangle. K est le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ et L le pied de la bissectrice de $\widehat{CAB}$. Soit M le point d'intersection de la médiatrice du segment $[KB]$ et de la droite (AL). La parallèle Ã (KL) passant par L coupe (BK) en N. Montrer que $LN = NA$.

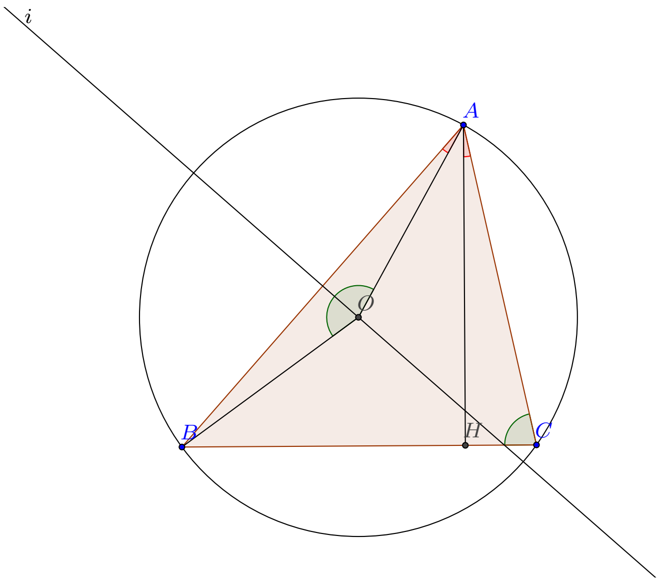


Solution de l'exercice 4

On reconnaît M le pôle Sud de A dans le triangle AKB. M appartient donc au cercle circonscrit au triangle ABK. On a alors $\widehat{NLA} = \widehat{KMA} = \widehat{KBA} = \widehat{LBA}$ donc les points N, L, B, A sont cocycliques et puisque N est sur la bissectrice de $\widehat{LBA}$, N est le pôle Sud de B dans le triangle LBA et appartient donc Ã la médiatrice de $[AL]$.

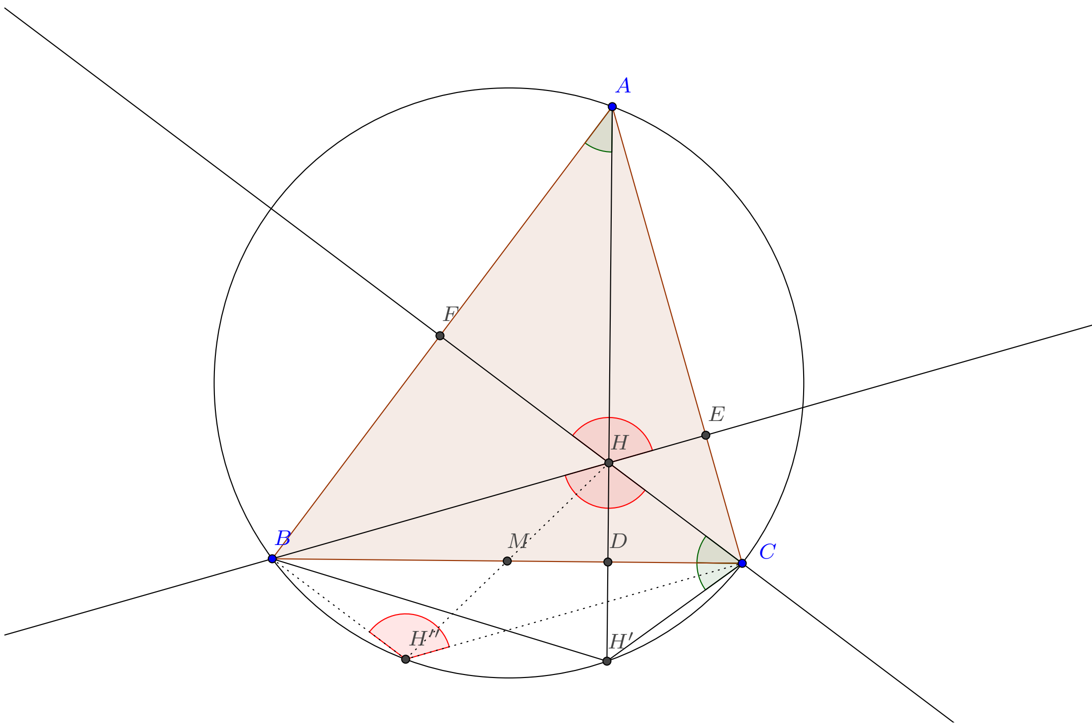
Le triangle orthique

Exercice 5 Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et H la pied de la hauteur issue de A. Montrer que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$.



Solution de l'exercice 5
Puisque O est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC, le triangle AOB est isocèle en O. On a donc $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$. Donc $\widehat{BOA} = 180^o - \widehat{BAO} - \widehat{ABO} = 180^o - 2\widehat{BAO}$. On en déduit que $\widehat{BAO} = 90^o - \frac{1}{2}\widehat{BOA} = 90^o - \frac{1}{2} \cdot 2\widehat{BCA} = 90^o - \widehat{BCA}$. Or le triangle ACH est rectangle en H donc $\widehat{BCA} = \widehat{HCA} = 90^o - \widehat{CAH}$ et il vient directement que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$.

Exercice 6 Soit ABC un triangle. Montrer que les symétriques de l'orthocentre H par rapport aux côtés du triangle ABC appartiennent au cercle circonscrit du triangle ABC. Montrer également que les symétriques de H par rapport au milieu des côtés appartiennent également au cercle circonscrit.

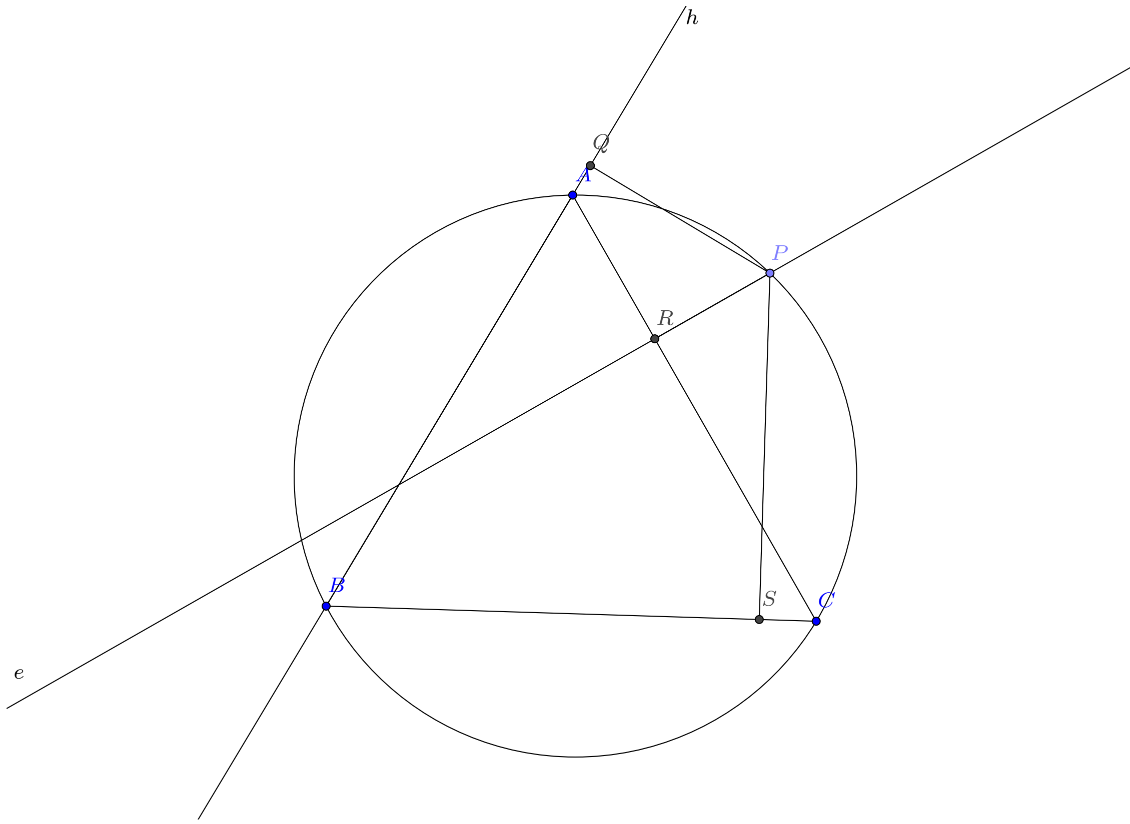


Solution de l'exercice 6
Soit D le pied de la hauteur issue de A et E le pied de la hauteur issue de C. Les points

C, D, E, A sont cocycliques. Soit H' le symétrique de H par rapport au côté $[BC]$. Alors $\widehat{H'CB} = \widehat{BCH} = \widehat{DCE} = \widehat{DAE} = \widehat{CAH'}$ ce qui implique que H' au cercle circonscrit de ABC. On montre de façon analogue que les symétriques par rapport aux deux autres côtés appartiennent au cercle.

Soit M le milieu de $[BC]$. Soit F le pied de la hauteur issue de B. Les points E, H, F, A sont cocycliques. Soit H'' le symétrique de H par rapport Ã M. Le quadrilatère $BH''CH$ est un parallélogramme. Donc $\widehat{BH''C} = \widehat{BHC} = \widehat{FHE} = 180^o - \widehat{FAE} = 180^o - \widehat{BAC}$. On a donc bien H'' qui appartient au cercle circonscrit. On montre de manière analogue que les symétriques de H par rapport aux milieux des deux autres côtés vérifient les mêmes propriétés.

Exercice 7 Soit ABC un triangle et soit P un point dans le plan. Les projetés orthogonaux de P sur les côtés $[AB], [BC], [AC]$ sont notés respectivement Q, R, S. Montrer que P est sur le cercle circonscrit du triangle ABC si et seulement si P, Q, R sont alignés. On dit que Q, R, S sont alignés sur la droite de Simson.



<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

Supposons d'abord que P est sur le cercle crirconscrit au triangle ABC et se trouve sur le plus petit arc contenant A et C. On a Q, A, R, P cocycliques et R, P, C, S cocycliques également. On a donc :

$$\begin{aligned}
\widehat{QRS} &= \widehat{QRP} + \widehat{PRS} && \text{(VII.1)}\\
&= \widehat{QAP} + 180^o - \widehat{PCS} && \text{(VII.2)}\\
&= 180^o - \widehat{BAP} + 180^o - \widehat{PCB} && \text{(VII.3)}\\
&= 180^o && \text{(VII.4)}
\end{aligned}$$

Et Q, R, S sont alignés.

Supposons désormais que Q, R, S sont alignés et montrons que P appartient au triangle ABC. Les points B, Q, P, S sont cocycliques. On a :

$$\begin{aligned}
\widehat{APC} &= \widehat{APS} + \widehat{SPC} && \text{(VII.5)}\\
&= \widehat{QPS} - \widehat{APQ} + \widehat{SRC} && \text{(VII.6)}\\
&= 180^o - \widehat{QBS} - \widehat{ARP} + \widehat{SRC} && \text{(VII.7)}\\
&= 180^o - \widehat{ABC} && \text{(VII.8)}
\end{aligned}$$

Donc les points A, P, C, B sont cocycliques.

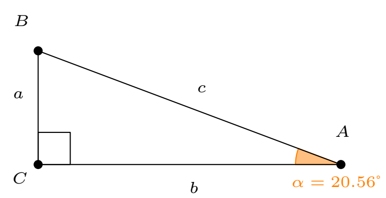
3 mercredi 23 matin : Cécile Gachet

Motivations et intentions du cours Dans les deux premiers cours, on a vu comment calculer des angles, trouver des points cocycliques éventuellement en passant par des arguments de puissance d'un point par rapport à un cercle. Cela va globalement à l'encontre de la tradition de géométrie analytique tenace dans les programmes scolaires : oubliés, les calculs de longueurs, au profit de la chasse aux angles ! Toutefois, il ne faut pas pousser ce clivage trop loin ; on a souvent besoin de calculer des longueurs, même en géométrie synthétique (ne serait-ce que pour utiliser la puissance d'un point par rapport à un cercle, appliquer sporadiquement le théorème de Thalès ou montrer que des triangles sont semblables). On se propose donc ici de présenter quelques façons de gérer l'apparition de conditions portant sur des longueurs dans un énoncé de géométrie : loi des sinus, théorème de la bissectrice, importance des placer les rapports de longueurs sur une même droite ou deux droites parallèles, utilisation d'aires, constructions de parallélogrammes dans une figure donnée.

Pour finir, on profite de l'opportunité qu'offre un dernier cours de géométrie pour mobiliser les techniques de chasse aux angles et de puissance d'un point par rapport à un cercle apprises lors du stage dans la résolution d'un problème de compétition internationale de niveau consistant (EGMO 2014 - problème 2).

Introduction à la trigonométrie Comment relier des angles et des longueurs ? Cette question épineuse trouve sa réponse dans deux (ou trois) fonctions d'importance primordiale en mathématiques, dont vous avez peut-être déjà entendu parler au collège : le sinus et le cosinus. Penchons-nous sur leur découverte.

Soit α une certaine valeur d'angle entre 0° et 90°. Il existe un triangle rectangle dont un angle est de mesure α, c'est celui-ci :



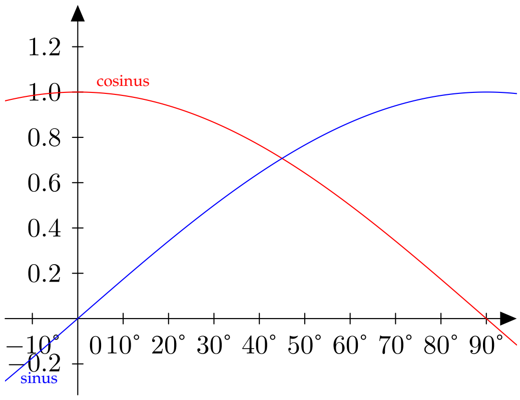
Ce qui est plus intéressant, c'est que, quel que soit le triangle qu'on trace, le rapport de longueurs $\frac{b}{c}$ est conservé : il ne dépend donc que du choix de la mesure d'angle α qu'on a fait au début ! Ce rapport, on l'appelle donc cosinus de α, on le note $\cos(\alpha)$. Le cosinus est donc une boîte noire dans laquelle on rentre une valeur d'angle et qui ressort un certain nombre.

De même, on peut définir le sinus de α comme le rapport de longueurs $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ dans le triangle tracé, et la tangente de α comme le rapport de longueurs $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$. Comme la division par zéro, c'est mal, la tangente de α n'est pas définie dans le cas où $b = 0$, autrement dit $\alpha = 90^\circ$.

Maintenant, on a établi un pont entre des angles et des rapports de longueurs en définissant de nouvelles fonctions. Mais comment calculer ces fonctions, en pratique ? Mauvaise nouvelle : on n'a pas de formule simple du genre $\cos(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2\pi^2}{64800}$ pour calculer à la main le cosinus d'un angle qu'on connaît... On connaît seulement quelques valeurs simples :

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	non définie

On sait aussi à quoi ressemblent les graphes de ces fonctions :



Pour savoir tout cela, des géomètres ont mesuré beaucoup de longueurs et ont publié des tables de valeurs aux siècles passés. Aujourd'hui, on a de meilleures méthodes pour calculer la valeur approchée du sinus d'un angle et surtout de meilleurs outils avec les calculatrices et les ordinateurs. Dans l'immédiat, vous devez juste connaître quelques valeurs et propriétés remarquables de ces fonctions.

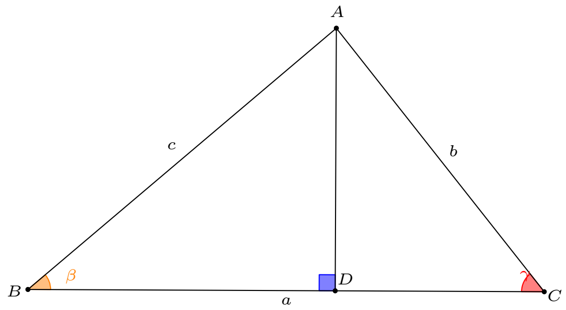
Ces propriétés remarquables, on les lit sur les graphes des fonctions : les graphes de cosinus et de sinus se ressemblent : on peut les superposer si on fait subir une symétrie d'axe vertical passant par l'origine puis qu'on décale suffisamment vers la droite le graphe du cosinus. plus proprement, on a pour tout angle α la relation :

$$\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha).$$

On a aussi $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$. En exercice, démontrer ces deux égalités à partir de la définitions du cosinus et du sinus dans un triangle rectangle.

Calcul de longueurs usuelles dans un triangle et loi des sinus Utilisons notre nouvelle boîte à outils pour calculer des longueurs usuelles dans un triangle. Soit ABC un triangle acutangle (c'est-à-dire dont tous les angles sont aigus), on note α, β, γ ses angles aux sommets A, B, C et a, b, c les longueurs de ses côtés BC, CA, AB.

Tout d'abord, on introduit D le pied de la hauteur issue de A. Calculons (c'est-à-dire exprimons en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ la longueur AD.



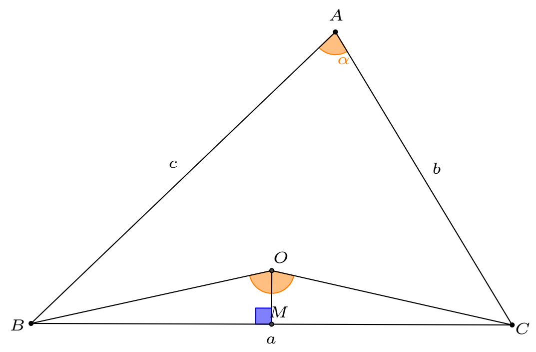
On applique la définition du sinus dans le triangle ABD rectangle en D : $AD = c\sin(\beta)$. En fait, on aurait aussi pu choisir le triangle ACD et on aurait obtenu : $AD = b\sin(\gamma)$. En procédant de même pour calculer les longueurs des hauteurs issues des autres sommets, on établit finalement le résultat suivant :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

Ce résultat, appelé la **loi des sinus**, permet donc de relier les longueurs des côtés d'un même triangle, pourvu qu'on en connaisse les angles. En fait, ce n'est pas exactement la première fois qu'on relie des longueurs et des angles : avec le théorème de Thalès, on sait relier des longueurs à des droites parallèles et avec les triangles semblables, on sait relier des longueurs proportionnelles à des angles égaux. On peut donc résumer notre savoir-faire ès longueurs de cette façon :

Astérix dit : « Quand je veux travailler avec des longueurs, j'utilise :
- ▷ le *théorème de Thalès* si j'ai ou si je veux des droites parallèles ;
- ▷ les *triangles semblables* si j'ai *deux* triangles avec des angles égaux, que je connais des choses sur les longueurs de l'un et que je veux apprendre des choses sur les longueurs de l'autre ;
- ▷ la *loi des sinus* si j'ai *un* triangle dont je connais les angles et une longueur et dont je veux calculer une autre longueur. »

En application, notons O le centre du cercle circonscrit à ABC et tentons d'exprimer le rayon du cercle circonscrit $AO = BO = CO = R$.



D'après le principe Astérix, comme on n'a ni droites parallèles ni triangles semblables, il va falloir appliquer la loi des sinus dans un triangle bien choisi. Si on note M le milieu de $[BC]$, deux perspectives s'offrent à nous : appliquer la loi des sinus dans OBC ou dans OMB. Essayons les deux méthodes, on obtient (grâce au théorème de l'angle au centre et au fait que OBC soit isocèle en O pour les calculs d'angles) :

$$OB = BC\frac{\sin(\widehat{OCB})}{\sin(\widehat{BOC})} = \frac{a\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(2\alpha)} = \frac{a\cos(\alpha)}{\sin(2\alpha)},$$

$$OB = BM\frac{\sin(\widehat{OMB})}{\sin(\widehat{BOM})} = \frac{a}{2\sin(\alpha)}.$$

On a donc calculé R, ce qui nous permet de compléter la loi des sinus :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R,$$

et on a montré une nouvelle formule trigonométrique (c'est-à-dire sur les sinus et les cosinus) : pour tout angle α, $\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$.

Un bon exercice est d'énoncer et de démontrer un équivalent de la loi des sinus dans un triangle ABC possédant un angle obtus.

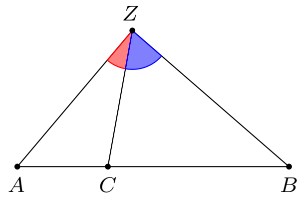
Calcul d'aires Avec la loi des sinus, on peut démontrer de nouvelles formules pour calculer l'aire d'un triangle : si on note h la longueur de la hauteur issue de A et $[ABC]$ l'aire du triangle ABC, on a :

$$[ABC] = \frac{bh}{2} = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}ca\sin(beta) = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{abc}{4R}.$$

En application, on peut montrer le **lemme magique** : soit A, B, C trois points alignés, Z un point qui n'est pas aligné avec eux. On a :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{ZA\sin(\widehat{AZC})}{ZB\sin(\widehat{BZC})}.$$

Il suffit en fait de constater que les triangles ZAC et ZBC ont une hauteur commune issue de A, et de calculer le rapport de leurs aires de deux façons différentes.



Un corollaire du lemme magique est l'important **théorème de la bissectrice** : soit ZAB un triangle, C le pied de la bissectrice issue de Z. On a :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{ZA}{ZB}.$$

Voici deux exercices sur ce genre de calcul d'aires astucieux. Le premier résultat est important, à retenir comme une des rares propriétés intéressantes du centre de gravité d'un triangle.

1. soit ABC un triangle, G son centre de gravité. Montrer que les médianes découpent ABC en six petits triangles de même aire. Montrer que G coupe chacune des médianes aux $2/3$ de sa longueur.
2. théorème de Viviani : soit ABC un triangle équilatéral et P un point à l'intérieur. Soit D, E, F les projetés orthogonaux de P sur les côtés de ABC. Montrer que la quantité $PD + PE + PF$ est la même quel que soit le choix du point P.

Une dernière remarque sur les preuves avec les aires : on constate ici que des rapports de longueurs sont généralement plus faciles à étudier quand les longueurs impliquées sont reportées sur une même droite (pour voir des triangles de même hauteur ou appliquer le théorème de Thalès) ou sur deux droites parallèles (toujours pour Thalès). Cette idée est souvent une motivation pour introduire de nouveaux points dans des figures quand on veut exprimer plus commodément une relation de longueurs. Il y a une bonne raison derrière cela : dans un cours de géométrie plus avancé, on aime étudier des transformations géométriques. Un exemple de transformation est le suivant : regarder l'ombre de sa figure géométrique préférée sur le sol, sous un soleil radieux. Qu'arrive-t-il aux rapports de longueurs dans cette transformation ? Faites l'expérience : si vous tendez le bras perpendiculairement à votre corps, le rapport entre la longueur de l'ombre de votre bras et la longueur de votre ombre n'est généralement pas le même que le véritable rapport entre la longueur de votre bras et celle de votre corps (en tournant sur vous-même, vous pouvez changer la longueur de l'ombre de votre bras) ! En revanche, si vous gardez la tête droite, le rapport entre la hauteur de votre tête et votre taille sera le même sur vous et sur votre ombre. Ainsi, les rapports de longueurs se comportent mieux quand ils sont pris sur des droites confondues ou parallèles.

Les Dalton disent : « On préfère toujours comparer des longueurs prises sur des droites confondues ou parallèles ! »

Exercice 1

Soit ABC un triangle, D le symétrique de B par rapport à C et E un point de $(AC]$ tel que $EA = 2AC$. Supposons que $BE = AD$. Montrer que ABC rectangle en A. *(EGMO 2013 - pb 1)*

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

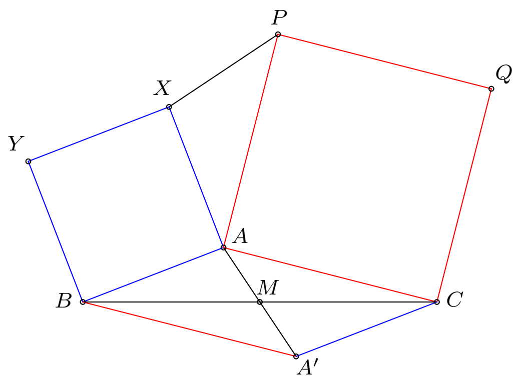
Comme A est aux deux-tiers de la médiane issue de E, c'est le centre de gravité du triangle EBD. Soit M le point d'intersection de (AD) et (BE), on a donc M milieu de $[BE]$ et $BM =$

$EM = \frac{1}{2}AD = AM$, parce que A coupe la médiane $[DM]$ à ses deux-tiers. Donc le cercle de centre M de diamètre $[BE]$ passe par A, donc d'après le théorème de Thalès allemand (qui dit qu'un triangle inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre du cercle est un triangle rectangle), $\widehat{BAC} = \widehat{BAE} = 90^\circ$.

Parallélogrammes Enfin, une dernière façon de gérer des égalités de longueurs est de construire ou de compléter des parallélogrammes : cela permet souvent d'obtenir plus d'égalités de longueurs, des droites parallèles, des propriétés intéressantes sur le milieu des diagonales.

Exercice 2

Soit ABC un triangle, P, Q, X, Y des points du même côté que A de (BC) tels que $ABYX$ et $ACQP$ sont des carrés. Soit M le milieu de $[BC]$. Montrer que $PX = 2AM$.



Solution de l'exercice 2

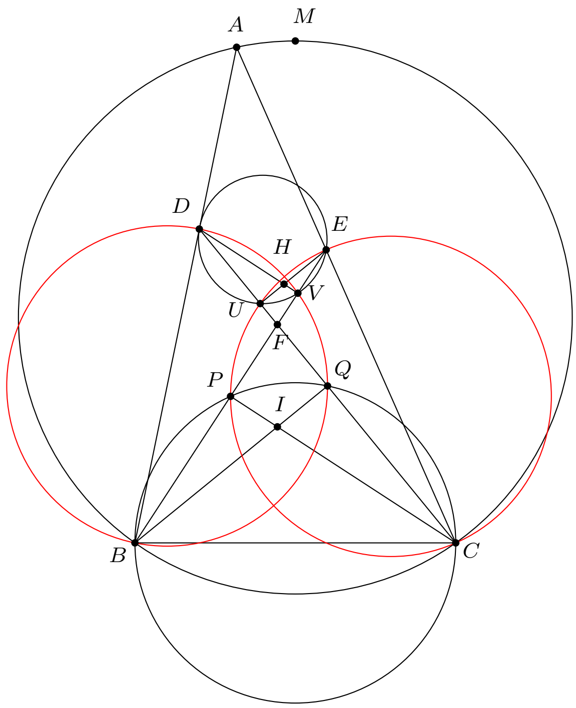
On aimerait transformer la relation à prouver en une égalité de longueurs. D'autre part, comme M est le milieu de $[BC]$, on est tenté de construire un parallélogramme dont B, C soient des sommets. On introduit donc tout naturellement A' le symétrique de A par rapport à M, de sorte qu'on se ramène à montre que $AA' = PX$ et qu'on a un parallélogramme $ABA'C$. On a plein d'égalités de longueurs : $BA = AX$ et $A'B = CA = AP$ notamment. Ainsi, montrer que $AA' = PX$ revient à montrer que les triangles AXP et $BA'A$ sont isométriques (c'est-à-dire qu'ils ont semblables et que le facteur de proportionnalité entre leurs longueurs vaut 1). On calcule des angles :

$$\widehat{A'BA} = \widehat{A'BC} + \widehat{CBA} = \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = 180^\circ - \widehat{BAC} = \widehat{XAP},$$

ce qui conclut.

Le problème 2 d'EGMO 2014 On va résoudre l'exercice suivant : soit ABC un triangle acutangle dont $[BC]$ est le plus petit côté, D un point de $[AB]$ et E un point de $[AC]$ tels que $BC = BD = CE$. Soit F l'intersection de (BD) et (CE), H l'orthocentre de DEF, I le centre du cercle inscrit à ABC et M le pôle nord de ABC par rapport à A.

Montrer que I, H et M sont alignés.



Dans cet exercice, on a un orthocentre, donc on sait automatiquement qu'il y a beaucoup de cercles ! En fait, si on note U le pied de la hauteur issue de D et V celui de la hauteur issue de E, on a D, U, V, E cocycliques et H, U, V, F cocycliques.

Par ailleurs, essayons de comprendre le point I. On sait que (BI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$; c'est donc la bissectrice-médiane-médiatrice-hauteur issue de B dans le triangle isocèle BCD ! Notons P son pied. De même, (CI) est la hauteur issue de C dans BCE, notons Q son pied. On vient de montrer que I est l'orthocentre de BCF, d'où deux nouveaux cercles qu'on trace automatiquement : B, P, Q, C et I, P, Q, E.

En fait, on a maintenant quatre angles droits sur notre figure ; on a donc bien plus que les quatre cercles qu'on vient de tracer ! Notamment, B, P, U, D et C, Q, V, E sont cocycliques sur deux cercles de diamètres respectifs $[BD]$ et $[CE]$ (ces cercles sont donc, soit dit en passant, de même rayon) qu'on appelle Γ_B et Γ_C et dont on note les centres O_B et O_C.

Soit d l'axe radical de ces deux cercles ; c'est en fait la droite I, H, M, comme on va le montrer maintenant.

- ▷ $I \in d$: il s'agit de montrer que I a même puissance par rapport à Γ_B et par rapport à Γ_C autrement dit que $IC \cdot IQ = IB \cdot IP$, ce qui est vrai car les points C, Q, B, P sont cocycliques ;
- ▷ $H \in d$: c'est exactement le même argument, en utilisant la cocyclicité de D, E, U, V ;
- ▷ $M \in d$: on sait déjà que $BO_B = CO_C$; pour établir que M a la même puissance par rapport à Γ_B et Γ_C, il suffit de montrer que $MO_B = MO_C$. Or $MC = MB$ par définition, donc on a envie de montrer que les triangles MO_BB et MO_CC sont isométriques. On a déjà deux longueurs égales, et comme $\widehat{O_BBM} = \widehat{O_CCM}$, c'est gagné.

D'où l'alignement de I, H, M.

2 Groupe A : arithmétique

1 lundi 21 après-midi : Alexander Semenov

Ce cours a suivi les parties 1 et 2 du polycopié d'arithmétique débutant de Jean-Louis Tu.

2 mardi 22 après-midi : Victor Vermès

Ce cours constitue une introduction aux congruences. Les tableaux de congruences sont introduits et utilisés dans des exercices, tout comme le petit théorème de Fermat, et l'ordre d'un élément modulo n. Ce cours correspond à la partie 3 du polycopié d'arithmétique débutant de Jean-Louis Tu , et voici le corrigé des exercices.

3 mercredi 23 après-midi : Rémi Lesbats

Factorisations

ThéorÃ¨me 81. Identités remarquables
Pour tous réels a, b, et un entier positif n,

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^n + b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

En particulier, si n est impair,

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1})$$

Démonstration. Développer pour s'en convaincre... □

ThéorÃ¨me 82. Si $a \neq 1$ est un réel, alors

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Démonstration. C'est un cas particulier $(b = 1)$ trÃ¨s utile de la formule précédente □

Exercice 1 Factoriser les expressions suivantes :
- ▷ $4x^2 - y^4$
- ▷ $8x^2 - 24xy + 18y^2$
- ▷ $(x-y)(3x+1) - 2(x^2 - y^2) - (y-x)^2$

Exercice 2 Résoudre pour $x \in \mathbb{Z}$, l'équation $x^4 - 2 = x^3 + x^2 + x$

Solution de l'exercice 1
- ▷ $4x^2 - y^4 = (2x)^2 - (y^2)^2 = (2x + y^2)(2x - y^2)$
- ▷ $8x^2 - 24xy + 18y^2 = 2\big((2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2\big) = 2(2x - 3y)^2$
- ▷ $(x-y)(3x+1) - 2(x^2 - y^2) - (y-x)^2 = (x-y)\big(3x + 1 - 2(x+y) - (x-y)\big) = (x-y)(1-y)$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Si $x = 1$, on n'a pas de solution, donc on peut supposer $x \neq 1$

$$x^4 - 2 = x^3 + x^2 + x \iff x^4 - 1 = x^3 + x^2 + x + 1 \iff x^4 - 1 = \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

$$\iff x - 1 = 1 \text{ ou } x^4 - 1 = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = -1$$

On vérifie que $x = 2$ et $x = -1$ sont bien solutions, donc ce sont les seules.

Astuces pratiques

Définition 83. Soit p un nombre premier. On appelle "valuation $p-$adique" d'un entier n, notée $v_p(n)$, la plus grande puissance de p qui divise n.

Exemple 84. $v_2(42) = 1; v_5(42) = 0; v_3(54) = 3$

Lemme 85. Pour tous entiers a et b, et p premier, $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$

Démonstration. Par décomposition en facteurs premiers de a et b □

ThéorÃ¨me 86. Si on peut écrire un entier a sous la forme $a = x^n$, alors pour tout nombre premier p divisant n, il existe un entier k tel que $v_p(a) = kn$

Démonstration. $v_p(a) = v_p(x^n) = n \times v_p(x)$. Il suffit donc de choisir $k = v_p(x)$ □

Exercice 3 Trouver tous les entiers (m, n) tels que $m^3 = 4n + 2$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> On sait que $v_2(m^3)$ est un multiple de 3 par le théorème précédent, calculons donc $v_2(4n + 2)$

$v_2(4n + 2) = v_2(2) + v_2(2n + 1) = 1 + 0 = 1$

Or 1 n'est pas multiple de 3, donc il n'y a pas de solutions.

Maintenant, voici un lemme dont l'énoncé semble trivial mais qui est en réalité très utile dans certains exercices, comme nous le verrons par la suite

Lemme 87. Entre deux carrés d'entiers consécutifs, il n'y a pas un autre carré parfait.

Remarques 88. On peut très facilement généraliser aux puissances supérieures.

Exercice 4 Trouver tous les couples d'entiers (x, y) vérifiant $x^2 = y^2 + y + 1$

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Si $y > 0$, $y^2 < y^2 + y + 1 < (y + 1)^2$, donc d'après notre lemme il n'y a pas de solutions.

Si $y < -1$, $y^2 > y^2 + y + 1 > (y + 1)^2$, donc pour la même raison, il n'y a pas de solutions.

Si $y = 0$, $y^2 + y + 1 = 1 = (\pm 1)^2$

Si $y = -1$, $y^2 + y + 1 = 1 = (\pm 1)^2$

Finalement, les couples solutions sont $(-1, -1); (-1, 0); (1, -1); (1, 0)$

Exercices d'application des congruences

Exercice 5 Trouver tous les entiers naturels (a, b, c) tels que $2^a + 9^b = 2.5^c + 5$

Exercice 6 Trouver tous les entiers positifs (x, y, z) tels que $3x^2 = 5^y + 2^z - 1$

Exercice 7 Trouver tous les entiers (a, b) tels que $a^5 = 5^b$

Exercice 8 Trouver tous les entiers (x, y) tels que $14^x = y^2 - 2$

Exercice 9 Trouver tous les entiers positifs (x, y) tels que $x^5 = y^2 + 4$

Solutions

Solution de l'exercice 5 On regarde modulo 4 : si $a \geq 2$, $2^a \equiv 0[4]$. Mais alors comme 5 et 9 valent 1 modulo 4, $9^b \equiv 1[4]$ et $2.5^c + 5 \equiv 2 + 1 \equiv 3[4]$. Ceci est impossible, donc $a < 2$

Si $a = 1$, on a $2 + 9^b = 2.5^c = 5 \iff 9^b = 2.5^c + 3$, mais on voit bien que l'on aura une contradiction modulo 3, sauf si $b = 0$, auquel cas $1 = 2.5^c + 3$ et dans ce cas $c = 0$ est solution.

Si $a = 0$, on a $1 + 9^b = 2.5^c + 5$, mais dans ce cas, le membre de gauche est pair tandis que le membre de droite est impair, absurde.

Finalement, la seule solution est $(1, 0, 0)$

Solution de l'exercice 6 De même que dans l'exercice précédent, si on regarde modulo 4, on conclut que $z < 2$

Si $z = 1$, on a $3x^2 = 5^y + 1$, mais dans ce cas, le membre de gauche est impair tandis que le membre de droite est pair, absurde.

Si $z = 0$, on a $3x^2 = 5^y$, mais dans ce cas, 3 doit diviser 5^y, ce qui est impossible.

Donc l'équation proposée n'admet pas de solutions.

Solution de l'exercice 7 On a l'équation $a^5 = 5^b$. Si $b > 0$, alors a divise 5^b, donc a est une puissance de 5, il existe un entier c tel que $a = 5^c$.

L'équation se réécrit $5^{5c} = 5^b \iff 5c = b$

L'ensemble des solutions est donc $\{(5^c, 5c), c \in \mathbb{N}\}$

Solution de l'exercice 8 Si $x \geq 2$, alors $14^x \equiv 0[4]$, mais d'autre part $y^2 - 2 \equiv 2[4]$ si y est pair et $y^2 - 2 \equiv 3[4]$ si y est impair. Les deux membres ne peuvent pas être égaux, donc $x < 2$

Si $x = 1$, on a $14 = y^2 - 2$, d'où la solution $y = 4$

Si $x = 0$, on a $1 = y^2 - 2$, soit $y^2 - 3 = 0$

Finalement, la seule solution est $(1, 4)$

Solution de l'exercice 9 On regarde modulo 11. Les valeurs possibles pour x^5 sont $0, 1, 10$ et pour $y^2 + 4$: $2, 4, 5, 8, 9$ (faire un tableau de congruences). Ces ensembles sont disjoints, donc il n'y a pas de solutions.

3 Groupe B : géométrie

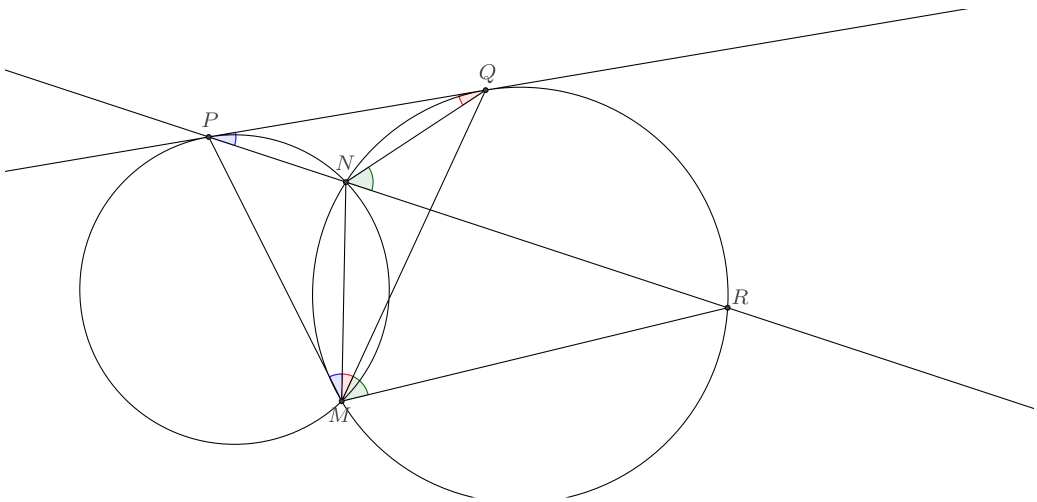
1 lundi 21 matin : Martin Rakovsky

Le but de ce cours est de maÃ®triser les stratégies classiques utilisées pour aborder un problème de géométrie, Ã savoir la chasse aux angles et la recherche de triangles semblables. Nous verrons pour cela certains résultats utilisés fréquemment en géométrie : le théorème de l'angle inscrit, le théorème de Thalès, la puissance d'un point par rapport Ã un cercle et le théorème de l'axe radical.

Le théorème de l'angle inscrit

On peut retrouver les différents théorèmes de l'angle inscrit dans le cours truculent de Cécile Gachet suivant Ã la page 244. On a également traité les exercices suivants.

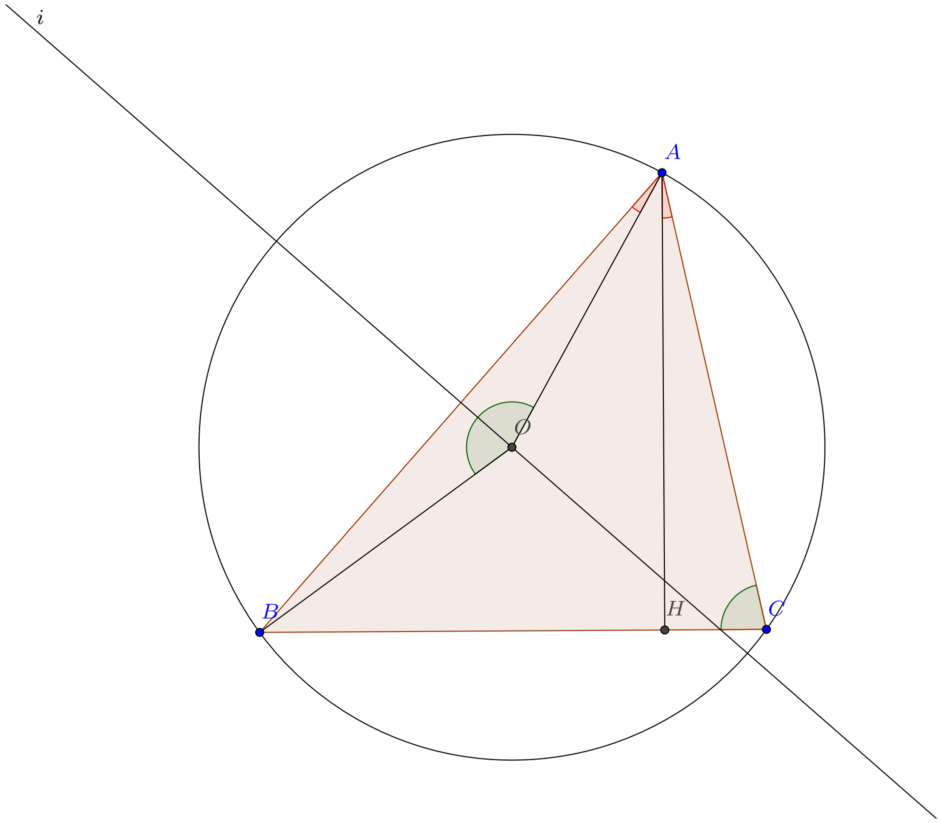
Exercice 1 Deux cercles Ω_1 et Ω_2 se coupent en M et N. Une tangente commune aux deux cercles touche Ω_1 en P et Ω_2 en Q, avec P et Q chacun plus proches de N que de M. La droite (PN) recoupe Ω_2 en R. Montrer que (MQ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PMR}$.



Solution de l'exercice 1
Il suffit de montrer que $\widehat{RMQ} = \widehat{QMP}$. Pour cela on remarque que $\widehat{PMQ} = \widehat{PMN} + \widehat{NMQ}$ et on va calculer les angles $\widehat{PMN}$ et $\widehat{NMQ}$ séparément.

On a d'abord $\widehat{PMN} = \widehat{NPQ}$ par théorème de l'angle inscrit dans le cas tangentiel et on a $\widehat{NMQ} = \widehat{NQP}$ de la mÃªme façon. Ainsi $\widehat{PMN} + \widehat{NMQ} = \widehat{NPQ} + \widehat{NQP} = 180^o - \widehat{PNR} = \widehat{RNQ}$. On en conclut que $\widehat{PMQ} = \widehat{RNQ} = \widehat{RMQ}$ ce qui conclut.

Exercice 2 Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et H la pied de la hauteur issue de A. Montrer que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$.



<u>*Solution de l'exercice 2*</u>
Puisque O est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC, le triangle AOB est isocèle en O. On a donc $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$. Donc $\widehat{BOA} = 180^o - \widehat{BAO} - \widehat{ABO} = 180^o - 2\widehat{BAO}$. On en déduit que $\widehat{BAO} = 90^o - \frac{1}{2}\widehat{BOA} = 90^o - \frac{1}{2} \cdot 2\widehat{BCA} = 90^o - \widehat{BCA}$. Or le triangle ACH est rectangle en H donc $\widehat{BCA} = \widehat{HCA} = 90^o - \widehat{CAH}$ et il vient directement que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$.

Les triangles semblables et le théorème de Thalès

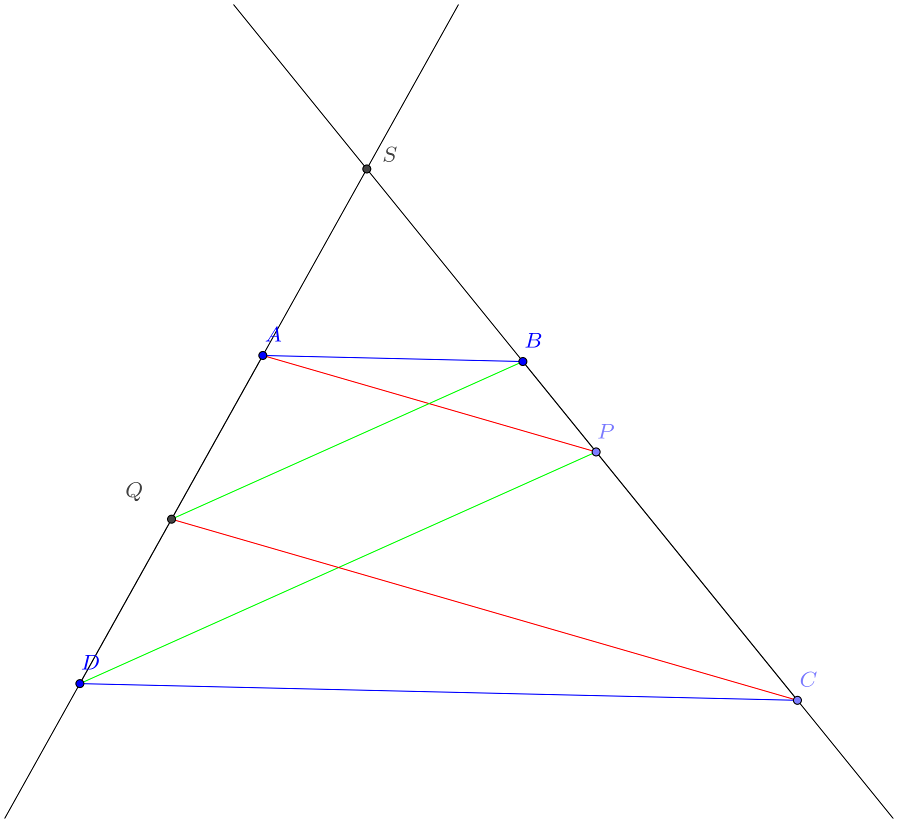
Exercice 3 Soit ABC un triangle rectangle en C et soit D le pied de la hauteur issue de C. Montrer les relations suivantes :

$$AC^2 = AB \cdot AD \tag{VII.9}$$
$$CD^2 = AD \cdot DB \tag{VII.10}$$
(VII.11)

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Faisons un peu de calcul d'angles : on a $\widehat{DAC} = \widehat{CAB}$ et $\widehat{DCA} = 90^o - \widehat{DAC} = 90^o - \widehat{BAC} = \widehat{ABC}$. On en déduit que les triangles DCA et CBA sont directement semblables. On a donc $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$ et en supprimant les dénominateurs on trouve $AC^2 = AB \cdot AD$ qui prouve la première relation.

Pour la deuxième relation, on commence aussi par calculer quelques angles : on a $\widehat{DCB} = 90^o - \widehat{CBD} = 90^o - \widehat{CBA} = \widehat{CAB}$ et $\widehat{ADC} = 90^o = \widehat{CDB}$ donc les triangles ADC et CDB sont semblables. En terme de rapport, cela s'écrit : $\frac{CD}{DA} = \frac{DB}{CD}$ soit, en supprimant les dénominateurs, $CD^2 = AD \cdot DB$.

Exercice 4 Soit $ABCD$ un trapèze qui n'est pas un rectangle, avec (AB) parallèle Ã (CD) et $AB < CD$. Soit P un point de $[BC]$. La parallèle à (AP) passant par C coupe $[AD]$ en Q et la parallèle Ã (DP) passant par B coupe $[AD]$ en Q'. Montrer que $Q = Q'$, c'est-à-dire que les points Q et Q' sont confondus.



Solution de l'exercice 4

L'idée principale est d'introduire S le point d'intersection des droites (AD) et (BC). Comme (AP) et (CQ) sont parallèles, on a par le théorème de Thalès $\frac{SC}{SP} = \frac{SQ}{SA}$ soit $SA \cdot SC = SP \cdot SQ$. Comme (DP) et (BQ') sont parallèles, on a de la mÃªme manière $SB \cdot SD = SP \cdot SQ'$. Enfin, comme (AB) et (CD) sont parallèles, on a de la mÃªme manière toujours $SB \cdot SD = SA \cdot SC$ soit $SP \cdot SQ = \cdot SP \cdot SQ'$ soit $SQ = SQ'$. Donc Q et Q' sont équidistants d'un point qui se situe sur la droite (QQ'). Ceci prouve bien que $Q = Q'$.

2 mardi 22 matin : Alexander Semenov

Ces exercices sont très classiques. Leurs corrigés peuvent être trouvés dans un cours de géométrie, par exemple celui de Dehornoy où la plupart des théorèmes présentés ici sont prouvés. La plupart des exercices sont des chasses aux angles.

Exercices corrigés en cours

Exercice 1 (points remarquables d'un triangle)

Rappeler pourquoi les médiatrices sont concourantes en le centre du cercle circonscrit, les bissectrices intérieures sont concourantes en le centre du cercle inscrit, comment on obtient les centres des cercles exinscrits, les médianes sont concourants et les hauteurs sont concourantes.

Exercice 2

Démontrer le théorème de Pythagore.

Exercice 3

Soit ABC un triangle isocèle en A avec $AB = AC > BC$. Soient D sur (AB) tel que A, B, D sont dans cet ordre et E sur (BC) tel que B, C, E soient dans cet ordre et tels que $BD = CE = AB - BC$.

Montrer que le triangle ADE est isocèle.

Exercice 4

Soient A, B, C, D quatre points cocycliques. Notons $\alpha = \widehat{ABD}$ et $\beta = \widehat{CAB}$. Soit E le point d'intersection entre (AB) et (CD) et F le point d'intersection entre (AC) et (BD).

Déterminer les angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{AFD}$ en fonction de α et β.

Exercice 5

Soient $A, B, A', B', A", B"$ six points cocycliques sur un cercle de centre O tels que $(A'B")$ et $(B'A")$ sont parallèles. Soit X le point d'intersection entre (AA') et (BB') et Y le point d'intersection entre $(AA")$ et $(BB")$.

Montrer que A, X, Y, B sont cocycliques.

Exercice 6

Soient C_1 et C_2 deux cercles qui s'intersectent en deux points A et B. Soit une droite qui passe par A et intersecte C_1 en C et C_2 en E, ainsi qu'une droite qui passe par B et qui intersecte C_1 en D et C_2 en F.

Faire une figure, émettre une conjecture et la démontrer.

énoncer un cas limite du résultat ainsi établi.

Exercice 7

Soit ABC un triangle et B', C' les pieds des hauteurs issues de B, C respectivement. Soient X, Y les intersections entre $(B'C')$ et le cercle circonscrit à ABC. Montrer que $AX = AY$.

Exercice 8 (théorème du pôle sud)

Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. On appelle pôle sud du triangle ABC l'intersection entre la bissectrice intérieure issue de A et le cercle circonscrit Γ. Notons S le pôle sud du triangle ABC. Montrer que :

1) $SB = SC$

2) $SB = SC = SI$ où I est le centre du cercle inscrit du triangle ABC

3) $SB = SC = SI = SI_A$ où I_A est le centre du cercle exinscrit opposé à A

4) $SA'.SA = SI^2$ où A' est l'intersection entre (AI) et (BC)

5) On appelle pôle est du triangle ABC l'intersection entre la bissectrice intérieure issue de B et le cercle circonscrit Γ. Notons E le pôle est du triangle ABC. Soient X, Y les points d'intersection entre (SE) et $(AC), (BC)$ respectivement. Montrer que $CXIY$ est un losange.

6) Les droites (SO) et (BC) sont perpendiculaires où O est le centre du cercle circonscrit à ABC.

Exercice à faire à la maison

Exercice 9

Soient A, B, C, D quatre points cocycliques, de sorte à ce que C, D soient du même côté par rapport à (BC). Soit S le pôle sud du triangle ABC. Soient A', D' les points d'intersection entre (BC) et $(AS), (DS)$ respectivement. Montrer que $ADA'D'$ sont cocycliques.

Autres exercices importants

Exercice 10 (triangle orthique)

Soient A', B', C' les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement d'un trinagle acutangle ABC, et H son orthocentre. Montrer que :

1) les triangles $A'B'C$, $A'BC'$ et $AB'C'$ sont directement semblables entre eux et indirectement semblables au triangle ABC.

2) le triangle $A'B'C'$ s'appelle triangle orthique. Montrer que ses bissectrices intérieures coÃ¯ncident avec les hauteurs du triangle ABC. (remarquer qu'on a ainsi une preuve alternative du fait que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes)

3) les symétriques de H par rapport aux trois côtés de ABC appartiennent au cercle circonscrit de ABC.

Exercice 11 (théorème de la bissectrice)

Soit D le pied de la bissectrice intéreure issue de A dans le triangle ABC, et E le pied de la bissectrice extérieure issue de A. Montrer qu'on a alors l'égalité suivante :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

Exercice 12 (loi des sinus)

Soient a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC opposés respectivement à A, B, C, α, β, γ ses angles associés respectivement aux sommets A, B, C, R le rayon de son cercle circonscrit et S l'aire de ABC. Montrer que :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R = \frac{abc}{2S}$$

Exercice 13 *(lemme magique)

Soit C' un point du côté AB su triangle ABC. Montrer qu'on a (en longueurs algébriques et angles orientés) :

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{\sin(\widehat{ACC'})}{\sin(\widehat{BCC'})}.\frac{AC}{BC}$$

Remarquer que c'est une généralisation du théorème de la bissectrice.

Exercice 14 (droite de Simpson)

Soit ABC un triangle et P un point. Soient P_1, P_2, P_3 les projections orthogonales de P sur les trois côtés du triangle.

Montrer que P_1, P_2, P_3 sont alignés si et seulement si P est sur le cercle circonscrit du triangle ABC.

Exercice 15 *

Soient l_1, l_2, l_3, l_4 quatre droites du plan. Soient S_1, S_2, S_3, S_4 les cercles circonscrits des quatre triangles ainsi obtenus. Montrer que ces cercles passent tous par un même point, appelé point de Miquel du quadrilatère $l_1 l_2 l_3 l_4$.

Exercice 16 (droite de Steiner)

Soit ABC un triangle et P un point. Soient P_1, P_2, P_3 les symétriques de P par rapport aux trois côtés du triangle.

Montrer que P_1, P_2, P_3 sont alignés si et seulement si P est sur le cercle circonscrit du triangle ABC.

Montrer de plus que dans le cas où $P_1 P_2 P_3$ sont alignés, ils sont alignés sur une droite qui passe par H, l'orthocentre de ABC.

Exercice 17 (théorème de MénélaÃ$\frac{1}{4}$s)

Soit ABC un triangle et P, Q, R trois points pris respectivement sur $(BC), (AC), (AB)$. Montrer que :

P, Q, R sont alignés si et seulement si $\frac{AR}{BR}\frac{BP}{CP}\frac{CQ}{AQ} = 1$ (en longueurs algébriques)

Exercice 18 (théorème de Céva)

Soit ABC un triangle et P, Q, R trois points pris respectivement sur les côtés BC, AC, AB. Montrer que :

$(AR), (BQ), (CR)$ sont concourantes si et seulement si

$$\frac{AR}{BR}\frac{BP}{CP}\frac{CQ}{AQ} = -1$$

(en longueurs algébriques).

Montrer aussi le théorème de Céva trigonométrique :

$(AR), (BQ), (CR)$ sont concourantes si et seulement si

$$\frac{\sin \widehat{CAP}}{\sin \widehat{PAB}}\frac{\sin \widehat{ABQ}}{\sin \widehat{QBC}}\frac{\sin \widehat{BCR}}{\sin \widehat{RCA}} = 1$$

(en angles orientés).

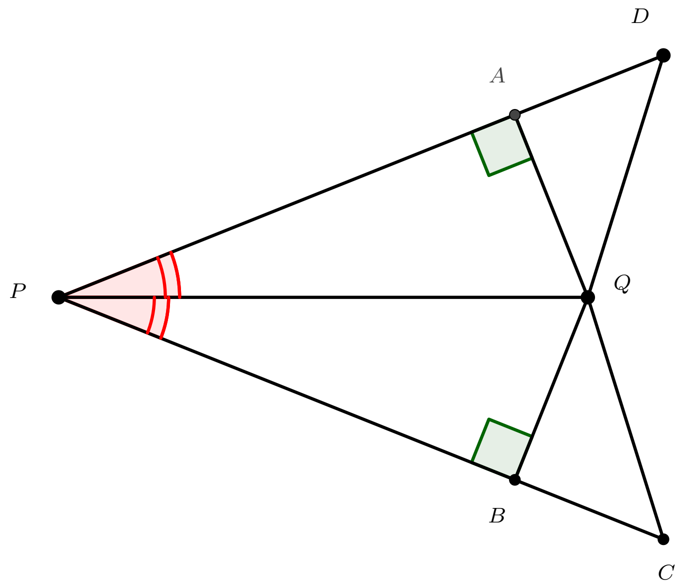
3 mercredi 23 matin : Linda Gutsche

Pour montrer que trois points A, B, et C sont alignés dans cet ordre on peut montrer que :

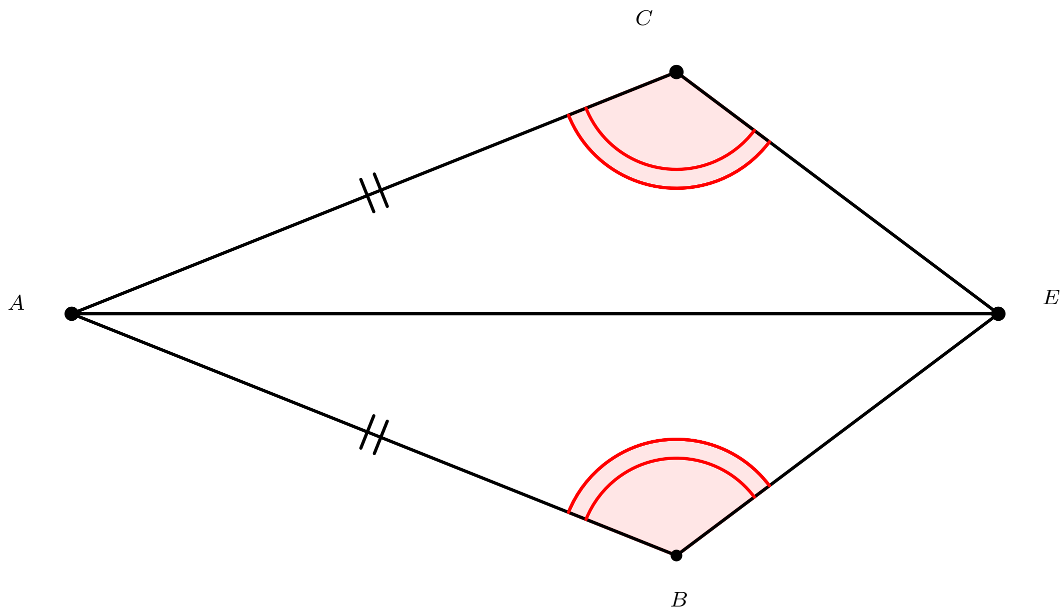
a) $\widehat{ABC} = 180°$ ou $\widehat{BAC} = 180°$ ou $\widehat{ACB} = 180°$
b) $(AB)//(BC)$
c) $A \in (BC)$ ou respectivement $B \in (AC)$ ou $C \in (AC)$: par exemple, A est à égale distance d'un point P et d'un point Q, et (BC) est la médiatrice de $[PQ]$; ou encore A a même puissance par rapport à deux cercles Γ_1 et Γ_2, et (BC) est l'axe radical de Γ_1 et Γ_2
d) $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ colinéaires
e) l'angle entre la droite (AB) et une droite d est le même que celui entre la droite (BC) et la même droite d
f) il existe une transformation conservant l'alignement envoyant trois points K, L et M alignés sur A, B et C

Configurations avec une bissectrice

a) $Q \in$ bissectrice intérieure de $\widehat{DPC}$ et $PD = PC \Rightarrow QD = QC$



b) $BA = AC$ et $\widehat{ABE} = \widehat{ACE}$ avec E à "l'intérieur" de $([BA], [AC]) \Rightarrow EB = EC$ et $E \in$ bissectrice $\widehat{CAB}$



Exercice 1 Soit ABC un triangle, S le pÃ´le sud de A dans ce triangle, et E le pÃ´le sud de B dans ce triangle. Soit I le centre du cercle inscrit à ABC, et soit X et Y les intersections de

(SE) avec (AC) et (BC) respectivement. Montrer que $IXCY$ est un parallélogramme.

Exercice 2 Soit A, B, C, et D quatre points cocycliques, et S le pÃ´le sud de A dans le triangle ABC.Soit A' et D' les intersections de (BC) avec (SA) et (SD) respectivement. Montrer que A', D', D, et A sont cocycliques.

Exercice 3 Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit. Soit N et M les intersections de la médiatrice de $[AD]$ avec (CI) et (BI) respectivement. Montrer que A, N, I et M sont cocyliques.

Exercice 4 Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Soit H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C respectivement.
a) Montrer que $ABC \sim AH_BH_C \sim H_AH_BC \sim H_ABH_C$
b) Montrer que les symétriques de H par rapport aux cÃ´tés du triangle ABC sont sur le cercle circonscrit à ABC.
c) Montrer que le symétrique de H par rapport aux milieux des cÃ´tés du triangle ABC sont sur le cercle circonscrit à ABC.
d) Montrer que H est le centre du cercle inscrit à $H_AH_BH_C$

Exercice 5 Droite de Simson : Soit ABC un triangle, P un point, et P_A, P_B, et P_C ses projetés orthogonaux sur (BC), (AC) et (AB) respectivement. Montrer que (P_A, P_B, et P_C alignés) $\Leftrightarrow$ (P sur le cercle circonscrit à ABC).

Exercice 6 Droite de Steiner : Soit ABC un triangle, P un point, et P'_A, P'_B, et P'_C ses symétriques par rapport à (BC), (AC) et (AB) respectivement. Montrer que (P'_A, P'_B, et P'_C alignés) $\Leftrightarrow$ (P sur le cercle circonscrit à ABC).

Exercice 7 Soit ABC un triangle aigu. La hauteur issue de B dans ABC coupe le cercle de diamètre (AC) en K et L, et la hauteur issue de C dans ABC coupe le cercle de diamètre (AB) en M et N. Montrer que K, L, M et N sont cocycliques.

Exercice 8 Soit ABC un triangle, et I le centre de son cercle inscrit. Soit D, L, et M les points de tangence du cercle inscrit avec (BD), (AC), (AB). Soit P l'intersection de (ML) et (BC). Montrer que $(AD) \perp (IP)$.

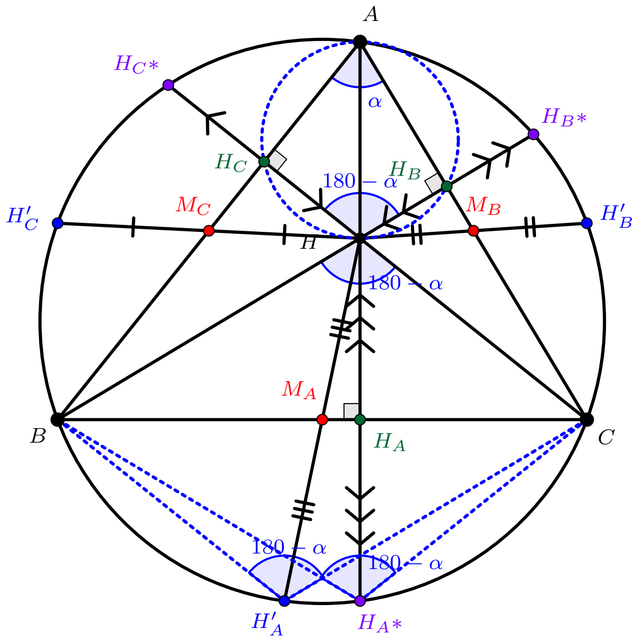
<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Il s'agit d'une chasse aux angles et de longueur qui utilise les configurations avec bissectrice précédentes.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Une chasse aux angles suffit, mais on peut aussi utiliser la puissance d'un point par rapport à un cercle et un des théorèmes de la veille : $SI_A^2 = SA \times SA'$ en ajoutant I_A et I_D les centres inscrits à ABC et DBC.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

Il s'agit de l'exercice 6 de l'envoi de géométrie de l'année 2016-2017. Il se résout en chasse aux angles arpès avoir remarqué que N est le pÃ´le sud de C dans le triangle ADC, et que M est le pÃ´le sur de B dans le triangle ABD.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>



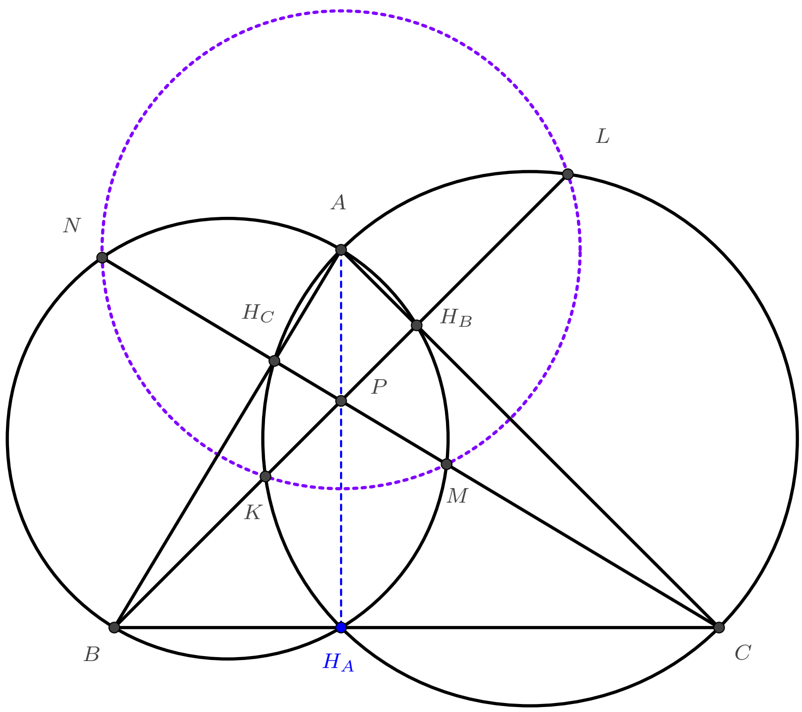
voir l'incontournable polycopié de chasse au angles de Cécile :
http://www.animath.fr/IMG/pdf/geoma.pdf

Solution de l'exercice 5

voir http://www.animath.fr/IMG/pdf/geoma.pdf et http://www.animath.fr/IMG/pdf/lemmes.pdf

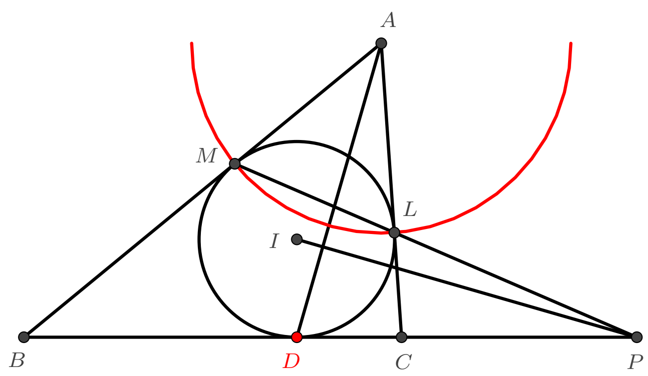
Solution de l'exercice 6 Cet exercice se déduit du précédent : par le théorème de la droite des milieux dans les triangles $PP'_AP'_B$ et $(PP'_BP'_C)$: $(P'_AP'_B)$ et (P_AP_B) sont parallèles, et $(P'_BP'_C)$ et (P_BP_C) aussi.

Solution de l'exercice 7



Soit H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C dans ABC. Soit C_C le cercle de diamètre $[AB]$ et C_B le cercle de diamètre $[AC]$ Soit P l'orthocentre de ABC. Comme $\widehat{BH_AA}$ et $\widehat{CH_AA}$ sont des angles droits, C_C et C_B passent par H_A. P est donc sur l'axe radical de ces deux cercles. Donc $P_{C_C}(P) = P_{C_B}(P)$. Donc $PK \times PL = PM \times PN$. Donc K, L, M et N sont cocycliques.

Solution de l'exercice 8



Comme M et L sont les points de tangence de (AB) et (AC) avec le cercle inscrit, $AM =$

AL. Donc il existe un cercle de centre A passant par M et L. Soit Γ ce cercle. Par puissance de P par rapport à le cercle inscrit, $PD = PL \times PM$. Donc P a même puissance par rapport au cercle Γ et au cercle étant le point D. Donc P est sur l'axe radical de D et Γ.

La puissance de I par rapport à D est DI^2. Or $(IL) \perp (AL)$ car (AL) tangente au cercle inscrit. Donc (IL) est tangente à Γ. Donc la puissance de I par rapport à Γ est IL^2. Mais I est centre d'un cercle passant par D et L. Donc $ID^2 = IL^2$. Donc I a même puissance par rapport à D et Γ. Donc I est sur l'axe radical de D et Γ.

Donc (IP) est l'axe radical de D et de Γ. Or l'axe radical de deux cercles est perpendiculaire à la droite reliant les deux centre des cercles. Donc $(AD) \perp (IP)$.

4 Groupe B : algèbre

1 lundi 21 après-midi : Mathieu Barré

Pour ce qui est du cours (manipulations algébriques - division polynomiale - inégalités), je vous renvoie au cours que j'ai fait au groupe A le 18 août au matin sur le même sujet.

Exercices

Exercice 1 Factoriser l'expression $a^{10} + a^5 + 1$.

Exercice 2 Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a l'inégalité : $\boxed{x + \frac{1}{x} \geq 2}$

Exercice 3 Montrer que pour tous réels positifs a et b, on a : $a^3 + b^3 + a + b \geq 4ab$.

Exercice 4 Montrer que si a, b, c et d sont quatre réels positifs tels que $abcd = 1$, alors

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

Exercice 5 Montrer que pour tous réels positifs a, b et c, on a : $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

Exercice 6 Montrer que pour tout réel positif x, on a l'inégalité : $1 + x^{2018} \geq \frac{(2x)^{2017}}{(1 + x)^{2016}}$.

Exercice 7 Montrer que pour tous réels positifs a, b et c, on a

$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca}$$

En déduire que $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$.

Exercice 8 Montrer que pour tous réels positifs x, y et z, on a : $x^2 + y^4 + z^6 \geq xy^2 + y^2z^3 + xz^3$.

Exercice 9 Soit k le plus petit réel strictement positif tel que pour tout réel positif x, on ait

$$\sqrt[3]{x} \leq k(x + 1).$$

Combien vaut k^3 ?

Exercice 10 Soit $m = \min\{x + 2y + 3z, x^3y^2z = 1\}$. Combien vaut m^3 ?

Exercice 11 Montrer que si $x_0 > x_1 > \cdots > x_n$, alors

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq x_n + 2n.$$

Exercice 12 Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs tels que

$$\frac{1}{1 + x_1} + \cdots + \frac{1}{1 + x_n} = 1.$$

Prouver que $x_1 \cdots x_n \geq (n-1)^n$.

Exercice 13 Soient $a_2, \ldots, a_n$ des réels positifs dont le produit vaut 1. Montrer que

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \geq n^n$$

- Solution des exercices -

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Si l'on connaît les nombres complexes, la solution la plus naturelle est de remarquer que le complexe $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est racine du polynôme $P(a) = a^{10} + a^5 + 1$. En effet, comme $j^3 = 1$, on a $P(j) = j^{10} + j^5 + 1 = j + j^2 + 1 = \frac{j^3-1}{j-1} = 0$. Son conjugué $\bar{j}$ est également racine de P et on en conclut que P est divisible par $(a - j)(a - \bar{j}) = a^2 + a + 1$. On fait alors la division polynômiale de $P(a)$ par $a^2 + a + 1$ et on trouve $a^{10} + a^5 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1)$.

Sinon, on peut s'en sortir de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
a^{10} + a^5 + 1 &= (a^5)^2 + a^5 + 1 \\
&= \frac{(a^5)^3 - 1}{a^5 - 1} = \frac{(a^3)^5 - 1}{a^5 - 1} \\
&= \frac{(a^3 - 1)(a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1)}{(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)} \\
&= \frac{(a^2 + a + 1)(a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1)}{a^4 + a^3 + a^2 + a + 1}
\end{aligned}$$

On ne pourra pas factoriser plus a^2+a+1 car le dénominateur de la fraction précédente est de degré supérieur à 2. Il nous reste donc à effectuer la division polynomiale de $a^{12}+a^9+a^6+a^3+1$ par $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$. On obtient $a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1$, ce qui conduit au même résultat final que la première méthode.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On peut transformer cette inégalité en carré positif :

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$$

De façon équivalente, l'inégalité arithmético-géométrique appliquée à la somme de deux termes que constitue le membre de gauche donne

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 2$$

Solution de l'exercice 3 On utilise l'inégalité arithmético-géométrique sur les quatre termes a^3, b^3, a et b :

$$a^3 + b^3 + a + b \geq 4\sqrt[4]{a^3 \times b^3 \times a \times b} = 4ab$$

Solution de l'exercice 4 On a une somme de 10 termes, tentons donc d'appliquer l'IAG qui nous souffle

$$\text{Somme de } 10 \text{ termes} \geq 10 \sqrt[10]{\text{Produit de ces } 10 \text{ termes}}$$

ce qui donne ici

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd &\geq 10 \sqrt[10]{a^2 \times b^2 \times c^2 \times d^2 \times ab \times ac \times ad \times bc \times bd \times cd} \\ &= 10 \sqrt[10]{(abcd)^5} = 10 \text{ vu que } abcd = 1 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5 Une première possibilité est de tout développer puis d'utiliser l'inégalité arithmético-géométrique sur les 8 termes obtenus :

$$\begin{aligned} (a+b)(b+c)(c+a) &= (ab + ac + b^2 + bc)(c+a) \\ &= a^2b + a^2c + ab^2 + abc + abc + ac^2 + b^2c + bc^2 \\ &\geq 8\sqrt[8]{a^2b \times a^2c \times ab^2 \times abc \times abc \times ac^2 \times b^2c \times bc^2} \\ &= 8\sqrt[8]{a^8b^8c^8} = 8abc \end{aligned}$$

Une autre solution, plus élégante, est d'appliquer l'IAG à chaque parenthèse du produit :

$$\begin{aligned} (a+b) &\geq 2\sqrt{ab} \\ (b+c) &\geq 2\sqrt{bc} \\ (c+a) &\geq 2\sqrt{ca} \end{aligned}$$

On observe alors que le produit de ces trois inégalités donne le résultat attendu.

Solution de l'exercice 6 L'application de l'IAG au membre de gauche fournit : $1+x^{2018} \geq 2\sqrt{1 \times x^{2018}} = 2x^{1009}$. Si nous voulons conclure à partir de cette minoration, il nous faudrait donc prouver que $2x^{1009} \geq \frac{(2x)^{2017}}{(1+x)^{2016}}$, c'est-à-dire $2x^{1009}(1+x)^{2016} \geq 2^{2017}x^{2017}$, ce qui se simplifie en

$$(1+x)^{2016} \geq 2^{2016}x^{1008}$$

Or ceci est vrai puisque d'après l'IAG, $1 + x \geq 2\sqrt{x}$, et on obtient ce qu'il faut en élevant cette dernière inégalité à la puissance 2016.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Une première solution consiste à tout passer du même côté, à multiplier par 2 puis à remarquer que l'inégalité cherchée est équivalente à

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$$

Sinon, pour conclure avec l'inégalité arithmético-géométrique, il nous faut « découper » notre membre de gauche en sommes de nombres dont le produit se simplifiera lorsqu'on appliquera l'IAG. En effet, pour obtenir par exemple le terme ab, on a appliqué l'IAG à $\frac{a^2+b^2}{2}$. En raisonnant de même avec les termes bc et ca, on trouve comment séparer le membre de gauche en trois pour appliquer l'IAG de la façon suivante :

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$$
$$\frac{b^2+c^2}{2} \geq bc$$
$$\frac{c^2+a^2}{2} \geq ca$$

La somme de ces trois inégalités donne alors le résultat.

Pour la seconde partie de l'exercice, on rappelle fort à propos que

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

Ainsi

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

ce qui vient d'être démontré.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Comme dans l'exercice précédent, on cherche un moyen de découper le membre de gauche en raisonnant sur les exposants du membre de droite, et on trouve

$$\frac{x^2+y^4}{2} \geq xy^2$$
$$\frac{y^4+z^6}{2} \geq y^2z^3$$
$$\frac{z^6+x^2}{2} \geq z^3x$$

Une fois encore, on achève la preuve en sommant les trois inégalités ci-dessus.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> On réfléchit à l'envers en regardant les exposants du membre de gauche pour deviner comment il va falloir découper le membre de droite. Le terme $\sqrt[3]{x}$ a forcément été obtenu à partir d'une IAG à trois termes. On pourrait donc écrire $x+1 = \frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1$, mais l'IAG conduirait alors à un degré 2 sur x. Le bon découpage est donc $x+1 = x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ et il s'ensuit que

$$x+1 = x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \geq 3\sqrt[3]{x \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$$

soit

$$(x+1)\frac{\sqrt[3]{4}}{3} \geq \sqrt[3]{x}$$

Ainsi, $k \geq \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$. Pour montrer que la constante $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ est minimale, il nous reste à trouver une valeur de x pour laquelle il y a égalité dans l'inégalité trouvée. Le cas d'égalité de l'IAG nous suggère alors de prendre $x = \frac{1}{2}$. En conclusion, $k^3 = \frac{4}{27}$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Il s'agit de minimiser la somme $x + 2y + 3z$ en exploitant la condition $x^3y^2z = 1$ grâce à l'IAG. Malheureusement, il n'y a pas de termes en x^3 ni en y^2 dans l'expression $x + 2y + 3z$. Il nous faut donc découper le terme x en trois termes, de telle sorte que l'application de l'IAG fasse apparaître un terme en x^3 qui devrait se simplifier grâce à l'hypothèse $x^3y^2z = 1$. De même, il nous faut séparer le terme $2y$ en deux pour obtenir un exposant deux et laisser le terme $3z$ tel quel car l'exposant 1 correspond déjà. Ainsi, on écrit

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + y + y + 3z \\ &\geq 6\sqrt[6]{\frac{1}{3}x \times \frac{1}{3}x \times \frac{1}{3}x \times y \times y \times 3z} \text{ d'après l'IAG} \\ &= 6\sqrt[6]{\frac{1}{9}x^3y^2z} = 6\sqrt[6]{\frac{1}{9}} \text{ car } x^3y^2z = 1 \end{aligned}$$

Attention, il faut encore vérifier que la valeur $6\sqrt[6]{\frac{1}{9}}$ peut être atteinte pour conclure qu'il s'agit du minimum! En effet, x, y et z étant positifs, on pourrait très bien dire sans trop de risque que $x + 2y + 3z \geq 0$, mais 0 n'est pas le minimum pour autant. Ici, en se rappelant du cas d'égalité de l'IAG, on vérifie aisément que prendre $\frac{1}{3}x = y = 3z = \sqrt[6]{\frac{1}{9}}$ convient et que par conséquent on a bien $m = 6\sqrt[6]{\frac{1}{9}}$, soit $m^3 = 72$.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> L'astuce est de faire apparaître les termes $x_0 - x_1, x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1} - x_n$ grâce à un télescopage sur le terme $x_0 - x_n$. De fait, on a :

$$x_0 - x_n = (x_0 - x_1) + (x_1 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_n)$$

de sorte que l'inégalité demandée est équivalente à

$$(x_0 - x_1) + (x_1 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_n) + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n$$

ou encore, en mettant chaque terme avec son inverse, à

$$\left(x_0 - x_1 + \frac{1}{x_0 - x_1}\right) + \left(x_1 - x_2 + \frac{1}{x_1 - x_2}\right) + \cdots + \left(x_{n-1} - x_n + \frac{1}{x_{n-1} - x_n}\right) \geq 2n$$

ce qui est vrai en appliquant le résultat de l'exercice 2 pour $x = x_0 - x_1, x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1} - x_n$.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> La difficulté de cet exercice est de réussir à exploiter la condition $\dfrac{1}{1 + x_1} + \cdots + \dfrac{1}{1 + x_n} = 1$, qu'on voit mal comment faire apparaître à partir du produit $x_1 \cdots x_n$. Pour y voir plus clair, posons donc $y_i = \frac{1}{1+x_i}$, de sorte que $y_1 + \ldots + y_n = 1$ (*), et reformulons le problème avec les y_i. Comme $x_i = \frac{1}{y_i} - 1$, l'inégalité à prouver se réécrit

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{y_i} - 1\right) \geq (n-1)^n$$

ou encore

$$\prod_{i=1}^{n}(1-y_i) \geq (n-1)^n \prod_{i=1}^{n} y_i$$

Par ailleurs, en utilisant (*) et l'IAG, on obtient

$$1-y_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y_j}$$

Le produit de cette inégalité pour i allant de 1 à n conduit finalement au résultat souhaité.

Solution de l'exercice 13 Il s'agit de découper judicieusement chaque parenthèse pour lui appliquer l'IAG :

$$\begin{aligned}
(1+a_2)^2 &\geq 2^2 \times a_2 \\
(1+a_3)^3 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+a_3\right)^3 &\geq 3^3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times a_3 \\
(1+a_4)^4 = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+a_4\right)^4 &\geq 4^4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times a_4 \\
&\cdots \\
(1+a_n)^n = \left(\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{n-1}+a_n\right)^n &\geq n^n \times \frac{1}{(n-1)^{n-1}} \times a_n
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à faire le produit de ces inégalités pour que l'exercice soit terminé.

2 mardi 22 après-midi : Rémi Lesbats

3 mercredi 23 après-midi : Wassim Trabelsi

Ce cours sur les polynômes est en intégralité repris de celui d'Igor Kortchemski à Montpellier en 2013, en page 151 du polycopié de ce stage qui se trouve ici.

5 Groupe C : géométrie

1 lundi 21 matin : Cécile Gachet

Ce cours propose une initiation à la géométrie projective réelle. Il ne contient pas d'exercices et ne se substitue en rien à la lecture d'un véritable cours, comme ceux que proposent les livres de Yaglom, *Geometric transformations*. Les lecteurs intéressés par la géométrie projective (réelle ou complexe) sont également encouragés à suivre les cours du club de mathématiques discrètes de Lyon.

Représentations géométriques. On cherche ici à résoudre un problème de géométrie $\mathcal{P}$ sur une figure F_1. L'idée est la suivante : F_1 n'est qu'une représentation géométrique du problème $\mathcal{P}$ parmi d'autres. Autrement dit, on peut d'une certaine manière trouver une transformation

t qui associe à F_1 une nouvelle figure $t(F_1)$, résoudre le problème $t(\mathcal{P})$ pour la représentation géométrique $t(F_1)$, puis en déduire par la transformation inverse de t la solution de $\mathcal{P}$ pour F_1.

Plan du cours. Le principe proposé est encore vague. Avant de l'appliquer, il faut donc essentiellement comprendre :

- ce que l'on entend par une transformation [1],
- ce en quoi différentes transformations diffèrent (en particulier ce en quoi une transformation peut Ãªtre meilleure qu'une autre pour traiter un problème donné),
- dans quelle mesure la transition d'une figure à une autre se fait bien (selon le résultat voulu et la transformation utilisée, sait-on bien traduire le problème de F_1 à F_2 et de F_2 à F_1 ?).

Transformations géométriques au quotidien. Pour passer d'une figure géométrique à une autre on peut par exemple :

- la décalquer, puis poser le calque à côté de la figure. On obtient deux figures « identiques », ou plus précisément isométriques. La transformation étudiée est une *isométrie*, c'est-à-dire qu'elle conserve les points, les droites, les longueurs, les angles [2].
- la photocopier avec un coefficient de réduction choisi. On obtient deux figures semblables. La transformation étudiée est une *similitude*, elle conserve les points, les droites, les rapports de longueurs, les angles.

Étude détaillée des similitudes. Le lecteur attentif aura sans doute remarqué que les similitudes étaient déjà connues à l'époque d'Euclide, contrairement aux photocopieuses ! Dès lors, comment transformer « naturellement »une figure F_1 en une figure semblable F_2 ?

L'idée en est inspirée par l'optique géométrique (voir figure 1) : on dessine F_1 avec une matière opaque sur un plan transparent. On place ensuite ce plan transparent parallèlement au sol, et on l'éclaire avec une lampe de poche. L'ombre projetée au sol dessine une figure F_2, qui est semblable à F_1.

1. à l'attention du lecteur géomètre : on considère ici, sauf mention contraire, une transformation géométrique comme une fonction t associant à une figure géométrique une autre figure et vérifiant un certain nombre de propriétés. Cependant, le fait que les espaces ambiants de départ et d'arrivée soient les mÃªmes à isomorphisme près (et donc qu'on puisse considérer t par son action au sein d'une figure donnée) n'est pas pris en compte.

2. On ne précise pas ici la distinction entre transformation directe et transformation indirecte, partant on ne considère que des transformations directes qui, si elles conservent les angles, conservent également les angles orientés.

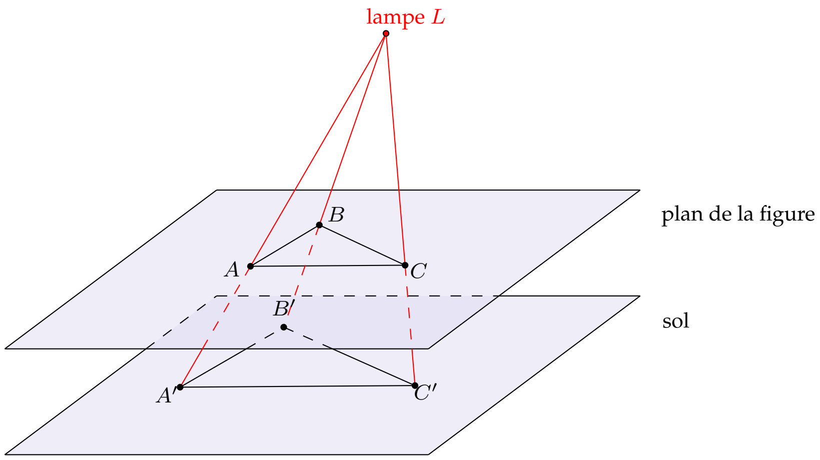


FIGURE 1 – Similitude.

Démonstration. Pour montrer que la transformation décrite est une similitude, on a trois points à examiner :

✓ un point est envoyé sur un point : un point A est envoyé sur l'intersection du plan du sol S et de la droite d_A reliant A et la lampe. Comme d_A n'est pas contenue dans S, ni parallèle à S (sinon elle serait parallèle au plan de la figure, mais elle passe par ce plan sans qu'il la contienne, donc elle n'est pas parallèle au plan S), d_A et S ont exactement un point d'intersection. L'image du point A par la similitude étant cette intersection, c'est donc bien un point.

✓ une droite est envoyée sur une droite : il s'agit d'un raisonnement analogue, reposant sur le fait que deux plans ni parallèles, ni confondus, se coupent en exactement une droite.

✓ les rapports de longueurs sont conservés : soit ABC un triangle de la figure F_1, $A'B'C'$ son image par la similitude. Traçons l'intersection de la figure 1 et du plan de L, A, C (voir figure 2). Comme (AC) et $(A'C')$ sont parallèles, d'après le théorème de Thalès, $\frac{LA}{LA'} = \frac{AC}{A'C'}$. On montre de mÃªme que $\frac{LA}{LA'} = \frac{AB}{A'B'}$. Dès lors, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, d'où $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$. Autrement dit, les rapports sont bien conservés d'une figure à l'autre.

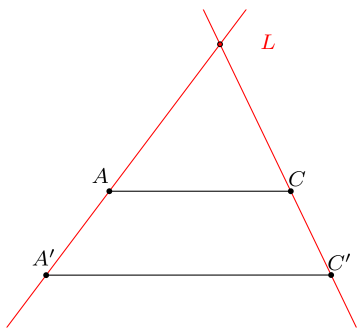


FIGURE 2 – Intersection de la figure 1 et du plan de L, A, C.

□

De l'imperfection intrinsèque des lampes de poche. La méthode qui vient d'Ãªtre exposée permet donc de recréer toutes les similitudes… Toutes ? Non ! Si on veut réduire la figure F_1, il faut placer le plan sur lequel on projette (le sol) entre la lampe et le plan de la figure : or, physiquement, il est impossible d'obtenir une image F_2 dans de telles conditions. Mais si la visualisation expérimentale est vouée à l'échec, rien n'empÃªche de garder le procédé mathématique : tracer des droites pour les rayons, les intersecter avec un plan pour les ombres…

Dans la suite, on va donc présenter diverses transformations géométriques en termes physiques (c'est-à-dire en parlant d'ombres). Certes, ces manipulations n'auront pas toujours de sens physique (certaines ombres peuvent ne pas exister), mais on pourra toujours leur donner un sens mathématique, et c'est ce à quoi on s'intéresse ici.

Bilan provisoire pour la recherche de transformations géométriques. On a déjà exhibé deux types de transformations géométriques : les isométries et les similitudes.

Malheureusement, ces transformations ne nous avancent pas beaucoup : pour résoudre un exercice de géométrie, on est souvent amené à tourner sa figure ou à en redessiner une plus grande, mais ce n'est pas en changeant ainsi de figure qu'on simplifie significativement le problème…

Une « bonne »transformation géométrique doit donc offrir plus de possibilités qu'une isométrie ou une similitude, c'est-à-dire avoir un plus grand nombre de degrés de liberté. Le *nombre de degrés de liberté* d'un certain type de transformation est, par définition, le plus grand entier n tel que, pour tous points $A_1, \ldots, A_n$ en configuration générale et $B_1, \ldots, B_n$ en configuration générale également, il existe une transformation du type voulu qui envoie A_1 sur B_1, A_2 sur $B_2, \ldots, A_n$ sur B_n. Par exemple, le nombre de degrés de liberté d'une isométrie est un, et le nombre de degrés de liberté d'une similitude est deux[3].

En contrepartie, si elles offrent plus de possibilités, les « bonnes »transformations conservent des propriétés plus faibles que les isométries et que les similitudes…

De nouveaux types de transformations. L'étude détaillée des similitudes nous a fourni un moyen de construire de façon analogue trois autres types de transformations ne demandant qu'à Ãªtre étudiés. En effet, l'idée générale est d'utiliser des rayons lumineux pour projeter une figure plane sur un autre plan. Pour construire une similitude, on a ajouté deux hypothèses :

- les rayons partent tous d'une mÃªme lampe,
- le plan de la figure et le plan de projection sont parallèles.

Cependant, trois autres cas de figures sont possibles, selon que les rayons partent tous d'une mÃªme lampe ou sont tous parallèles (ce qui revient à dire qu'ils partent tous d'une mÃªme lampe infiniment loin : c'est, en bonne approximation, le cas des rayons solaires), et selon que le plan de la figure et le plan de projection sont parallèles ou non. La disjonction de cas peut se résumer par le tableau suivant :

3. Ces résultats sont démontrés dans le paragraphe « Nombre de degrés de liberté d'une isométrie et d'une similitude ».

	plan de la figure parallèle au plan de projection	plan de la figure et plan de projection non parallèles
rayons issus d'une mÃªme lampe (à une distance finie)	similitude	projection centrale
rayons parallèles	isométrie	transformation affine

Étudions maintenant ces différents types de transformations.

Étude détaillée des isométries. On définit une isométrie de la façon suivante : on se donne deux plans distincts et parallèles $\mathcal{F}$ (pour la figure) et $\mathcal{S}$ (pour le sol), et une direction d qui n'est pas parallèle à $\mathcal{S}$ (pour la direction des rayons : voir figure 3). Pour tout $x \in \mathcal{F}$, on note d_x la parallèle à la droite d passant par x. Alors la transformation

$$\begin{aligned} i \;:\; \text{ensemble des parties de } \mathcal{F} &\longrightarrow \text{ensemble des parties de } \mathcal{S} \\ M &\longmapsto \{d_x \cap \mathcal{S} \,|\, x \in M\} \end{aligned}$$

est une isométrie.

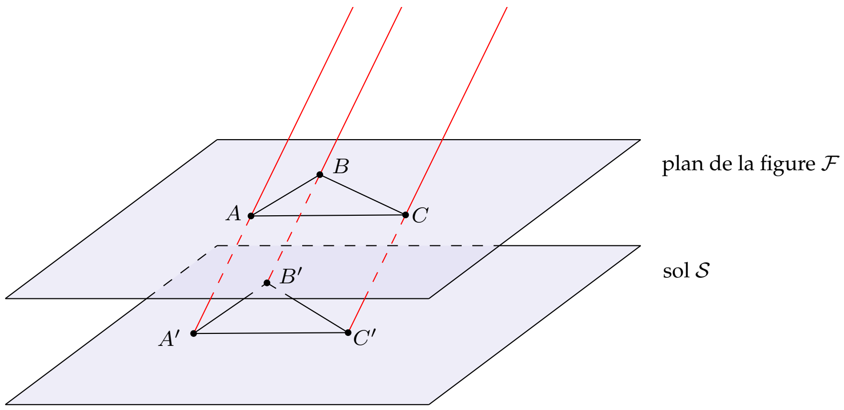


FIGURE 3 – Isométrie.

Démonstration. On a trois points à examiner :
- ✓ un point est envoyé sur un point (laissé au lecteur).
- ✓ une droite est envoyée sur une droite (laissé au lecteur).
- ✓ les longueurs sont conservées : soit A, B deux points de la figure F_1, A', B' leurs images par i. Dans le plan de A, B, A', B', $ABB'A'$ est un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles. Donc c'est un parallélogramme, donc $AB = A'B'$. Autrement dit, les longueurs sont bien conservées d'une figure à l'autre.

□

Nombre de degrés de liberté d'une isométrie et d'une similitude. On revient ici sur les résultats énoncés dans le paragraphe « Bilan provisoire pour la recherche de transformations géométriques » : une isométrie a exactement un degré de liberté et une similitude a exactement deux degrés de liberté.

Démonstration. On considère tout d'abord un type de transformation quelconque, dont on cherche à déterminer le nombre de degrés de liberté. En général, si pour un certain entier k on peut trouver des points $A_1, \dots, A_k$ en configuration générale et $B_1, \dots, B_k$ en configuration générale tels qu'aucune transformation du type voulu n'envoie A_1 sur $B_1, \dots, A_k$ sur B_k, alors ce type de transformations a un nombre de degrés de liberté strictement inférieur à k.

Ainsi, une isométrie permet toujours d'envoyer un point A_1 sur un point B_1 (prendre n'importe quels plans parallèles distincts et la direction de rayons (A_1B_1)), donc a au moins un degré de liberté. Mais on peut se donner des points A_1, A_2, B_1, B_2 tels que $A_1A_2 \neq B_1B_2$; alors on n'a pas d'isométrie envoyant A_1 sur B_1 et A_2 sur B_2, donc une isométrie a strictement moins de deux degrés de liberté. Une isométrie a donc bien un degré de liberté.

De façon analogue, si on se donne A_1, A_2 dans un plan, B_1, B_2 dans un autre, on place ces deux plans parallèlement l'un à l'autre de sorte que (A_1A_2) et (B_1B_2) soient coplanaires. Alors, les droites (A_1B_1) et (A_2B_2) sont ou sécantes, auquel cas on place une lampe à leur intersection, ou parallèles, auquel cas on se donne des rayons lumineux parallèles de direction (A_1B_1). Dans les deux cas, on construit bien une similitude qui envoie A_1 sur B_1 et A_2 sur B_2. Donc une similitude a au moins deux degrés de liberté. Mais on peut se donner des points $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ tels que $\frac{A_1A_2}{A_1A_3} \neq \frac{B_1B_2}{B_1B_3}$; alors on n'a pas de similitude envoyant A_1 sur B_1, A_2 sur B_2 et A_3 sur B_3. Donc une similitude a exactement deux degrés de liberté. $\square$

Étude détaillée des transformations affines. On définit une transformation affine de la façon suivante : on se donne deux plans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{S}$ sécants en une droite $\mathcal{D}$, et une direction d (voir figure 4). Pour tout $x \in \mathcal{F}$, on note d_x la parallèle à la droite d passant par x. Alors la transformation

$$\begin{aligned} a \ : \ \text{ensemble des parties de } \mathcal{F} &\longrightarrow \text{ensemble des parties de } \mathcal{S} \\ M &\longmapsto \{d_x \cap \mathcal{S} \mid x \in M\} \end{aligned}$$

est une transformation affine.

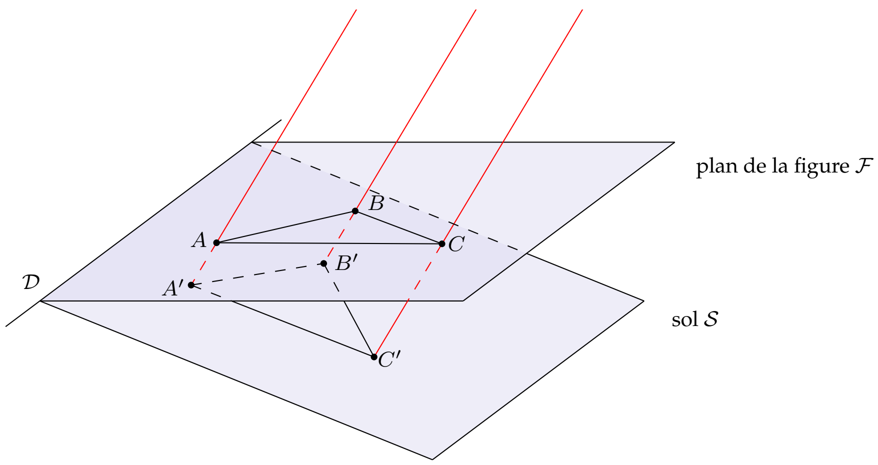


FIGURE 4 – Transformation affine.

Quelles sont les grandeurs conservées par une transformation affine ?

✓ un point est envoyé sur un point (preuve laissée au lecteur).

✓ une droite est envoyée sur une droite (preuve laissée au lecteur).

✓ une droite et son image sont ou parallèles à $\mathcal{D}$, ou sécantes, auquel cas elles se coupent sur $\mathcal{D}$ (preuve laissée au lecteur).

✓ deux droites parallèles sont envoyées sur deux droites parallèles : soit d_1, d_2 deux droites parallèles de $\mathcal{F}$. Soit A_1 un point de d_1, et $\mathcal{P}_1$ le plan contenant d_1 et d_{A_1}. En notant $\mathcal{P}_2$ le plan parallèle à $\mathcal{P}_1$ contenant d_2, on a $a(d_1) = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{S}$ et $a(d_2) = \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{S}$. Comme $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles, $a(d_1)$ et $a(d_2)$ sont parallèles.

✓ si A, B, C sont trois points alignés, $\frac{AC}{BC}$ est conservé par a : soit d_1 la droite contenant A, B, C. On note A', B', C', d_1' les images de A, B, C, d_1 par a. Si d_1 et $a(d_1)$ sont parallèles, $CBB'C'$ et $ACC'A'$ sont des parallélogrammes, donc $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$, et a fortiori $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$. Sinon, soit $Z = d_1 \cap d_1'$. L'intersection de la figure 4 et du plan de d_1, d_1' est représentée sur la figure 5. Comme $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles, d'après le théorème de Thalès, $\frac{AC}{A'C'} = \frac{ZC}{ZC'} = \frac{BC}{B'C'}$, d'où $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$. Dans tous les cas, les rapports de longueurs sont donc conservés.

✓ si $[AB]$ et $[CD]$ sont deux segments parallèles de $\mathcal{F}$, le rapport $\frac{AB}{CD}$ est conservé par a (conséquence des deux points précédents).

✗ en revanche, une transformation affine ne conserve en général pas les rapports de longueur.

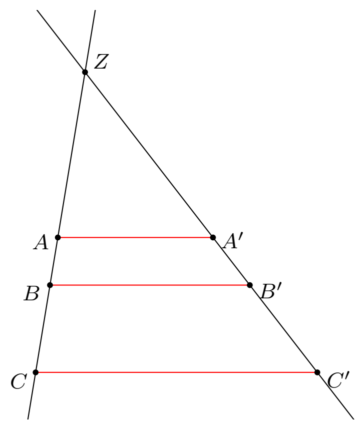


FIGURE 5 – Intersection de la figure 4 et du plan de d_1, d_1'.

Une transformation affine a exactement trois degrés de liberté (admis).

Exercice d'application. Redémontrons à l'aide des transformations affines le résultat de géométrie du triangle suivant : dans un triangle ABC, si M_A est le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle, $\frac{AG}{GM_A} = 2$.

Démonstration. Comme une transformation affine a trois degrés de liberté, on peut considérer a une transformation affine qui envoie ABC sur un triangle équilatéral $A'B'C'$. Alors, comme les rapports de longueur sur un segment sont conservés, M_A est envoyé sur le milieu de $[B'C']$ qu'on note $M_{A'}$, M_B sur $M_{B'}$, M_C sur $M_{C'}$ et G sur G' (voir figure 6). De mÃªme, le rapport $\frac{AG}{GM_A}$ est conservé.

Par symétrie, $A'G' = B'G' = C'G'$ et $M_{A'}G' = M_{B'}G' = M_{C'}G'$. Comme $A'B'C'$ est équilatéral, la médiane et la bissectrice issues de A' sont confondues, et la médiane et la hauteur issues de C' aussi.

Donc $\frac{AG}{GM_A} = \frac{A'G'}{G'M_{A'}} = \frac{A'G'}{G'M_{C'}} = \frac{1}{\sin(30^\circ)} = 2$.

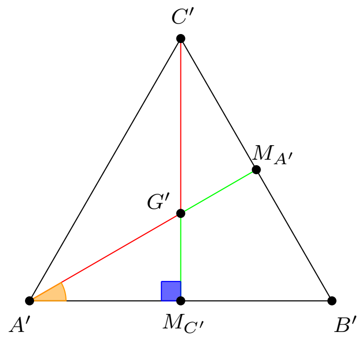


FIGURE 6 – Triangle équilatéral $A'B'C'$ obtenu après transformation affine.

□

Étude détaillée des projections centrales. On définit une projection centrale de la façon suivante : on se donne deux plans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{S}$ sécants en une droite $\mathcal{D}$, et un point L (voir figure 7). Alors la transformation

$$\begin{aligned} p \ : \ \text{ensemble des parties de } \mathcal{F} &\longrightarrow \text{ensemble des parties de } \mathcal{S} \\ M &\longmapsto \{(XL) \cap \mathcal{S} \mid X \in M\} \end{aligned}$$

est une projection centrale.

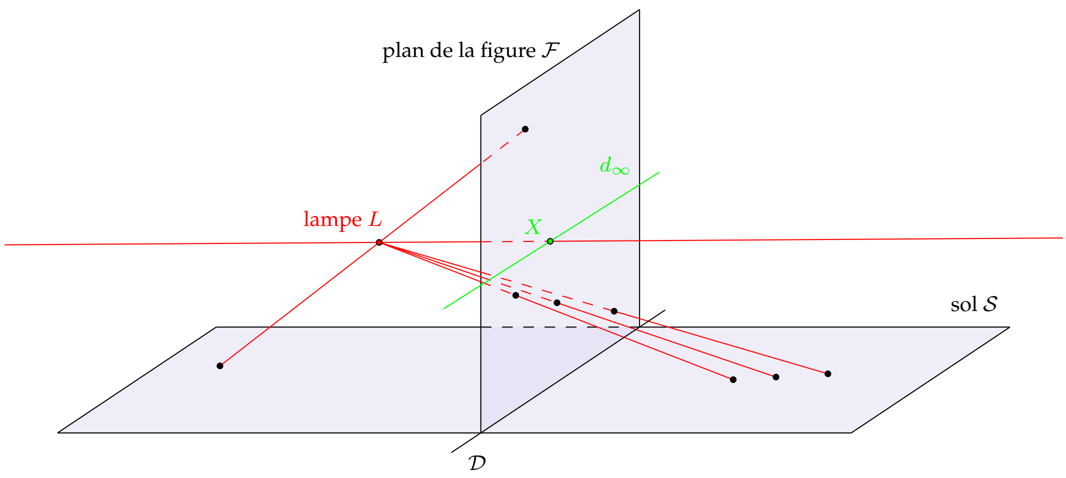


FIGURE 7 – Projection centrale.

On étudie maintenant les grandeurs conservées par une projection centrale.

Droite à l'infini. Tout d'abord, un point est-il envoyé sur un point ? A priori, cette propriété tombe en défaut : sur la figure 7, par exemple, la droite (XL) et le plan $\mathcal{S}$ sont parallèles, donc $p(X) = \varnothing$.

Mais, intuitivement, que de passe-t-il si on considère un point de la figure Y un peu en dessous de X, et qu'on le rapproche insensiblement de X ? La droite (YL) existe à chaque instant, et elle a toujours un point d'intersection avec le plan $\mathcal{S}$. Mais plus Y s'approche de X, plus les pentes de (YL) et du plan $\mathcal{S}$ sont proches, donc plus leur point d'intersection s'éloigne dans la direction de (YL). Ainsi, on peut dire que, d'une certaine manière, (XL) et $\mathcal{S}$ ont un point d'intersection, mais que ce point d'intersection est à l'infini [4] ...

Plus généralement, p envoie tous les points de la droite d_∞ à l'infini [5]. On peut donc considérer le plan $\mathcal{S}$ complété par une droite à l'infini $\infty_\mathcal{S}$: on parle alors du *plan projectif* $\mathcal{S}$. Ainsi, si on définit une projection centrale comme une fonction

$$\begin{aligned} p \,:\, \text{ensemble des parties de } \mathcal{F} \cup \infty_\mathcal{F} &\longrightarrow \text{ensemble des parties de } \mathcal{S} \cup \infty_\mathcal{S} \\ M &\longmapsto \{(XL) \cap \mathcal{S} \mid X \in M\}, \end{aligned}$$

un point est finalement toujours envoyé sur un point.

Avec cette nouvelle définition, une droite est toujours envoyée sur une droite (éventuellement sur la droite à l'infini). De plus, une projection centrale a exactement quatre degrés de liberté (admis).

Bilan provisoire pour l'étude des projections centrales. Pour l'instant, on sait qu'une projection centrale est une transformation qui envoie un plan projectif sur un autre plan projectif, en envoyant les points sur des points et les droites sur des droites. Elle conserve donc le fait que des points soient alignés et que des droites soient concourantes.

Ainsi, un énoncé qui ne concerne que des positions relatives de points et de droites peut Ãªtre ramené à un énoncé équivalent mais d'apparence plus simple par une projection (on peut par exemple envoyer quatre points de la figure sur les sommets d'un carré [6], envoyer une droite sur la droite à l'infini,...). De cette manière, une projection centrale judicieusement choisie permet de rendre la figure étudiée plus « régulière », et donc de simplifier certaines démonstrations.

Cependant, il faut se garder des simplifications abusives : en appliquant une projection centrale à une figure déjà assez « régulière », on perd beaucoup d'information ! En effet, une projection centrale ne conserve en général ni les longueurs, ni les rapports de longueurs (mÃªme pour des points alignés). Elle n'a notamment aucune raison d'envoyer un carré sur un carré [7]. En l'état actuel de nos connaissances, appliquer une projection centrale est donc une opération hautement incertaine, qui demande un minimum de prudence. Mais la théorie des projections centrales reste puissante, comme l'illustre la démonstration ci-dessous.

Théorème de Pappus. On prouve dans ce paragraphe un premier résultat de géométrie projective. Soit g, h deux droites, A, C, E trois points sur g et B, D, F trois points sur h. Les points $(AB) \cap (DE)$, $(BC) \cap (EF)$ et $(CD) \cap (FA)$ sont alignés (voir figure 8).

4. Dans la direction de (XL).
5. Mais tous dans des directions différentes !
6. Puisqu'on a quatre degrés de liberté.
7. Puisqu'elle peut envoyer n'importe quoi sur un carré, elle peut aussi envoyer un carré sur n'importe quoi !

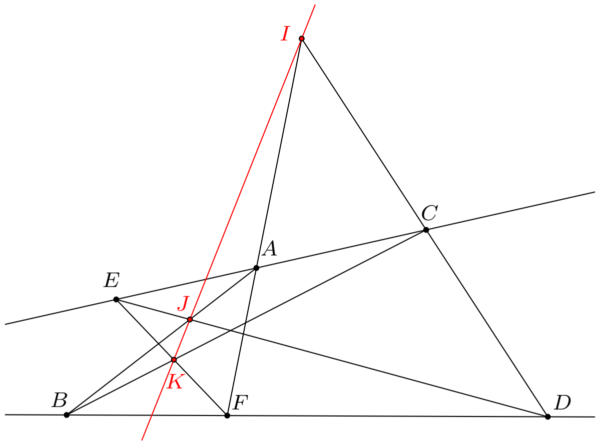


FIGURE 8 – Théorème de Pappus.

Démonstration. Soit $I = (FA) \cap (CD), J = (AB) \cap (DE), K = (BC) \cap (EF)$. Soit p la projection centrale qui envoie la droite (IJ) sur la droite à l'infini (voir figure 9). Pour tout point X, on abrège $p(X)$ en X'. Comme p conserve l'alignement, il suffit de montrer que I', J', K' sont alignés, c'est-à-dire que K' est sur la droite à l'infini, ce qui revient à dire que $(B'C')$ et $(E'F')$ sont parallèles. Or, I' (respectivement J') étant sur la droite à l'infini, $(F'A')$ et $(C'D')$ (respectivement $(A'B')$ et $(D'E')$) sont parallèles.

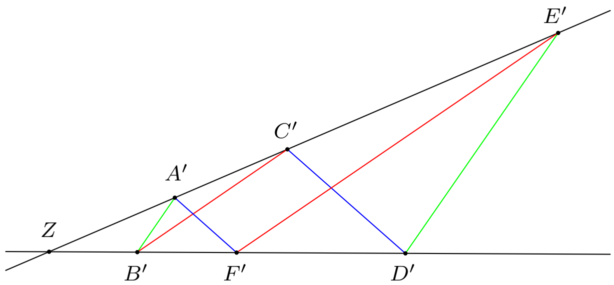


FIGURE 9 – Théorème de Pappus après la projection p.

Soit $Z = g' \cap h'$. D'après le théorème de Thalès, $\frac{ZA'}{ZC'} = \frac{ZF'}{ZD'}$ et $\frac{ZB'}{ZD'} = \frac{ZA'}{ZE'}$. Donc $\frac{ZB'}{ZC'} = \frac{ZF'}{ZE'}$, d'où $\frac{ZB'}{ZF'} = \frac{ZC'}{ZE'}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(B'C')$ et $(E'F')$ sont donc bien parallèles. $\square$

Ce théorème est très intéressant, pour au moins une raison [8] : c'est un cas particulier d'un théorème plus général, le théorème de Pascal. Ce théorème porte sur les coniques, c'est-à-dire la famille de courbes géométriques [9] :

- ▷ constituée des cercles, des ellipses, des paraboles, des hyperboles et des paires de droites ;
- ▷ obtenues un intersectant un cône plein de révolution avec un plan ;
- ▷ qui peuvent s'écrire en coordonnées cartésiennes sous la forme $\{(x, y) \mid ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0\}$ pour des réels a, b, c, d, e, f non tous nuls.

8. un deuxième point intéressant (pour le lecteur algébriste familier avec les espaces projectifs sur un corps quelconque) est que le théorème de Pappus est vrai sur $\mathbb{KP}^n$ si et seulement si le corps $\mathbb{K}$ est commutatif.
9. prenez votre définition préférée

Voici son énoncé :

Théorème de Pascal *On se place dans le plan projectif. Soit $\mathcal{C}$ une conique. Soient A, B, C, D, E cinq points de $\mathcal{C}$, F un point. Soit I le point d'intersection de (AB) et (DE), J le point d'intersection de (BC) et (EF), K le point d'intersection de (CD) et (FA). Alors les points I, J, K sont alignés si et seulement si F est sur $\mathcal{C}$.*

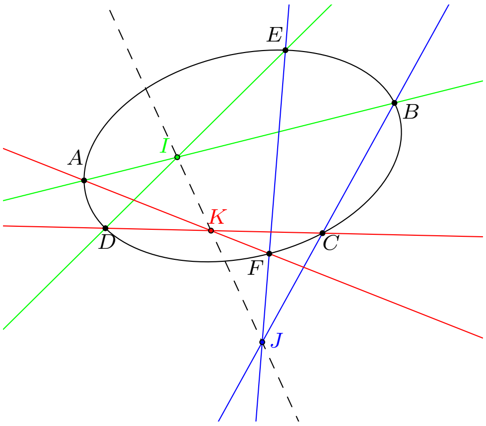


FIG 7.— Théorème de Pascal sur une ellipse

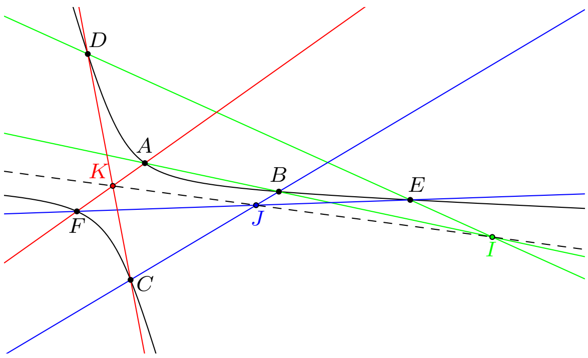


FIG 8.— Théorème de Pascal sur une hyperbole

Birapport de quatre points alignés, de quatre droites concourantes. On a déjà mentionné le fait qu'une projection centrale ne conserve pas les rapports de longueurs entre trois points alignés. Elle conserve cependant une grandeur analogue définie pour quatre points alignés, et c'est ce qu'on étudie dans ce paragraphe.

Faisons tout d'abord un point sur la notion de longueur algébrique et sur les rapports de longueur Trois points alignés, reliés par la donnée d'un rapport de longueur, sont difficiles à visualiser. Il y a deux principales raisons à cela :

1. Le rapport ne détermine pas de façon unique la position relative de nos trois points (voir figure 10).

FIGURE 10 – Deux façons de placer A, B, C tels que $\frac{BC}{AB} = 2$.

Pour y remédier, on introduit les longueurs algébriques : à chaque droite, on associe un sens de lecture (traditionnellement de la gauche vers la droite), et la longueur d'un segment sur la droite est comptée positivement si le segment se lit dans le sens de lecture choisi, négativement sinon. La longueur algébrique du segment $[AB]$ est notée $\overline{AB}$. Par exemple, sur la figure 10, on a à gauche $\overline{AB} = 1$ et $\overline{BC} = 2$, et à droite $\overline{AB} = 1$ et $\overline{BC} = -2$. Donc les rapports de longueur algébriques ne sont pas conservés d'une figure à l'autre.

On a montré auparavant que les similitudes, les transformations affines conservent les rapports. En fait, on peut montrer un résultat un peu plus fort : les similitudes et les transformations affines conservent les rapports de longueurs *algébriques* sur un segment.

2. On n'imagine pas facilement ce que signifie la donnée d'un rapport comme $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \pi$, géométriquement parlant... Une des rares identités de rapport à laquelle on puisse donner un sens est $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = -1$; elle indique que C est le milieu de $[AB]$.

On peut maintenant définir la mystérieuse quantité conservée par les transformations projectives. Soit A, B, C, D quatre points distincts alignés. On définit leur birapport $\mathscr{b}_{ABCD}$ par la formule :

$$\mathscr{b}_{ABCD} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}.$$

10

Avec cette définition, on peut déjà relever un certain nombre de formules pour le birapport de quatre points alignés A, B, C, D qu'on permute ; la démonstration est laissée en exercice :

$$\mathscr{b}_{ABCD} = 1/\mathscr{b}_{BACD} = \mathscr{b}_{CDAB} = 1 - \mathscr{b}_{ACBD}.$$

Enfin, de mÃªme que trois points alignés formant un rapport égal à -1 sont plus simple à visualiser, on distingue une configuration de quatre points alignés particulièrement naturelle : quatre points alignés A, B, C, D sont dits *harmoniques* si $\mathscr{b}_{ABCD} = -1$. Par exemple, si $[AB]$ est un segment de milieu M, et ∞ le point à l'infini de la droite (AB), A, B, M, ∞ sont harmoniques. On a mÃªme le :

Lemme 2/3. Soit $ABCD$ quatre points alignés. Si deux des propositions suivantes sont vraies, la troisième est vraie :

- ▷ $ABCD$ sont harmoniques ;
- ▷ C est le milieu de $[AB]$;
- ▷ D est le point à l'infini de la droite (AB).

Montrons maintenant qu'une projection centrale conserve le birapport. On passe pour cela par le résultat intermédiaire suivant.

Proposition. Pour a, b, c, d un faisceau de quatre droites passant par un point Z, on définit leur birapport par :

$$\mathscr{b}_{abcd} = \frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)} \cdot \frac{\sin(b,d)}{\sin(a,d)},$$

où les angles sont orientés. Si A, B, C, D sont quatre points alignés autres que Z et pris sur a, b, c, d respectivement, alors $\mathscr{b}_{ABCD} = \mathscr{b}_{abcd}$.

10. La convention selon laquelle, pour A, B, ∞ trois points alignés dont un à l'infini, $\frac{A\infty}{B\infty} = 1$, permet bien de définir le birapport dans un plan projectif.

On remarque que cette proposition est très puissante : elle permet, en reliant des points et en projetant des droites, de calculer de nombreux birapports sur une figure.

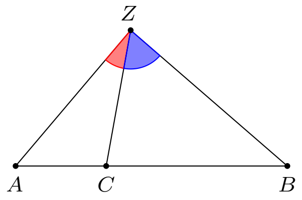


FIGURE 11 – Lemme magique.

Lemme magique. Soit A, B, C trois points alignés, Z un quatrième point hors de la droite (AB) (voir figure 11). Alors

$$\begin{aligned}\frac{AC}{BC} &= \frac{\text{aire de } ZAC}{\text{aire de } ZBC} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\sin(\widehat{AZC}) \cdot ZA \cdot ZC}{\frac{1}{2}\sin(\widehat{BZC}) \cdot ZB \cdot ZC} \\ &= \frac{ZA\sin(\widehat{AZC})}{ZB\sin(\widehat{BZC})}.\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où C est le pied de la bissectrice de $\widehat{AZB}$, on retrouve un résultat connu sous le nom de **théorème de la bissectrice**, et utile en géométrie euclidienne olympique.

Soit maintenant A, B, C, D quatre points alignés, p une projection centrale et A', B', C', D' les images respectives de A, B, C, D par p. Soit L le centre de p. D'après le lemme magique,

$$\begin{aligned}b_{ABCD} &= \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} \\ &= \frac{LA\sin(\widehat{ALC})}{LB\sin(\widehat{BLC})} \cdot \frac{LB\sin(\widehat{BLD})}{LA\sin(\widehat{ALD})} \\ &= \frac{\sin(\widehat{ALC})\sin(\widehat{BLD})}{\sin(\widehat{BLC})\sin(\widehat{ALD})} \\ &= \frac{\sin(\widehat{A'LC'})\sin(\widehat{B'LD'})}{\sin(\widehat{B'LC'})\sin(\widehat{A'LD'})} \\ &= b_{A'B'C'D'}.\end{aligned}$$

On a donc bien montré que p conserve le birapport.

Un dernier mot sur cette preuve : la définition donnée du birapport de quatre droites concourantes nous permet de définir quatre droites harmoniques, par analogie avec les points. On peut alors montrer (exercice laissé au lecteur) le :

Lemme 2/4. Soit a, b, c, d quatre droites concourantes. Si deux des propositions suivantes sont vérifiées, les quatre propositions sont vérifiées.

- ▷ a, b, c, d sont harmoniques ;

- ▷ c est une bissectrice de l'angle a, b ;
- ▷ d est une bissectrice de l'angle a, b ;
- ▷ c, d sont perpendiculaires.

Étudions encore une configuration donnant des points harmoniques.

Théorème du quadrilatère complet. Soit a, b, c, d quatre droites formant un quadrilatère complet. Ce quadrilatère a trois diagonales

$$\begin{aligned} e &\text{ reliant } a \cap b \text{ et } c \cap d, \\ f &\text{ reliant } a \cap c \text{ et } b \cap d, \\ g &\text{ reliant } a \cap d \text{ et } c \cap b. \end{aligned}$$

Alors les points $e \cap a, e \cap b, e \cap f, e \cap g$ sont harmoniques.

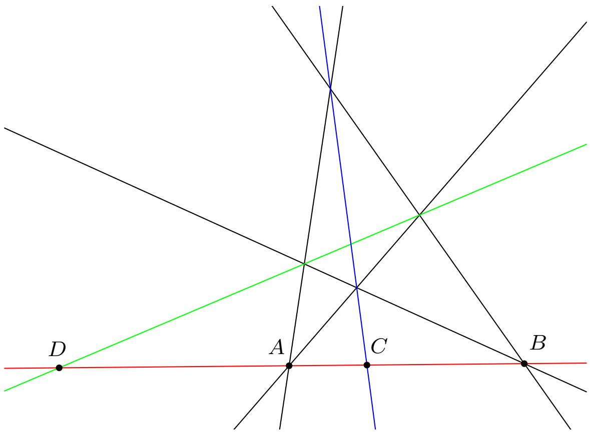


FIGURE 12 – Théorème du quadrilatère complet

Démonstration. Une projection centrale a quatre degrés de libertés. Il existe donc une projection centrale p qui envoie a, b, c sur un triangle [11] équilatéral et d sur la droite à l'infini.

On constate que

$$\begin{aligned} p(e) &\text{ est la parallèle à } c \text{ passant par } a \cap b, \\ p(f) &\text{ est la parallèle à } b \text{ passant par } a \cap c, \\ p(g) &\text{ est la parallèle à } a \text{ passant par } c \cap b, \end{aligned}$$

De plus, $p(B)$ est à l'infini, et d'après le théorème de la droite des milieux dans le grand triangle équilatéral, $p(A)$ est le milieu du segment d'extrémités $p(C)$ et $p(D)$.

Comme p conserve le birapport,

$$\begin{aligned} b_{ABCD} &= b_{p(A)p(B)p(C)p(D)} \\ &= b_{p(C)p(D)p(A)p(B)} \\ &= -1. \end{aligned}$$

□

11. En toute rigueur, sur un trilatère.

Ce théorème permet de tracer le milieu d'un segment $[AB]$ en utilisant uniquement une règle à bords parallèles.

Analysons la situation. D'après le théorème du quadrilatère complet, il suffit de construire a, b, c, d quatre droites telles que $a \cap b = A$, $c \cap d = B$ pour trouver quatre points harmoniques dont A et B sur la droite (AB). De ces quatre points, on veut que l'un soit le milieu de $[AB]$. Mais cela revient à imposer que le quatrième point soit à l'infini, c'est-à-dire que l'une des diagonales du quadrilatère soit parallèle à (AB).

Finalement, on procède à l'envers (voir figure 13).

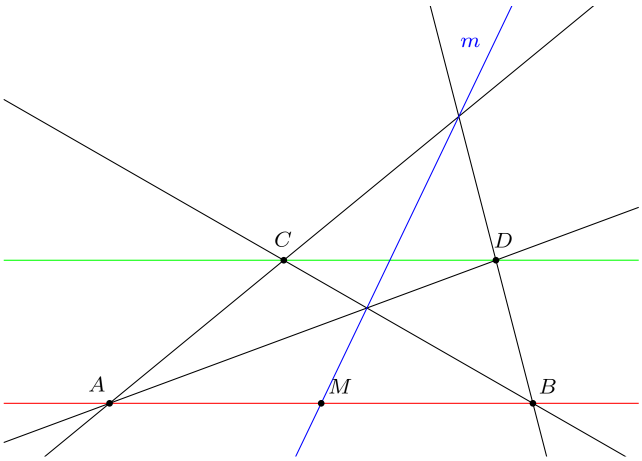


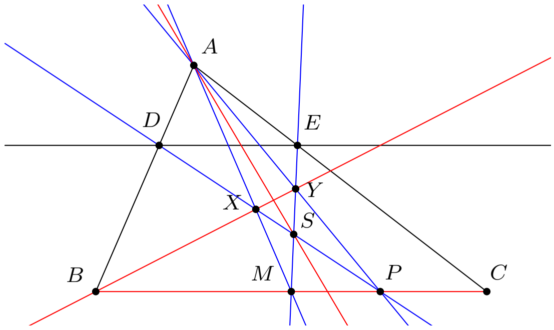
FIGURE 13 – Tracé du milieu M de $[AB]$.

On trace un segment $[CD]$ parallèle à (AB). Les droites $(AC), (BD), (AD), (BC)$ forment un quadrilatère complet, dont les diagonales sont $(AB), (CD)$ et la droite reliant $(AD) \cap (BC)$ et $(AC) \cap (BD)$ (notons-la m). D'après le théorème du quadrilatère complet, $A, B, (AB) \cap (CD), (AB) \cap m$ sont harmoniques. Or $(AB) \cap (CD)$ est à l'infini, donc $(AB) \cap m$ est le milieu de $[AB]$.

Transformations projectives entre un ensemble de points alignés et un faisceau de droites Présentons encore un principe de démonstration projectif puissant. Dans ce paragraphe, on appelle une transformation projective une application d'un ensemble de points alignés ou d'un faisceau de droites dans un ensemble de points alignés ou un faisceau de droites qui conserve le birapport. D'après ce qui précède, relier quatre points alignés à un mÃªme cinquième, ou encore intersecter quatre droites concourantes avec une cinquième sont des exemples de transformations projectives.

On a un résultat très intéressant : deux transformations projectives qui coÃ¯ncident en trois éléments sont identiques. On le laisse en exercice, l'idée importante est que trois points et un birapport fixé suffisent à déterminer uniquement un quatrième point.

Application : un exercice de géométrie projective Montrons le résultat suivant : soit ABC un triangle, M le milieu de $[BC]$, D un point de $[AB]$ et E un point de $[AC]$ tels que (DE) parallèle à (BC). Soit P un point quelconque de $[BC]$ et $X = (AM) \cap (DP)$, $Y = (EM) \cap (AP)$. Alors B, X, Y alignés.

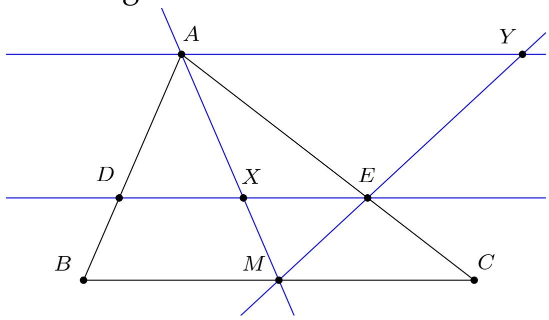


On propose deux preuves de ce résultat.
Première preuve : on veut en fait montrer que B est sur la diagonale (XY) du quadrilatère complet $(AP),(AM),(ME),(MD)$; d'après le théorème du quadrilatère complet, si on note $S=(DP)\cap(EM)$, il suffit de montrer que $b_{B(AS)\cap(BC)PM}=-1$. Or :

$$b_{B(AS)\cap(BC)PM}=b_{(SB)(SA)(SP)(SM)}=b_{BAD(EM)\cap(AB)}=b_{(EB)(EA)(ED)(EM)}=b_{BA\infty M}=-1.$$

Seconde preuve : l'application $P\mapsto(AP)\mapsto X\mapsto(CX)$ qui consiste à relier à A, intersecter avec (EM) et relier avec C est une transformation projective. De façon analogue, on a $P\mapsto(CY)$ une transformation projective. Montrons que ces deux transformations coÃ¯ncident pour trois choix judicieux de P pour conclure.

- ▷ pour $P=B$: $X=(EM)\cap(BC)$ et $Y=C$ donc c'est bon ;
- ▷ pour $P=M$: $X=Y=M$, ce qui convient ;
- ▷ pour P à l'infini : on obtient la figure suivante :

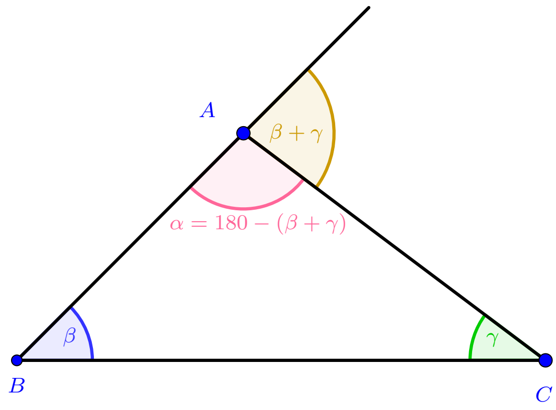


D'après le théorème du quadrilatère complet dans le quadrilatère bleu, si on note B' l'intersection de (XY) et de (BC), on a $B'CM\infty$ harmoniques. Or $BCM\infty$ sont aussi harmoniques. Donc $B=B'$.

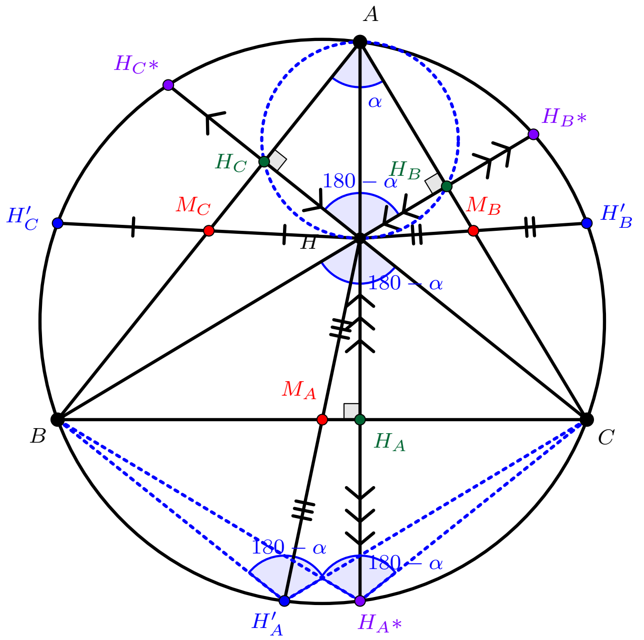
2 mardi 22 matin : Linda Gutsche

Les éléments du cours

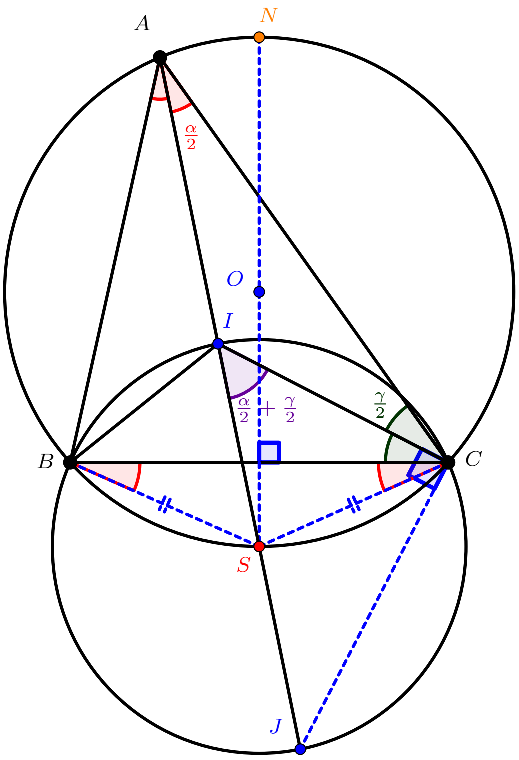
(Ces théorèmes et leurs preuves sont disponibles dans le polycopié immarcescible de Thomas Budzinski.
La configuration de l'angle sur le triangle



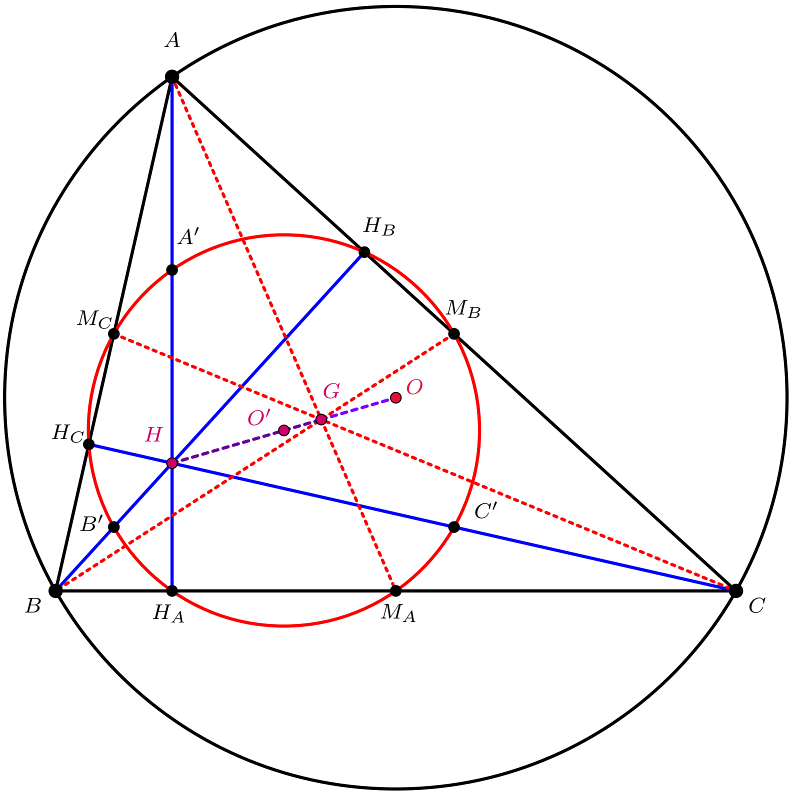
Les symétrique de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés et au milieux des côtés sont sur le cercle circonscrit



Le théorème du pôle sud

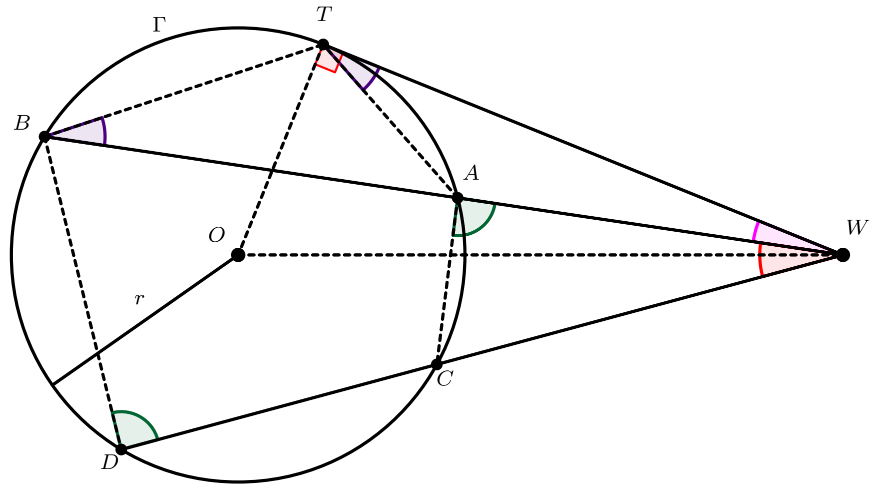


Le cercle d'Euler

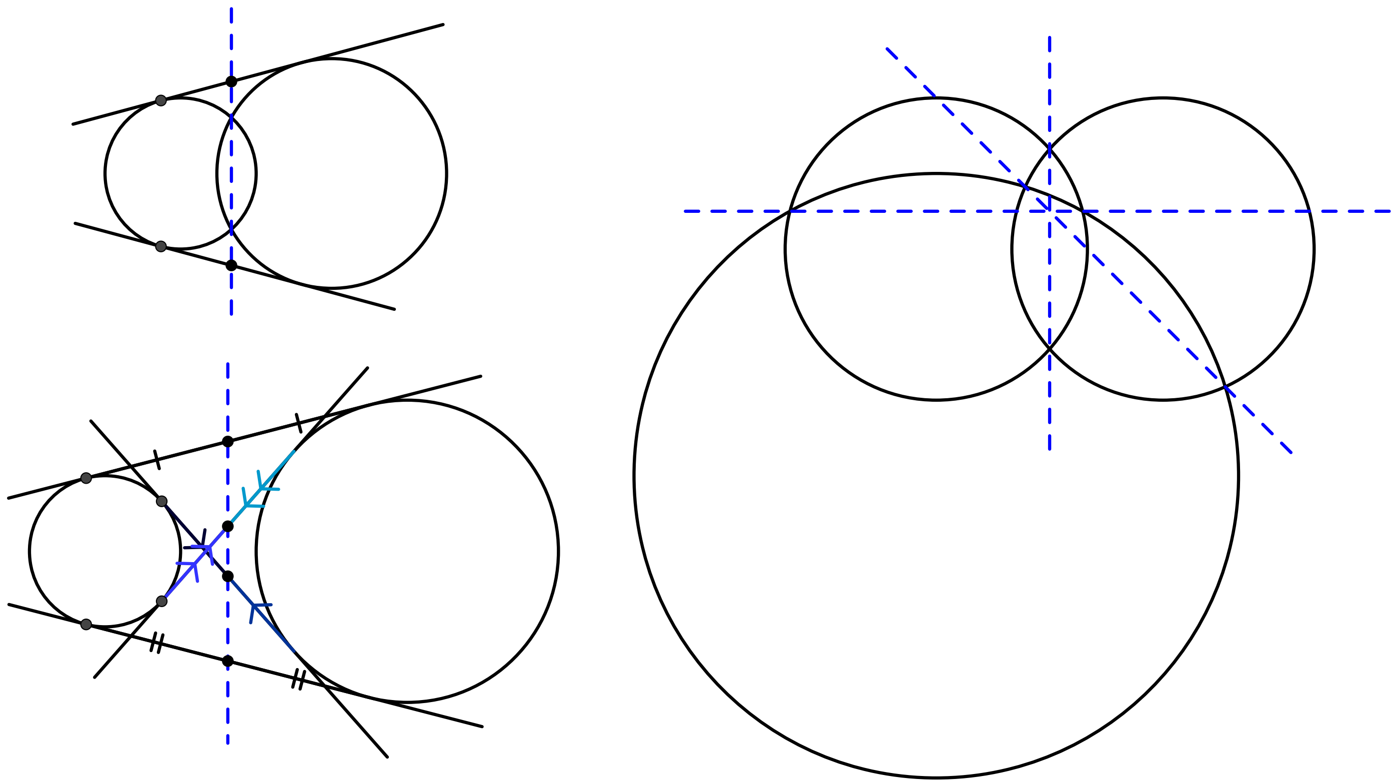


La Puissance d'un point par rapport à un cercle

$P_\Gamma(W) = WA \times WB = WC \times WD = WT^2 = WO^2 - r^2$



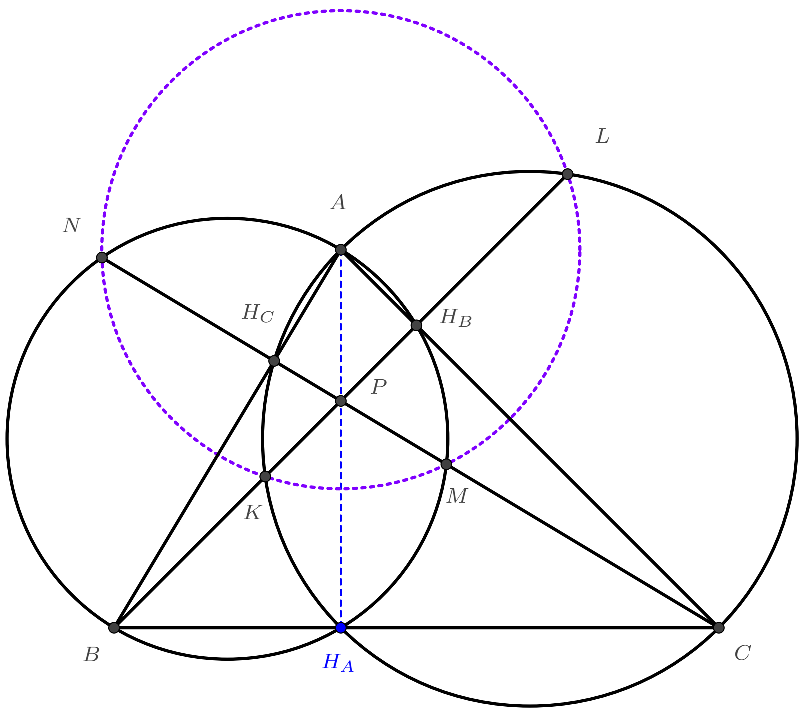
Les axes radicaux



Exercice 1 Soit ABC un triangle aigu. La hauteur issue de B dans ABC intersecte le cercle de diamètre (AC) en K et L, et la hauteur issue de C dans ABC intersecte le cercle de diamètre (AB) en M et N. Montrer que K, L, M et N sont cocycliques.

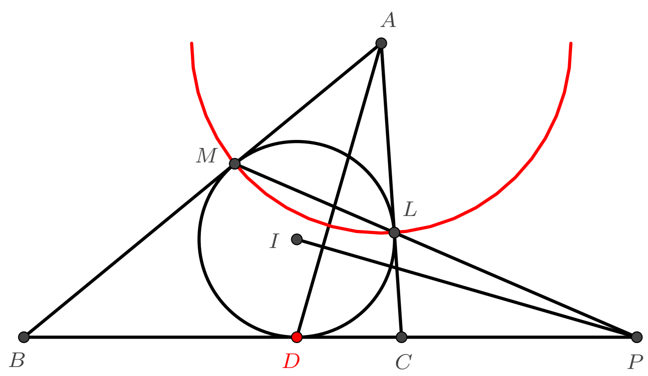
Exercice 2 Soit ABC un triangle, et I le centre de son cercle inscrit. Soit D, L, et M les points de tangence du cercle inscrit avec (BD), (AC), (AB). Soit P l'intersection de (ML) et (BC). Montrer que $(AD) \perp (IP)$.

Solution de l'exercice 1



Soit H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C dans ABC. Soit C_C le cercle de diamètre $[AB]$ et C_B le cercle de diamètre $[AC]$ Soit P l'orthocentre de ABC. Comme $\widehat{BH_AA}$ et $\widehat{CH_AA}$ sont des angles droits, C_C et C_B passent par H_A. P est donc sur l'axe radical de ces deux cercles. Donc $P_{C_C}(P) = P_{C_B}(P)$. Donc $PK \times PL = PM \times PN$. Donc K, L, M et N sont cocycliques.

<u>Solution de l'exercice 2</u>



Comme M et L sont les points de tangence de (AB) et (AC) avec le cercle inscrit, $AM =$

AL. Donc il existe un cercle de centre A passant par M et L. Soit Γ ce cercle. Par puissance de P par rapport au cercle inscrit, $PD = PL \times PM$. Donc P a même puissance par rapport au cercle Γ et au cercle étant le point D. Donc P est sur l'axe radical de D et Γ.

La puissance de I par rapport à D est D^2. Or $(IL) \perp (AL)$ car (AL) tangente au cercle inscrit. Donc (IL) est tangente à Γ. Donc la puissance de I par rapport à Γ est IL^2. Mais I est centre d'un cercle passant par D et L. Donc $ID^2 = IL^2$. Donc I a même puissance par rapport à D et Γ. Donc I est sur l'axe radical de D et Γ.

Donc (IP) est l'axe radical de D et de Γ. Or l'axe radical de deux cercles est perpendiculaire à la droite reliant les deux centre des cercles. Donc $(AD) \perp (IP)$.

3 mercredi 23 matin : Thomas Budzinski

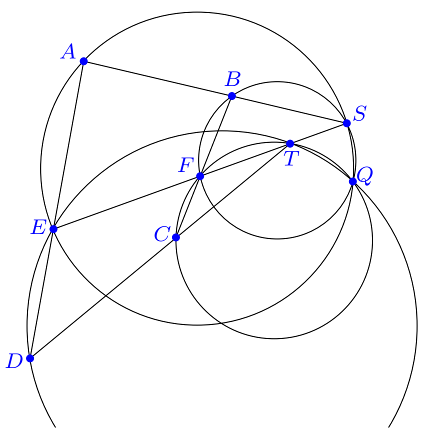
Nous avons principalement parlé de similitudes directes. Le cours est essentiellement la partie 4 du cours sur les transformations géométriques, disponible sur le site d'Animath.

Voici les exercices traités en cours.

Exercice 1 Soit $ABCD$ un quadrilatère, E et F sur $[AD]$ et $[BC]$ respectivement tels que $AE/ED = BF/FC$. Soit $S = (EF) \cap (AB)$ et $T = (EF) \cap (CD)$.

Montrer que les cercles circonscrits aux triangles SAE, SBF, TCF et TDE sont concourants.

Solution de l'exercice 1

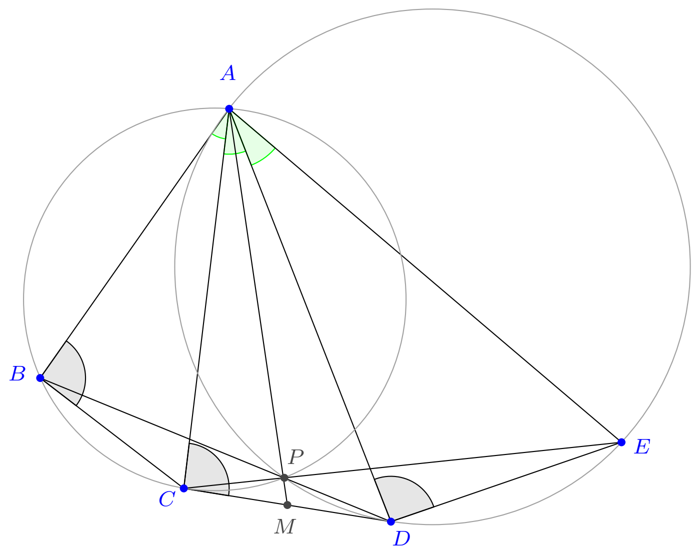


D'après l'égalité sur les rapports de longueur, la similitude directe envoyant A sur B et D sur C envoie également E sur F. En utilisant la construction habituelle pour les couples de points $(E, D) \mapsto (F, C)$, on obtient que son centre est sur les cercles circonscrits à TCF et TDE. En l'utilisant sur les couples de points $(A, E) \mapsto (B, F)$, ce centre est également sur les cercles circonscrits à SAE et SBF. D'où la conclusion.

Exercice 2 Soit $ABCDE$ un pentagone convexe vérifiant les relations $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{DCA} = \widehat{EDA}$. Soit $P = (BD) \cap (CE)$.

Montrer que la droite (AP) coupe le segment $[CD]$ en son milieu.

Solution de l'exercice 2



On se rend immédiatement compte qu'il existe une similitude de centre A qui envoie B sur C, C sur D et D sur E.

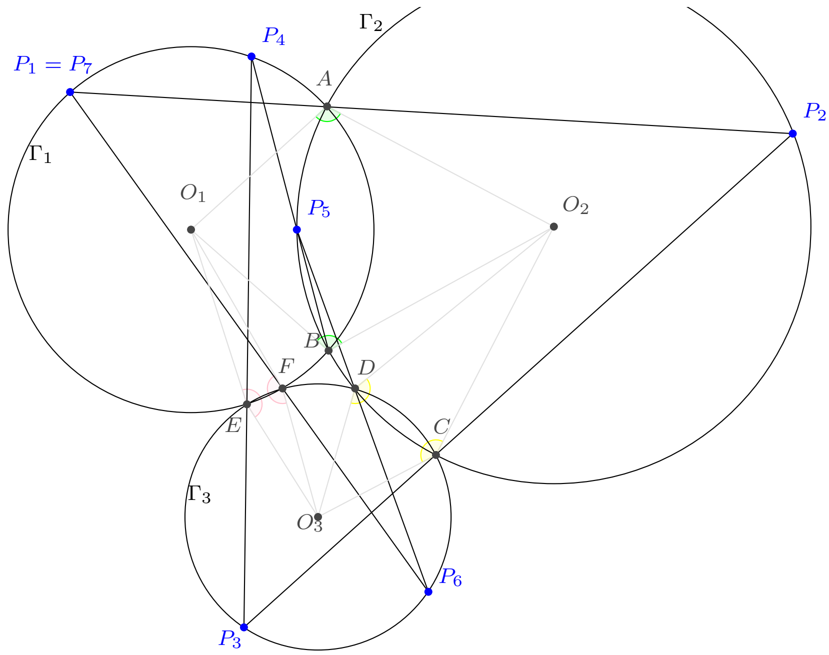
Donc, d'après la construction du center d'une similitude appliquée au couple de point $(B, D) \mapsto (C, E)$, A est sur le cercle circonscrit Γ_1 à PBC et Γ_2 à PDE. Ici, l'exercice commence à avoir bien la tête d'un exercice utilisant la puissance d'un point. On essaye donc de montrer que Γ_1 est tangent à (CD). Or c'est vrai d'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit comme $\widehat{ABC} = \widehat{DCA}$. De même, comme $\widehat{DEA} = 180° - \widehat{EAD} - \widehat{EDA} = 180° - \widehat{CAD} - \widehat{ACD} = \widehat{CDA}$, le cercle Γ_2 est également tangent à (CD).

Finalement, en notant $M = (AP) \cap (CD)$, M est sur l'axe radical de Γ_1 et Γ_2 et on peut donc écrire $MC^2 = \mathcal{P}_{\Gamma_1}(M) = \mathcal{P}_{\Gamma_2}(M) = MD^2$ et la conclusion.

Exercice 3 Soit Γ_1, Γ_2 et Γ_3 trois cercles avec $\{A, B\} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $\{C, D\} = \Gamma_2 \cap \Gamma_3$ et $\{E, F\} = \Gamma_3 \cap \Gamma_1$. On considère P_1 sur Γ_1 et on note P_2 le deuxième point d'intersection de (P_1A) et Γ_2, P_3 le deuxième d'intersection de (P_3C) et Γ_3, P_4 le deuxième point d'intersection de (P_3E) et Γ_1, P_5 le deuxième point d'intersection de (P_4B) et Γ_2, P_6 le deuxième point d'intersection de (P_5D) et Γ_3 et enfin P_7 le deuxième point d'intersection de (P_6F) et Γ_1.

Montrer que $P_7 = P_1$.

Solution de l'exercice 3



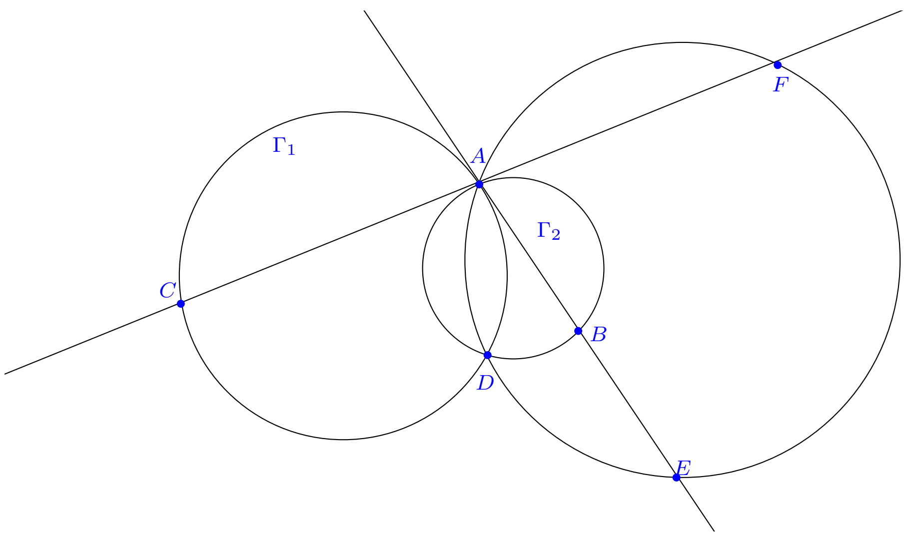
On considère ϕ_B la similitude de centre B qui envoie P_1 sur P_2 et Γ_1 sur Γ_2. De même, on considère ϕ_D la similitude de centre D qui envoie P_2 sur P_3 et Γ_2 sur Γ_3. on définit de manière similaire ϕ_F, ϕ_A, ϕ_C et ϕ_E.

On note $\Phi = \phi_F \circ \phi_D \circ \phi_B \circ \phi_E \circ \phi_C \circ \phi_A$. On a alors $P_7 = \Phi(P_1)$. Or, l'angle de rotation de Φ vaut $(AO_1, AO_2) + (CO_2, CO_3) + (EO_3, EO_1) + (BO_1, BO_2) + (DO_2, DO_3) + (FO_3, FO_1) = 0$ en éliminant les termes correspondants (voir figure). De même, le facteur de dilatation de Φ vaut $r_2/r_1 \cdot r_3/r_2 \cdot r_1/r_3 \cdot r_2/r_1 \cdot r_3/r_2 \cdot r_1/r_3 = 1$.

Φ est donc une translation qui envoie Γ_1 sur lui-même, donc est l'identité, d'où la conclusion.

Exercice 4 Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui se coupent en deux points A et D. La tangente à Γ_1 en A recoupe Γ_2 en B, et la tangente à Γ_2 en A recoupe Γ_1 en C. Soit $E \in [AB)$ tel que $BE = AB$, et F la deuxième intersection de $[AC)$ avec le cercle circonscrit Ω à ADE. Montrer que $AC = AF$.

Solution de l'exercice 4



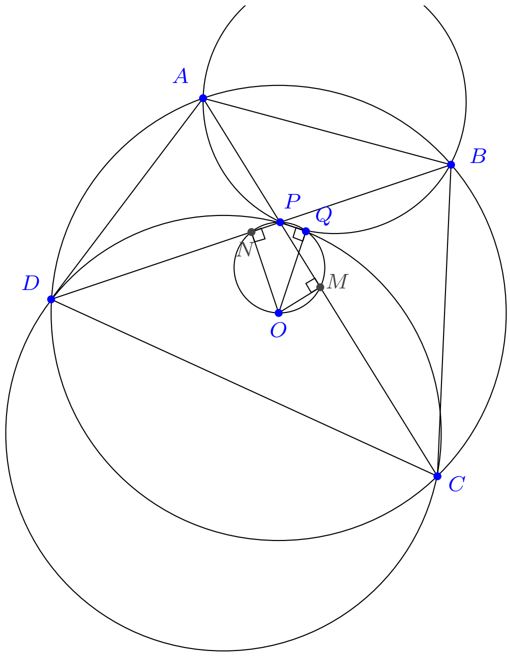
D'après la construction du centre d'une similitude appliquée aux cercles Γ_1 et Γ_2, D est le centre de la similitude directe s_1 qui envoie C sur A et A sur B. En regardant les cercles Γ_1 et Ω, D est le centre de la similitude directe qui envoie C sur F et A sur E, donc le centre de la similitude directe s_2 qui envoie C sur A et F sur E.

Or, comme il existe une unique similitude directe de centre D qui envoie C sur A (car le rapport est forcément $\frac{DA}{DC}$ et l'angle forcément $\widehat{ADC}$), on a $s_1 = s_2$, donc on a une similitude qui envoie C sur A, A sur B et F sur E. Comme B est le milieu de $[AE]$, on en déduit que A est le milieu de $[CF]$.

Exercice 5 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O, P le point d'intersection des diagonales et Q le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles APD et BPC.

Montrer que $\widehat{OQP} = 90°$.

Solution de l'exercice 5



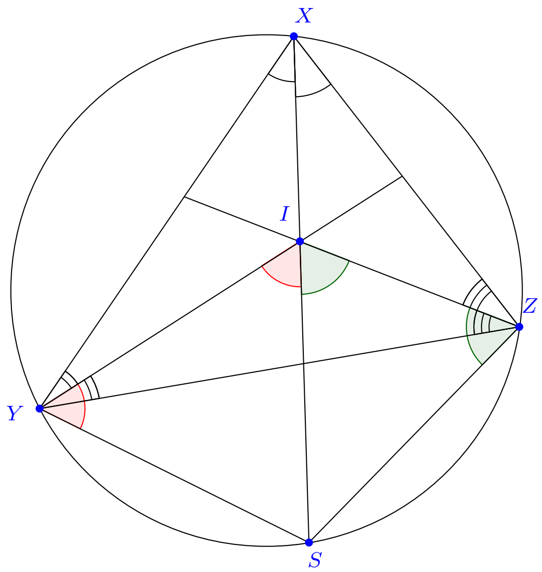
Il est naturel pour obtenir des angles droits de considérer les milieux M et N de $[AC]$ et $[BD]$. On considère la similitude de centre Q qui envoie A sur B et C sur D. Elle envoie le segment $[AC]$ sur le segment $[BD]$ et en particulier M sur N. En utilisant la construction du centre d'une similitude avec les couples $(A, M) \mapsto (B, N)$, M, N, P et Q sont cocycliques. Or, en utilisant l'angle droit des médiatrices, il et clair que M, N, P et O sont cocycliques.

D'où finalement M, N, P, Q et O cocycliques et $\widehat{OQP} = 90°$ par le théorème de l'angle inscrit.

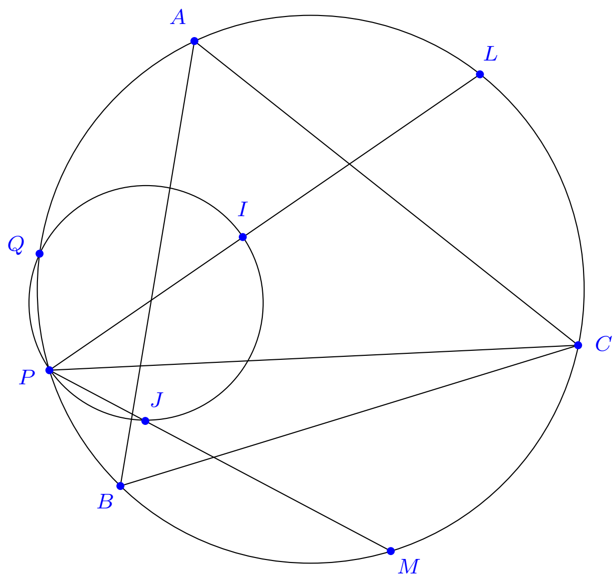
Exercice 6 Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ, P un point variable sur le l'arc AB qui ne contient pas C. Soient I et J les centres des cercles inscrits des triangles ACP et BCP respectivement. On considère Q le point d'intersection de Γ et du cercle circonscrit au triangle PIJ.

Montrer que Q reste fixe quand P varie.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On rappelle le théorème du pôle Sud, visiblement pertinent dans cet exercice et démontrable grâce à une chasse aux angles élementaire (exercice !).



Si XYZ est un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$, I son centre du cercle inscrit et S le deuxième point d'intersection de (XI) avec $\mathcal{C}$. Alors, S est le milieu de l'arc YZ et, plus précisément, $SY = SI = SZ$.



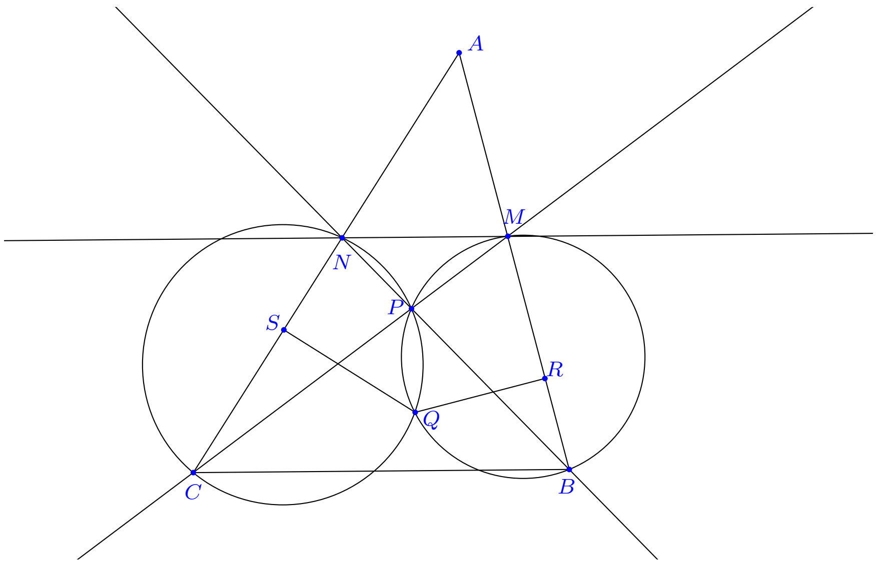
On est dans la situation classique avec deux cercles qui s'intersectent, on connaît bien un des points d'intersection et c'est l'autre qui nous intésse. On cherche donc à compléter le quadrilatère. De manière naturelle, on introduit donc les points fixes L et M, milieux respectifs des petits arcs AC et BC. D'après le théorème du pôle Sud, P, I et L ainsi que P, J et M sont alignés.

On sait alors que Q est le centre de la similitude S envoyant I sur J et L sur M. (Comme toujours se pose la question de quelle similitude choisir : pourquoi pas celle envoyant I sur L et J sur M ? Et comme souvent la réponse sera qu'on connaît mieux la première similitude parce que l'on maîtrise bien les longueurs impliquées.) Cette similitude envoyant le point fixe L sur le point fixe M, pour prouver qu'elle est fixe (et donc Q également), il suffit de montrer que son angle de rotation et son rapport de dilatation sont fixes (un petit dessin convaincra le lecteur sceptique...). Or, l'angle vaut $\widehat{LQM}$ qui est fixe d'après le théorème de l'angle inscrit et le rapport de dilatation vaut JM/IL qui vaut CM/CL d'après le théorème du pôle Sud, d'où la conclusion.

Exercice 7 (BMO 2009) Soit ABC un triangle. Une droite parallèle à (BC) coupe $[AB]$ en M et $[AC]$ en N. Soit P le point d'intersection de (BN) et (CM). Les cercles circonscrits à BMP et CNP se recoupent en Q.

Montrer que $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$.

Solution de l'exercice 7



Commençons par nous occuper de P : d'après le théorème de Ceva et celui de Thalès, (AP) est une médiane de ABC, ce qui signifie que $\widehat{PAB}$ ne pourra pas s'exprimer de manière simple. On va donc utiliser de la trigonométrie.

On remarque que Q est le centre de la similitude directe s qui envoie B sur N et M sur C. Pour pouvoir faire des calculs trigonométriques sur $\widehat{QAB}$ et $\widehat{QAC}$, on introduit les projetés orthogonaux R et S de Q sur (AB) et (AC). On a $s(R) = S$ donc $\frac{QS}{QR}$ est égal au rapport de s, soit $\frac{NC}{BM} = \frac{AC}{AB}$ par Thalès. On en déduit $\frac{\sin \widehat{QAC}}{\sin \widehat{QAB}} = \frac{QS/QA}{QR/QA} = \frac{AC}{AB}$.

D'un autre côté, si M est le milieu de $[BC]$, on a en utilisant plusieurs fois la loi des sinus :

$$\frac{\sin \widehat{PAB}}{\sin \widehat{PAC}} = \frac{\sin \widehat{MAB}}{\sin \widehat{MAC}} = \frac{\frac{BM}{AM} \sin \widehat{ABM}}{\frac{CM}{AM} \sin \widehat{ACM}} = \frac{\sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin \widehat{QAC}}{\sin \widehat{QAB}}$$

Autrement dit, $f(\widehat{PAB}) = f(\widehat{QAC})$ avec $f(x) = \frac{\sin x}{\sin(\widehat{BAC}-x)}$. On peut vérifier que cette fonction est strictement croissante, par exemple en la dérivant (exercice), d'où $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$.

Remarque 89. La trigonométrie est une méthode très puissante. Pour passer de formules sur des rapports de sinus (obtenues grâce à la loi des sinus et au théorème de Ceva trigonométrique) à des égalités d'angles, le fait que f soit strictement croissante est très utile et à retenir !

6 Groupe C : algèbre

1 lundi 21 après-midi : Henry Bambury

Introduction

Une équation fonctionnelle est tout simplement une équation dont les solutions sont des fonctions. Ainsi une équation fonctionnelle se présente souvent sous la forme suivante :

Trouver toutes les fonctions vérifiant la ou les conditions suivantes :

L'énoncé précise en général l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de la fonction. Il s'agira le plus souvent de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ vérifiant la ou les conditions suivantes :

La résolution d'une équation fonctionnelle, comme pour une équation classique est la démonstration d'une équivalence : *Une fonction $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une solution* **si et seulement si** *f est de la forme...*
Il faut donc travailler sur les conditions de l'énoncé afin de restreindre l'ensemble des solutions possibles le plus possible, puis **vérifier** que les fonctions de l'ensemble obtenu sont bien solution (même si cette étape est souvent évidente, elle ne doit **jamais** être oubliée sous peine de perdre au moins une petite partie des points).

Un schéma classique de solution serait donc le suivant :
- ▷ Soit f une solution éventuelle du problème.
- ▷ Alors d'après les conditions,... f est nécessairement de la forme... (résolution de la première implication)
- ▷ On vérifie que toute fonction de la forme obtenue ci-dessus est compatible avec les conditions de l'énoncé... (résolution de la seconde implication)

On peut parfois contourner ce soucis de vérifier en introduisant la solution comme suit : *Les solutions sont :... Il est facile de vérifier que ces fonctions sont bien solutions. On va maintenant prouver que ce sont les seules...*

Une équation fonctionnelle classique, la première équation de Cauchy

Exercice 1 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{Z}$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> En posant $x = y = 0$, on obtient $f(0) = f(0) + f(0)$ d'où $f(0) = 0$. On pose $a = f(1)$. Alors $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2a$. Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) = f(n) + f(1) = f(n) + a$. On montre ainsi par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1) = n \times a$.
On sait de plus que pour $n \in \mathbb{N}, 0 = f(0) = f(n+(-n)) = f(n)+f(-n)$ d'où $f(-n) = (-n) \times a$.
Les éventuelles solutions sont donc les fonctions affines dans $\mathbb{Z}$.
Vérification : Soit $a \in \mathbb{Z}$ (en effet $f(1) \in \mathbb{Z}$, a ne peut pas être un réel quelquonque...) et f la fonction linéaire associée, alors pour $x, y \in \mathbb{Z}$, $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.
On a donc montré que les solutions sont exactement les fonctions linéaires a coefficient relatif sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 2 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{Q}$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Soit f une solution éventuelle.

En adaptant la récurrence de l'exercice précédent, on a pour tout $x \in \mathbb{Q}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $f(nx) = n \times f(x)$
Ainsi soit n un entier non nul, $f(1) = f\left(n \times \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$ d'où $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1)$
Soit $x \in \mathbb{Q}$, alors x s'écrit de la forme $\frac{p}{q}$ avec p un relatif et q un naturel non nul.
On a alors $f(x) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) = p \times f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q} \times f(1) = x \times f(1)$. Encore une fois, on vérifie que les fonctions solution sont bien les fonctions linéaires à coefficient directeur rationnel de $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

Exercice 3 Donner des exemples de conditions permettant de conclure sur $\mathbb{R}$. <u>*Solution de l'exercice 3*</u>

L'équation de Cauchy sur $\mathbb{R}$ est plus délicate. En effet, il existe sur $\mathbb{R}$ des solutions non linéaires. Cependant, les conditions suivantes suffisent à assurer la linéarité :

- ▷ f est continue sur un intervalle non vide
- ▷ f est monotone sur un intervalle non trivial
- ▷ f est majorée sur un intervalle non trivial
- ▷ f est minorée sur un intervalle non trivial

On ne s'attardera pas ici sur les preuves de ces points, mais ce qu'il faut retenir c'est qu'une petite information en plus dans l'énoncé permet souvent d'effectuer ce passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, en particulier si celle-ci n'a pas encore servi pour établir l'ensemble des solutions sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 4 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{Q}$,

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Cette équation est connue sous le nom d'équation fonctionnelle de Jensen. L'idée de la preuve est de se ramener par un changement de fonction à l'équation de

Cauchy. On vérifie ensuite facilement que les fonctions affines sont solution.
Après quelques tests, on remarque que les fonctions de la forme $f(x) = kx + c$ sont solutions. On sait ainsi que $g = f - f(0)$ sera sÃ»rement linéaire ! Comme il est plus facile de travailler avec des fonctions plus simples, on réécrit l'équation comme suit :

$$(f(x) - f(0)) + (f(y) - f(0)) = 2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0)\right)$$

$$g(x) + g(y) = 2g\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

La fonction g vérifie exactement la même équation que f, mais on sait maintenant que $g(0) = 0$.
En posant $y = 0$, pour tout rationnel x on obtient : $g(x) = 2g\left(\frac{x}{2}\right)$
Ainsi en utilisant ceci dans l'équation de départ pour g, pour tous rationnels x, y,

$$g(x) + g(y) = 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) = g(x+y)$$

ce qui est exactement l'équation de Cauchy ! Ainsi g est linéaire et f est affine. La vérification se fait très simplement ensuite.

Exercice 5 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tous rationnels $x < y < z < t$ en progression arithmétique,

$$f(y) + f(z) = f(x) + f(t)$$

Solution de l'exercice 5 Soit f une solution éventuelle.

On commence par réécrire l'équation avec $a = x$ puis en la décalant avec $a = y$ et $r > 0$ la raison de la progression :

$$f(a+r) + f(a+2r) = f(a) + f(a+3r)$$

$$f(a) + f(a+r) = f(a-r) + f(a+2r)$$

On remarque alors qu'additionner ces deux équations simplifie pas mal de choses : pour tout $a \in \mathbb{Q}$ et

$$2f(a+r) = f(a-r) + f(a+3r)$$

En posant $x = a - r$ et $y = a + 3r$, on retombe sur une équation très proche de celle de Jensen ! La seule différence est que le nouveau x et le nouveau y sont nécessairement différents. Mais ce problème n'est pas si grave car pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $2f(x) = f(x) + f(x)$!
La conclusion est alors immédiate.

Quelques exercices de substitution

En équations fonctionnelles, il est souvent utile et nécessaire de recourrir à des substitutions intelligentes. Il est en général naturel de poser $x = 0$, $x = y$,... et souvent pratique d'utiliser des substitutions qui annulent le plus possible de termes dans l'équation.

Exercice 6 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(x)f(y) + f(x+y) = xy$$

Solution de l'exercice 6 En prenant $x = 0$, on a $(f(0) + 1)f(y) = 0$. Comme f ne peut pas être identiquement nulle (prendre $x = y = 1$ par exemple), on a $f(0) = -1$. En prenant $x = -y = 1$, on a $f(1)f(-1) = 0$. Si $f(1) = 0$, en prenant $x = 1$, on a $f(y+1) = y$, donc la seule fonction solution possible est $x \mapsto x - 1$. On vérifie qu'elle convient. Sinon, $f(-1) = 0$, et en prenant $x = -1$, on trouve de même $x \mapsto -1 - x$ comme unique possibilité, et elle convient également.

Exercice 7 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Solution de l'exercice 7 En prenant $x = f(y)$ dans l'équation de départ, on obtient $f(y) = 1 - f(0) - y$ ainsi f est de la forme $x \mapsto c - x$ avec $c = 1 - f(0)$, on obtient donc en réinjectant dans l'équation initiale pour tous réels x, y :

$$c - (x - (c - y)) = 1 - x - y$$

d'où $c = \frac{1}{2}$, l'unique solution possible est $x \mapsto \frac{1}{2} - x$, qui est bien solution.

Exercice 8 Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$f(x^{666} + y) = f(x^{2017} + 2y) + f(x^{42})$$

Solution de l'exercice 8 Parfois une simple substitution permet de tuer une équation fonctionnelle qui a l'air méchante...
Soit f une solution éventuelle.

On veut une substitution qui puisse tuer deux termes... testons la méthode la plus simple : $x^{666} + y = x^{2017} + 2y$ lorsque $y = x^{666} - x^{2017}$, pourquoi ne pas poser $y = x^{666} - x^{2017}$?
On obtient directement $f(x^{42}) = 0$ pour tout réel x. Ainsi f est nulle sur les positifs.
En posant $y = 0$, on a directement le résulat sur $\mathbb{R}$ tout entier.
La fonction nulle est donc l'unique solution. (La vérification est immédiate).

Injectif-Surjectif-Bijectif

Définition 90. Une fonction $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est dite *injective* lorque deux éléments distincts de $\mathcal{A}$ ont toujours une image distincte par f.

Pour montrer qu'une fonction f est injective, on suppose qu'il existe a et b des nombres distincts de l'ensemble de départ tels que $f(a) = f(b)$ et on aboutit à une contradiction. Savoir qu'une fonction est injective peut être très pratique, cela permet notamment de passer d'une équation de la forme $f(\text{expression1}) = f(\text{expression2})$ directement à $\text{expression1} = \text{expression2}$.

Définition 91. Une fonction $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est dite *surjective* si tout élément de $\mathcal{B}$ admet un antécédant par f.

Savoir qu'une fonction est surjective permet par exemple de remplacer x dans une expression par $f(u)$ pour simplifier l'équation. On n'a alors aucune information sur le u.

Pour montrer qu'une fonction est surjective, il est suffisant d'exhiber un antécédant pour chaque élément de l'ensemble d'arrivée. En pratique, avoir une égalité du type $f(\text{expression}) = \text{exp}$ où exp est une expression ne dépendant que d'une variable qui parcourt entièrement l'ensemble d'arrivée quand cette variable varie.

Définition 92. Une fonction à la fois injective et surjective et dite *bijective*.

Exercice 9 Soit f une fonction qui vérifie pour tous réels x, y :

$$f(y + f(x)) = (y - 1)f(x)^2 + 3x$$

Montrer que f est bijective.

Solution de l'exercice 9 En remplaçant x, y par $\frac{x}{3}, 1$ on obtient pour tout réel x :

$$f\left(1 + f\left(\frac{x}{3}\right)\right) = x$$

Ainsi chaque réel admet un antécédent par f, f est surjective.
Montrons l'injectivité : soit a, b des réels tels que $f(a) = f(b)$. Alors $f(b + f(a)) = f(b + f(b))$ d'où $(b-1)f(a)^2+3a = (b-1)f(b)^2+3b$ et enfin $a = b$. f est donc injective, mais aussi surjective, donc bijective.

Exercice 10 Dire pour chaque condition ci-dessus sur une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si elle est nécessairement injective, surjective, bijective ou non.

- ▷ $f(f(x) - 1) = x + 1$
- ▷ $f(x + f(y)) = f(x) + y^5$
- ▷ $f(f(x)) = \sin x$
- ▷ $f(x + y^2) = f(x)f(y) + xf(y) - y^3 f(x)$

Solution de l'exercice 10

- ▷ Toute fonction vérifiant cette première relation est bijective. En effet, $f(f(x-1) - 1) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f est surjective. De plus si $f(a) = f(b)$ pour des réels a, b, $f(f(a) - 1) = f(f(b) - 1)$ donc avec la relation initiale, $a + 1 = b + 1$ donc $a = b$, et f injective.
- ▷ Toute fonction vérifiant cette première relation est bijective. En effet en fixant $x = 0$ par exemple, le membre de droite parcourt $\mathbb{R}$ quand y parcourt $\mathbb{R}$. Ainsi f est surjective. De plus si $f(a) = f(b)$ pour a, b des réels, $f(a+f(a)) = f(a+f(b))$ d'où $f(a)+a^5 = f(a)+b^5$ et $a = b$. Elle est injective.
- ▷ $\sin 0 = \sin \pi$ donc $f(f(0)) = f(f(\pi))$, si $f(0) \neq f(\pi)$, f n'est pas injective, sinon 0 et π ont la même image. f n'est pas injective. De plus $\sin$ prend ses valeurs entre -1 et 1 donc $f \circ f$ est non surjective, or si f l'était, $f \circ f$ le serait aussi.
- ▷ On remarque que la fonction nulle est solution, f n'est donc ni injective, ni surjective.

Exercice 11 Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + f(y)$$

Solution de l'exercice 11 Soit f une solution éventuelle. On va montrer que f est injective : soit a, b des réels tels que $f(a) = f(b)$. Alors $f(2f(b) + f(b)) = f(2f(a) + f(a))$ d'où $2b + f(b) = 2a + f(a)$ et enfin $a = b$. f est donc injective.
En prenant $x = 0$ on a $f(2f(0) + f(y)) = f(y)$ d'où avec l'injectivité de f, $f(y) = y - 2f(0)$ on pose $c = -2f(0)$ et avec l'équation de départ pour tous réels x, y :

$$(2(x + c) + (y + c)) + c = 2x + (y + c)$$

donc $c = 0$ et l'identité est la seule solution (on vérifie ceci aisément).

Exercice 12 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$$

Solution de l'exercice 12 En posant $x = y = 0$, on a $f(f(0)^2+f(0)) = 0$. On pose $u = f(0)^2+f(0)$, c'est un antécédant de 0 !
On pose $x = u$ et ainsi pour tout réel y, $f(f(y)) = y$.
f est donc une involution. Il est assez facile de remarquer qu'une involution est aussi une bijection, f est donc bijective.
On peut donc substituer x par $f(t)$ où t est l'antécédant de x, d'où $f(f(f(t))^2 + f(y)) = f(t)f(f(t)) + y$ et donc $f(t^2 + f(y)) = tf(t) + y$ et en combinant ce résultat à l'équation initiale,

$$f(f(t)^2 + f(y)) = f(t^2 + f(y))$$

Par injectivité, on a alors pour tout réel t, $f(t)^2 = t^2$.
Reste à voir si f peut être ou non une combinaison de $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$. Soit a, b deux réels non nuls tels que $f(a) = a$ et $f(b) = -b$. En prenant $x = a$ et $y = b$ dans l'équation de départ, on obtient $f(a^2-b) = a^2+b$ donc $a^2-b = a^2+b$ (contradiction car $b \neq 0$) ou bien $a^2-b = -a^2-b$ (contradiction car $a \neq 0$).
Ainsi les seules solutions possibles sont $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$. Une rapide vérification montre que celles-ci sont effectivement solutions.

D'autres exercices

Exercice 13 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tout naturel n,

$$f(f(n)) = n + 2017$$

Solution de l'exercice 13 On considère $g : \mathbb{Z}_{2017} \to \mathbb{Z}_{2017}$ définie par

$$g(n) = f(n \bmod 2017) \bmod 2017$$

On a $f(k) + 2017 = f(f(f(k))) = f(k + 2017)$ donc si $x \equiv y[2017]$, alors $f(x) \equiv f(y)[2017]$ donc g est bien définie. D'après l'égalité de l'énoncé, g est une involution, or $\mathbb{Z}_{2017}$ est de cardinal impair, donc g admet un point fixe $p \in \mathbb{Z}_{2017}$.
En identifiant p avec son représentant canonique dans $\mathbb{Z}$, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(p) = p + 2017k$.

Or $f(f(p)) = p + 2017$ et $f(f(p)) = f(p + 2017k) = f(p) + 2017k = p + 2 \times 2017k$ (en itérant $f(x+2017) = f(x)+2017$) d'où $p+2017 = p+2\times 2017k$ et $k = \frac{1}{2}$, absurde ! Ainsi cette équation n'a pas de solutions.

Exercice 14 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y dans $\mathbb{R}$,

$$(x - y)f(x + y) - (x + y)f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2)$$

Solution de l'exercice 14 Pour clarifier un peu le problème, on pose $x + y = a$ et $x - y = b$. Ainsi $x^2 - y^2 = ab$, $2x = a + b$ et $2y = a - b$. On obtient pour tous réels a, b :

$$bf(a) - af(b) = ab(a^2 - b^2)$$

En prenant $a = 0$, $bf(0) = 0$ donc $f(0) = 0$.
Ensuite, pour $a, b \neq 0$, on divise par ab :

$$\frac{f(a)}{a} - \frac{f(b)}{b} = a^2 - b^2$$

soit

$$\frac{f(a)}{a} - a^2 = \frac{f(b)}{b} - b^2$$

Cette quantité est indépendante du paramètre choisi ! On pose $c = \frac{f(a)}{a} - a^2$ pour un a non nul (donc pour tous les a non nuls)
Ainsi pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^3 + cx$, mais cela reste valable pour $x = 0$ car $f(0) = 0$.
Il ne reste plus qu'à vérifier que ces fonctions conviennent !

Exercice 15 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous naturels n, m,

$$f(3n + 2m) = f(n)f(m)$$

Solution de l'exercice 15 $n = m = 0$ donne $f(0)^2 = f(0)$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

- ▷ Si $f(0) = 0$, alors $f(2m) = 0$ et $f(2m+9) = f(m)f(3) = f(m)f(1)f(0) = 0$ donc $f(m) = 0$ sauf si $m = 1, 3, 5, 7$. Or $f(3) = f(1)f(0) = 0$, $f(7) = f(2 \times 2 + 3) = f(1)f(2) = 0$, $f(5)f(1) = f(13) = 0$, donc au moins l'un des deux entre $f(5)$ et $f(1)$ est nul.
  - — Si $f(1) = 0$, $f(5) = f(1)^2 = 0$ donc f est nulle (et bien solution).
  - — Si $f(5) = 0$, $f(1)^2 = 0$ donc f est nulle.
- ▷ Si $f(0) = 1$, $f(3 \times 4) = f(4)f(0) = f(2 \times 2) = f(2)f(0) = f(1)f(0) = f(1)$, et $f(3 \times 2 + 2 \times 3) = f(2)f(3) = f(1)^2$ Donc $f(1) = f(1)^2$. Donc $f(1) = 1$ ou $f(1) = 0$.
  - — Si $f(1) = 0$, $f(3) = f(2) = 0$ donc $f(3n + 2 \times 2) = f(2)f(n) = 0$, $f(3n + 2 \times 3) = f(3)f(n) = 0$ et $f(3n + 2) = f(n)f(1) = 0$ donc $f(n) = 0$ pour tout entier n, sauf $f(0) = 1$. On a une autre solution qui fonctionne.
  - — Si $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$ et $f(2n + 3) = f(n)$, donc pour tout entier non nul, $f(n) = f(m)$ avec $m < n$ donc f est constante et vaut 1. Elle est bien solution.

En résumé, les solutions sont :
- ▷ $f(n) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}$
- ▷ $f(n) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{N}$
- ▷ $f(n) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ sauf pour 0, et $f(0) = 1$.

Exercice 16 Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$

<u>*Solution de l'exercice 16*</u> Soit f une solution éventuelle. On commence par prouver que f est impaire.
$f(0) = f(x^2 - x^2) = xf(x) - xf(x) = 0$ et pour y non nul, $xf(x) - yf(y) = f(x^2 - y^2) = xf(x) + yf(-y)$ d'où $f(y) = -f(-y)$ pour tout y réel, f est impaire. On ne considère donc que des variables positives.
En prenant $y = 0$, $xf(x) = f(x^2)$, ainsi on a pour tous réels x, y :

$$f(x^2 - y^2) = f(x^2) - f(y^2)$$

soit en posant $a = \sqrt{x}$ et $b = \sqrt{y}$:

$$f(a - b) + f(b) = f(a)$$

Avec $a = 2t$ et $b = t$ et l'imparité, on obtient pour tout t réel, $2f(t) = f(2t)$.
Avec $x = t + 1$ et $y = t$ dans l'équation de départ,

$$f(2t+1) = (t+1)f(t+1) - tf(t) = (t+1)f(t) + (t+1)f(1) - tf(t) = f(t) + (t+1)f(1)$$

$$f(2t+1) = 2f(t) + f(1)$$

d'où en combinant les lignes ci-dessus, pour tout réel t, $f(t) = tf(1)$.
On vérifie que les fonctions linéaires sont bien solutions.

2 mardi 22 après-midi : Alexander Semenov

Exercices faits en cours

Exercice 1 (échauffement)
Soit $x > 0$. Montrer que

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Pour quels x a-t-on égalité ?

Exercice 2 (inégalité arithmético-géométrique 1)
Soient $x, y > 0$. Montrer que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 3 (inégalité de Jensen)
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si $x_1, ...x_n$ sont dans $[a, b]$, que $\alpha_1, ..., \alpha_n > 0$ tels que $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$, alors

$$f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_n f(x_n)$$

Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 4 Exercice 3 (inégalité arithmético-géométrique 2)

Soient $x_1, ..., x_n > 0$, $\alpha_1, ..., \alpha_n > 0$ tels que $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$. Montrer que

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n \geq x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$$

Déterminer les cas d'égalité.
(vous pouvez commencer par faire cet exercice pour $\alpha_i = \frac{1}{n}$)

Exercice 5

Calculer $min\{x + 2y + 3z | x > 0, y > 0, z > 0, x^3y^2z = 1\}$

Exercice 6 (IMO 2012, problème 2)

Soient $n \geq 3$ et $a_2, a_3, ..., a_n > 0$ tels que $a_2a_3...a_n = 1$. Montrer que

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3...(1 + a_n)^n > n^n$$

Exercices non faits en cours mais que beaucoup d'élèves ont cherché

Exercice 7 (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$x_1y_1 + ... + x_ny_n \leq \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}.$$

Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 8 (inégalité de Hölder)

Soient $a_i, b_i, ..., z_i \geq 0$, $\lambda_a, \lambda_b, ..., \lambda_z > 0$ tels que $\lambda_a + \lambda_b + ... + \lambda_z = 1$. Montrer que

$$a_1^{\lambda_a} b_1^{\lambda_b} ... z_1^{\lambda_z} + ... + a_n^{\lambda_a} b_n^{\lambda_b} ... z_n^{\lambda_z} \leq (a_1 + ... + a_n)^{\lambda_a}(b_1 + ... + b_n)^{\lambda_b}...(z_1 + ... + z_n)^{\lambda_z}.$$

Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 9 (inégalité des mauvais élèves)

1) Soient $x_1, ..., x_n > 0$, $a_1, ..., a_n > 0$ et $r > 0$. Montrer que

$$\frac{a_1^{r+1}}{x_1^r} + \frac{a_2^{r+1}}{x_2^r} + ... + \frac{a_n^{r+1}}{x_n^r} \geq \frac{(a_1 + ... + a_n)^{r+1}}{(x_1 + ... + x_n)^r}$$

Déterminer les cas d'égalité.
2) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3) En déduire l'inégalité de la moyenne arithmético-quadratique :

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

4) En déduire l'inégalité de la moyenne arithmético-harmonique :

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}}$$

Exercice 10 (inégalité de Nesbitt)
Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Remarque 93. à partir de maintenant (même si on le précise pas), toutes les variables qui interviennent sont strictement positives.

Exercice 11

$$(1+\frac{a_1^2}{a_2})(1+\frac{a_2^2}{a_3})...(1+\frac{a_n^2}{a_1}) \geq (1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)$$

Exercice 12

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$$

Exercice 13

$$\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \geq \frac{3}{a+b}$$

Exercice 14

$$8(a^4+b^4) \geq (a+b)^4$$

Exercice 15
On suppose dans cet exercice et les suivants que $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Exercice 16

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Exercice 17

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

Exercice 18

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 4(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}).$$

Exercice 19

$$\sum_{cyc}\frac{ab}{a+b+2c}\leq\frac{a+b+c}{4}.$$

7 Solutions

Solution de l'exercice 1

Soit $x>0$. On a :

$$x+\frac{1}{x}\geq 2\Longleftrightarrow x^2-2x+1\geq 0\Longleftrightarrow (x-1)^2\geq 0$$

Or, la dernière assertion est vraie, ce qui conclut.

Cas d'égalité :

$$x+\frac{1}{x}=2\Longleftrightarrow x^2-2x+1=0\Longleftrightarrow (x-1)^2=0$$

Donc, l'égalité n'est atteinte que pour $x=1$.

Solution de l'exercice 2

Soient $x,y>0$. On a :

$$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\Longleftrightarrow x+y-2\sqrt{xy}\geq 0\Longleftrightarrow (x-y)^2\geq 0$$

Or, la dernière assertion est vraie, ce qui conclut.

Cas d'égalité :

$$\frac{x+y}{2}=\sqrt{xy}\Longleftrightarrow x+y-2\sqrt{xy}=0\Longleftrightarrow (x-y)^2=0$$

Donc, l'égalité n'est atteinte que pour $x=y$.

Solution de l'exercice 3

Vous pouvez trouver un cours sur la convexité dans le poly sur les inégalités de Pierre Bornsztein. L'inégalité de Jensen y est notamment prouvée.

Solution de l'exercice 4

On va montrer par récurrence sur n la propriété suivante : $P(n)$: "Pour $x_1,...,x_n>0$, $\alpha_1,...,\alpha_n>0$ tels que $\alpha_1+...+\alpha_n=1$, on a $\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n\geq x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$. Le cas d'égalité est atteint lorsque $x_1=...=x_n$".

Initialisation :

On veut montrer que pour $x, y > 0$, $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, on a $\alpha x + \beta y \geq x^\alpha y^\beta$.

On remarque que cette inégalité est homogène de degré 1, dans le sens où si on multiplie x et y par $\lambda > 0$ (on obtient alors λx et λy), alors on obtient une inégalité équivalente à l'inégalité de départ. Il est donc raisonnable de supposer $y = 1$, autrement dit de diviser les deux termes de l'inégalité par y. On obtient alors l'inégalité équivalente suivante :

$$\alpha \frac{x}{y} + \beta \geq \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$$

Il suffit donc de prouver l'inégalité suivante avec $z > 0$:

$$\alpha z + (1-\alpha) \geq z^\alpha \Longleftrightarrow z^\alpha \leq 1 + \alpha(z-1)$$

$$0 < \alpha < 1$$

On définit la fonction $f : z \longrightarrow z^\alpha$ sur $]0; +\infty[$. Cette fonction est dérivable et concave, donc sa courbe est en-dessous de la tangente à la courbe en chacun de ses points. En particulier, l'inégalité qu'on veut démontrer dit exactement que la tangente à f en 1 est au-dessus de la courbe de f.

Comme la fonction f est strictement concave, l'égalité est atteinte seulement lorsque $z = 1$, i.e. seulement lorsque $x = y$. $P(2)$ est donc prouvée.

Hérédité :

Pour $n \geq 2$, supposons $P(n)$ prouvée. Montrons $P(n+1)$.

Soient $x_1, ..., x_{n+1} > 0$, $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1} > 0$ tels que $\alpha_1 + ... + \alpha_{n+1} = 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n+1} x_{n+1} &= (\alpha_1 + ... + \alpha_n) \frac{\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n} + \alpha_{n+1} x_{n+1} \\
&\geq (\alpha_1 + ... + \alpha_n) x_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}} ... x_n^{\frac{\alpha_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}} + \alpha_{n+1} x_{n+1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&\geq (x_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}} ... x_n^{\frac{\alpha_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}})^{\alpha_1 + ... + \alpha_n} x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \text{ (par l'initialisation)} \\
&= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} .... x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}
\end{aligned}$$

On a égalité lorsque les deux inégalités sont des égalités. La première inégalité est une égalité lorsque $x_1 = ... = x_n$, la deuxième inégalité est une égalité lorsque $x_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}} ... x_n^{\frac{\alpha_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}} = x_{n+1}$. On en déduit qu'on a égalité seulement lorsque $x_1 = ... = x_{n+1}$.

Ce qui achève la preuve de $P(n+1)$.

Solution de l'exercice 5

Dans cet exercice, il faut chercher à utiliser la contrainte. Ainsi, on utilise l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\begin{aligned}
\frac{3(\frac{1}{3}x) + 2(y) + (3z)}{6} &\geq \sqrt[6]{(\frac{1}{3}x)^3 y^2 3z} \\
&= \sqrt[6]{\frac{1}{9}}
\end{aligned}$$

C'est un minimum, car l'egalité est atteinte pour $\frac{1}{3}x = y = 3z$.

Solution de l'exercice 6

Exploitation des "faiblesses" de l'énoncé et recherche d'idées :

$(1+a_2)^2 \geq 4a_2$ (car un carré est toujours positif)

Ceci peut aussi être retrouvé par IAG (inégalité arithmético-géométrique) : $\frac{1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_2}$

Il y a plusieurs manières d'appliquer l'IAG pour les facteurs suivants, mais on peut remarquer que vu la contrainte qu'on a, on aimerait conserver les a_k tels quels (c'est-à-dire sans puissances) dans le terme de droite.

Par exemple, $\frac{1+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{4}a_3}$ (on découpe 1 en $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$), donc $(1+a_3)^3 \geq \frac{3^3}{2^2}a_3$

Preuve :

De manière analogue, on prouve que

$$(1+a_n)^n \geq \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}a_n$$

Donc,

$$\begin{aligned}(1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n &\geq 2^2a_2\frac{3^3}{2^2}a_3...\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}a_n \\ &= n^n a_2a_3...a_n = n^n\end{aligned}$$

Pour vérifier que l'inégalité est stricte, il suffit de vérifier que le cas d'égalité n'est jamais atteint. Or, l'égalité est atteinte lorsque $a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{3}, ..., a_n = \frac{1}{n-1}$. Ce qui est une contradiction avec la condition de l'énoncé.

Solution de l'exercice 7

C'est un cas particulier de l'inégalité de Hölder qui constitue l'exercice suivant (prendre $\lambda_a = \lambda_b = \frac{1}{2}$).

Solution de l'exercice 8

Il est équivalent de montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_1+...+a_n}\right)^{\lambda_a}\left(\frac{b_i}{b_1+...+b_n}\right)^{\lambda_b}...\left(\frac{z_i}{z_1+...+z_n}\right)^{\lambda_z} \leq 1$$

Ce qui se prouve en utilisant l'IAG :

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_1+...+a_n}\right)^{\lambda_a}\left(\frac{b_i}{b_1+...+b_n}\right)^{\lambda_b}...\left(\frac{z_i}{z_1+...+z_n}\right)^{\lambda_z} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_a\frac{a_i}{a_1+...+a_n}+\lambda_b\frac{b_i}{b_1+...+b_n}+...+\lambda_z\frac{z_i}{z_1+...+z_n} \\ &= \lambda_a+\lambda_b+...+\lambda_z = 1\end{aligned}$$

L'égalité est atteinte lorsque pour $i = 1, ..., n$, $\frac{a_i}{a_1+...+a_n} = \frac{b_i}{b_1+...+b_n} = ... = \frac{z_i}{z_1+...+z_n}$, c'est-à-dire lorsque les vecteurs $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n), ..., (z_1, ..., z_n)$ sont proportionnels.

Solution de l'exercice 9

1) C'est une conséquence de l'inégalité de Hölder. On prend $\lambda_a = \frac{r}{r+1}$ et $\lambda_b = \frac{1}{r+1}$. On obtient alors :

$$(x_1 + ... + x_n)^{\frac{r}{r+1}} \left(\frac{a_1^{r+1}}{x_1^r} + ... + \frac{a_n^{r+1}}{x_n^r} \right)^{\frac{1}{r+1}} \geq a_1 + ... + a_n$$

car $a_i = x_i^{\frac{r}{r+1}} \left(\frac{a_i^{r+1}}{x_i^r} \right)^{\frac{1}{r+1}}$

On a égalité lorsque $(x_1, ..., x_n)$ et $\left(\frac{a_1^{r+1}}{x_1^r}, ..., \frac{a_n^{r+1}}{x_n^r} \right)$ sont proportionnels, donc lorsque $(x_1, ..., x_n)$ et $(a_1, .., a_n)$ sont proportionnels.

2) On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en posant $r = 1$.

3) On en déduit l'inégalité arithmético-quadratique, en posant $r = 1$ et $x_1 = ... = x_n = 1$.

4) On en déduit l'inégalité arithmético-harmonique, en posant $r = 1$ et $a_1 = ... = a_n = 1$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>

L'inégalité de l'énoncé est équivalente à

$$\frac{a^2}{ab + ac} + \frac{b^2}{cb + ab} + \frac{c^2}{ac + bc} \geq \frac{3}{2}$$

Or, en utilisant les mauvais élèves

$$\frac{a^2}{ab + ac} + \frac{b^2}{cb + ab} + \frac{c^2}{ac + bc} \geq \frac{(a + b + c)^2}{2(ab + bc + ca}$$

En développant le numérateur, il reste à montrer

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2(ab + bc + ca)} \geq \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

qui est une conséquence simple de l'IAG (cette dernière inégalité est également connue sous le nom d'inégalité ananas-banane-cerise par certains élèves).

<u>*Solution de l'exercice 11*</u>

Ici, on applique les mauvais élèves de la façon suivante :

$$\frac{1^2}{1} + \frac{a_1^2}{a_2} \geq \frac{(1 + a_1)^2}{1 + a_2}$$

Ce qui suffit pour conclure.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u>

Ici, on applique les mauvais élèves de la façon suivante :

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq \frac{(a + b)^2}{2(a + b)} = \frac{a + b}{2},$$

ce qui suffit pour conclure.

(Attention à ne pas faire de fautes de calcul ! Il y a deux fractions qui sont sommées à gauche, d'où le 2 au dénominateur à droite.)

Solution de l'exercice 13

Le terme de gauche est égal à :

$$\frac{x^2}{ayx+bzx}+\frac{y^2}{azy+bxy}+\frac{z^2}{axz+byz}\geq\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)}$$

en utilisant l'inégalité des mauvais élèves.
à partir de là, on conclut par l'inégalité ananas-banane-cerise.

Solution de l'exercice 14

On applique l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{a^4}{1^3}+\frac{b^4}{1^3}\geq\frac{(a+b)^4}{(1+1)^3}.$$

Solution de l'exercice 15

Ici, pour appliquer l'inégalité des mauvais élèves, on a envie de faire passer les puissances troisièmes qui sont au dénominateur dans le numérateur. Pour le faire, on a un changement de variables particulièrement bien adapté à cet exercice, d'autant plus qu'il conserve la contrainte sous la même forme. Ce changement de variables est $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$. La contrainte s'écrit $xyz=1$.

L'inégalité se réécrit alors :

$$\sum_{cyc}\frac{x^3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\geq\frac{3}{2}$$

On peut alors appliquer l'inégalité des mauvais élèves de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{x^3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}&=\sum_{cyc}\frac{x^3yz}{y+z}\\&=\sum_{cyc}\frac{x^2}{y+z}\text{ (en utilisant la contrainte)}\\&\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}\text{ (en utilisant l'inégalité des mauvais élèves).}\end{aligned}$$

à partir de là, il reste à montrer que

$$\frac{x+y+z}{3}\geq 1$$

Or,

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}=1$$

par IAG.

Solution de l'exercice 16

Solution 1 :

Le terme de gauche est égal à :

$$\frac{a^3}{(ab+ac)^2}+\frac{b^3}{(bc+ba)^2}+\frac{c^3}{(ca+cb)^2}\geq\frac{(a+b+c)^3}{4(ab+bc+ca)^2}$$

en utilisant les mauvais élèves.
Il reste à montrer :

$$(a+b+c)^4\geq 9(ab+bc+ca)^2 \iff (a+b+c)^2\geq 2(ab+bc+ca)$$

Et on se ramène à l'inégalité ananas-banane-cerise.
Solution 2 :
Le terme de gauche est égal à :

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}{a}+\frac{\left(\frac{b}{c+a}\right)^2}{b}+\frac{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2}{c}&\geq\frac{\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2}{a+b+c}\text{ (d'après les mauvais élèves)}\\&\geq\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{a+b+c}\text{ (d'après Nesbitt),}\end{aligned}$$

ce qui suffit.

Solution de l'exercice 17

Le terme de gauche est égal à :

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2}{a}&\geq\frac{\left(\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}\right)^2}{a+b+c}\text{ (par mauvais élèves)}\\&=\left(\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}\right)\frac{\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}}{a+b+c}\\&\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}\frac{\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}}{a+b+c}\text{ (par mauvais élèves)}\\&=\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 18

On utilise l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{4c}{a+b}=c\frac{4}{a+b}=c\frac{(1+1)^2}{a+b}\leq c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$$

En sommant cette inégalité de façon cyclique, on obtient l'inégalité de l'énoncé.

Solution de l'exercice 19

On utilise l'inégalité des mauvais élèves :

$$\sum_{cyc}ab\frac{4}{(a+c)+(b+c)}\leq\sum_{cyc}\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}=a+b+c.$$

1 mercredi 23 après-midi : Mathieu Barré

Cours

Je vous renvoie à l'excellent cours sur les polynômes d'Igor Kortchemski.

Exercices

Exercice 1 Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ par $x - 1$ et par $x^2 - 1$.

Exercice 2 Soit $P(X)$ un polynôme unitaire de degré 2017 tel que $P(1) = 1, P(2) = 2, \dots, P(2017) = 2017$. Combien vaut $P(2018)$?

Exercice 3 Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$.

Exercice 4 Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients réels possédant n racines réelles différentes. Montrer que pour tout réel x, $P(x)P''(x) \leq P'(x)^2$. En déduire que pour $1 \leq k \leq n-1$, on a l'inégalité : $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

Exercice 5 Soient p et q fixés et z_1, z_2 et z_3 les trois racines du polynôme $X^3 + pX + q$. Calculer $\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2}$ en fonction de p et q.

Exercice 6 Soient a et b deux racines distinctes du polynôme $X^3 + 3X^2 + X + 1$. Calculer $a^2b + ab^2 + 3ab$.

Exercice 7 Soit $P(x) = x^3 - 3x - 1$. Notons x_1, x_2 et x_3 ses trois racines réelles. évaluer la quantité $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

Exercice 8 Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Existe-t-il trois entiers distincts a, b et c tels que

$$\begin{cases} P(a) = b \\ P(b) = c \\ P(c) = a \end{cases}$$

Exercice 9 Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose qu'il existe trois entiers deux à deux distincts a, b et c tels que $P(a) = P(b) = P(c) = 2$. Montrer qu'il n'existe pas d'entier k tel que $P(k) = 3$.

Exercice 10 Trouver tous les rationnels x tels que $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$.

Exercice 11 Pour quelles valeurs de k le polynôme $X^{2017} - X^{2016} + X^2 + kX + 1$ a-t-il une racine rationnelle ?

Exercice 12 Soit $f(x) = x^2 + 2017x + 1$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un réel x tel que $\underbrace{f(f(\cdots(f}_{n \text{ fois}}(x))\cdots)) = 0$.

Exercice 13 Soit P et Q des polynômes unitaires à coefficients réels, de même degré égal à 10. Montrer que si l'équation $P(x) = Q(x)$ n'a pas de racines réelles, alors l'équation $P(x+1) = Q(x-1)$ a au moins une racine réelle.

Exercice 14 Soit $n \geq 2$ et $a_1, \dots, a_n$ des entiers relatifs deux à deux distincts. Montrer que le polynôme $P(X) = (X - a_1)(X - a_2)\cdots(X - a_n) - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 15 Trouver tous les polynômes $P(x)$ à coefficients réels tels que pour tous réels a, b et c :

$$P(a+b-2c)+P(b+c-2a)+P(c+a-2b)=3P(a-b)+3P(b-c)+3P(c-a)$$

Exercice 16 Soit E l'ensemble des polynômes réels à coefficients dans $\{-1,0,1\}$ dont toutes les racines sont réelles. L'objectif de l'exercice est de décrire E.

1. Montrer qu'il suffit de connaître les éléments de E unitaires et ne s'annulant pas en 0.
2. Pour n réels strictement positifs $a_1,\ldots,a_n$, démontrer l'inégalité $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{a_i}{a_j}\geq n^2$.
3. Soit P un polynôme unitaire non constant et ne s'annulant pas en 0 qui appartient à E. Montrer que $deg(P)\leq 3$. Conclure.

Exercice 17 Supposons que toutes les racines du polynômes $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ sont réelles. Montrer que ses racines sont alors comprises dans l'intervalle de bornes

$$-\frac{a_{n-1}}{n}\pm\frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2-\frac{2n}{n-1}a_{n-2}}.$$

Exercice 18 Soit $f(x)$ un polynôme de degré supérieur à 2 dont toutes les racines sont réelles. On suppose de plus que $f(x)>0$ pour tout $-1<x<1$ et que $f(-1)=f(1)=0$.

1. Interpréter géométriquement les quantités $A=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$ et $T=\dfrac{2f'(1)f'(-1)}{f'(1)-f'(-1)}$.
2. Montrer que $A\geq\dfrac{2}{3}T$.

Solution des exercices

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Soit $P(x)=x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$. Le théorème de la division euclidienne nous donne l'existence de deux polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tels que $P(x)=(x-1)Q(x)+R(x)$. Comme $x-1$ est de degré 1, $R(x)$ est un polynôme constant et il suffit donc de l'évaluer en une valeur pour le connaître entièrement. En prenant $x=1$ dans l'égalité précédente, il vient $R(x)=P(1)=6$. On peut aussi trouver ce résultat en remarquant que $P(x)=(x-1)+(x^3-1)+(x^9-1)+(x^{27}-1)+(x^{81}-1)+(x^{243}-1)+6$ et en utilisant que x^n-1 est divisible par $x-1$ pour tout entier $n\geq 1$.

On raisonne de la même façon pour la deuxième question de l'exercice : on écrit $P(x)=(x^2-1)Q(x)+R(x)$, avec $R(x)$ de degré inférieur ou égal à 1. En évaluant en 1 et en -1 dans l'égalité précédente, on obtient $R(x)=6x$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Les conditions de l'énoncé font qu'on ne peut pas directement accéder aux racines de P. En revanche, le polynôme $Q(X)=P(X)-X$ est unitaire, de degré 2017 et on connaît 2017 de ses racines : les entiers de 1 à 2017. On connaît donc explicitement ce

polynôme : $Q(X) = (X-1)(X-2)\cdots(X-2017)$. On en déduit que $P(X) = Q(X) + X = (X-1)(X-2)\cdots(X-2017) + X$ et que $P(2018) = 2017! + 2018$.

Solution de l'exercice 3 L'énoncé donne $P(0) = 0$. En prenant $x = 0$ dans la relation fonctionnelle de P, on obtient $P(0^2+1) = P(0)^2 + 1$ soit $P(1) = 1$. En prenant $x = 1$, il vient $P(2) = 2$, puis on obtient successivement $P(5) = 5$, $P(26) = 26$, etc. Une récurrence immédiate montre alors que la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ vérifie $P(u_n) = u_n$ pour tout entier n. Le polynôme $P(X) - X$ possède ainsi une infinité de racines : les termes de la suite u_n. Il est donc nul et on en conclut que $P(X) = X$ est la seule solution au problème.

Solution de l'exercice 4 Cf. exercice 6 (page 7) du polycopié d'Igor Kortchemski susmentionné.

Solution de l'exercice 5 On exploite tout de suite les relations coefficients-racines :

$$\begin{cases} \sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3 & = 0 \\ \sigma_2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 & = p \\ \sigma_3 = z_1z_2z_3 & = -q \end{cases}$$

On calcule alors

$$\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+\frac{1}{z_3^2} = \frac{z_1^2z_2^2 + z_2^2z_3^2 + z_3^2z_1^2}{(z_1z_2z_3)^2} = \frac{(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)^2 - z_1z_2z_3(z_1+z_2+z_3)}{(z_1z_2z_3)^2} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_3\sigma_1}{\sigma_3^2} = \frac{p^2}{q^2}$$

Solution de l'exercice 6 Soit c la troisième racine de ce polynôme. Les relations coefficients-racines donnent :

$$\begin{cases} \sigma_1 = a + b + c & = -3 \\ \sigma_2 = ab + bc + ca & = 1 \\ \sigma_3 = abc & = -1 \end{cases}$$

Ainsi $a^2b + ab^2 + 3ab = a^2b + ab^2 - (a+b+c)ab = -abc = 1$.

Solution de l'exercice 7 Une première solution consiste à utiliser l'identité de Gauss

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = (x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_1 - x_1x_3)$$

qui conduit à

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3\sigma_3 + \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = 3$$

puisque $\sigma_1 = 0$ et $\sigma_3 = 1$ d'après les relations coefficients-racines.

Sinon, une solution plus astucieuse est d'exploiter le fait que $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = 0$, de sorte que pour $i \in \{1,2,3\}$, on a $x_i^3 = 3x_i + 1$. On en déduit que $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3(x_1 + x_2 + x_3) + 3 = 3$.

Solution de l'exercice 8 On utilise LE lemme à connaître sur les polynômes à coefficients entiers :

Lemme 94. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Pour tous entiers x et y,

$$\boxed{x - y \mid P(x) - P(y)}$$

Démonstration. écrivons $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. On a

$$P(x) - P(y) = a_n(x^n - y^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - y^{n-1}) + \cdots + a_1(x - y)$$

Le fait que $x^n - y^n$ soit divisible par $x - y$ pour tout entier $n \geq 1$ termine la démonstration. □

Ici, on a donc $a - b \mid P(a) - P(b)$ soit $a - b \mid b - c$. Pareillement, $b - c \mid c - a$ et $c - a \mid a - b$. On a ainsi nécessairement $|a - b| = |b - c| = |c - a|$. Ceci implique que $a = b = c$, ce qui contredit le fait que a, b et c soient distincts. Il n'y a donc pas de solution au problème.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Supposons l'existence d'un tel entier k. On aurait donc $k - a \mid P(k) - P(a)$, c'est-à-dire $k - a \mid 1$. De même, $k - b \mid 1$ et $k - c \mid 1$. Or 1 n'a que deux diviseurs (1 et -1), si bien que deux nombres parmi $k - a$, $k - b$ et $k - c$ sont égaux. Deux nombres parmi a, b et c le sont donc aussi, ce qui n'était pas permis par l'énoncé.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Après simplification, il s'agit de trouver les racines rationnelles du polynôme $P(x) = x^3 - 6x - 9$. On remarque que 3 est racine de P. Par division polynômiale, $P(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 3)$. Vu que $x^2 + 3x + 3$ n'a pas de solution réelle ($\Delta = -3$), P n'a pas d'autre racine rationnelle que 3.

Une autre idée consiste à exploiter le lemme suivant :

Lemme 95. Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients *entiers* dont on cherche les racines *rationnelles* sous la forme $x = \frac{r}{s}$, avec r et s premiers entre eux. On a alors :

$$\boxed{s \mid a_n \text{ et } r \mid a_0}$$

Démonstration.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow a_n \frac{r^n}{s^n} + a_{n-1}\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{r}{s} + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n = 0$$

Puisque $s \mid 0$, on a $s \mid a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n$. Ainsi, $s \mid a_n r^n$. Comme s et r sont premiers entre eux, c'est que $s \mid a_n$. On montre de même que $r \mid a_0$. □

D'après notre lemme, si $x = \frac{r}{s}$ est une racine rationnelle de $x^3 - 6x - 9$, alors s divise le coefficient dominant de ce polynôme, c'est-à-dire $s \mid 1$ et donc $s = 1$. En d'autres termes, toutes les solutions au problème sont entières. Et on sait même que $r \mid 9$, d'où $x \in \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\}$. On vérifie alors aisément que $x = 3$ est la seule valeur qui convienne.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> Notre dernier lemme est indispensable pour résoudre cet exercice. Si $x = \dfrac{r}{s}$ est une racine rationnelle de $X^{2017} - X^{2016} + X^2 + kX + 1$, $r \mid 1$ et $s \mid 1$. Ainsi $x \in \{-1, 1\}$. En remplaçant, pour que 1 soit racine, il faut que $k = -2$ et pour que -1 soit racine, il faut que $k = 0$.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> La présence de l'itérée n-ième de f nous suggère d'étudier ses points fixes, qui ne seront pas perturbés par cette itération. L'équation $f(x) = x$ a deux solutions réelles, dont une est négative : notons-la x_0. Dès lors, $\underbrace{f(f(\cdots(f}_{n \text{ fois}}(x_0))\cdots)) = x_0$ pour tout entier n. Or $f(f(\cdots(f(x))\cdots))$ est un polynôme de coefficient dominant 1, de sorte que $f(f(\cdots(f(x))\cdots))$ tende vers $+\infty$ en $+\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires entre x_0 et $+\infty$ nous assure alors de l'existence d'un réel x tel que $f(f(\cdots(f(x))\cdots)) = 0$.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> Cet exercice utilise le résultat très simple suivant, qu'il ne faut jamais oublier :

Lemme 96. Un polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Démonstration. Un tel polynôme tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$. Il passe donc au moins une fois par zéro d'après le théorème des valeurs intermédiaires. $\square$

Notons a_i les coefficients de P et b_i ceux de Q. L'équation $P(x) = Q(x)$ n'ayant pas de racines réelles, le polynôme $P(x) - Q(x)$ n'est pas de degré impair, d'où $a_9 = b_9$. On a alors

$$P(x+1) - Q(x+1) = (x+1)^{10} + a_9(x+1)^9 + \cdots - ((x-1)^{10} + a_9(x-1)^9 + \dots) = 20x^9 + \dots$$

où les ... désignent des termes de degré inférieur ou égal à 8. Le polynôme $P(x+1)-Q(x+1)$ est donc de degré impair : il possède une racine réelle.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> Tentons une décomposition de P sous la forme $P(X) = Q(X)R(X)$, soit $(X - a_1)\cdots(X - a_n) - 1 = Q(X)R(X)$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a donc $Q(a_i)R(a_i) = -1$, tant et si bien que $Q(a_i) = 1$ et $R(a_i) = -1$ ou $Q(a_i) = -1$ et $R(a_i) = 1$. Dans les deux cas, $Q(a_i) + R(a_i) = 0$. Le polynôme $Q + R$ possède ainsi n racines et est de degré inférieur ou égal à n. Il est donc soit nul, soit de degré exactement n. Si $Q + R = 0$, on a $P(X) = -Q(X)^2$, ce qui contredit le fait que P tende vers $+\infty$ en $+\infty$. On en déduit que $Q + R$ est de degré n. Q ou R est donc constant. Mais comme le produit des coefficients dominants de Q et R doit valoir 1, $Q = \pm 1$ ou $R = \pm 1$, ce qui achève la preuve de l'irréductibilité de P.

<u>*Solution de l'exercice 15*</u> Pour $a = b = c = 0$, on obtient $P(0) = 0$. Pour $a = b$, il vient $P(2b - 2c) + P(c - b) + P(c - b) = 3P(0) + 3P(b - c) + 3P(c - b)$. En posant $x = b - c$, on tire $P(2x) = 3P(x) + P(-x)$. Soit a_n le coefficient dominant de P. L'équation précédente mène à $2^n a_n = 3a_n + (-1)^n a_n$, ce qui implique que $n = 1$ ou $n = 2$. On cherche alors les solutions sous la forme $P(x) = ax^2 + bx$ et on trouve que seul $P(x) = x$ convient.

<u>*Solution de l'exercice 16*</u>

1. Il est clair que les éléments de E s'écrivent sous la forme $\pm X^k Q$, avec Q un élément unitaire de E n'ayant pas 0 comme racine.
2. Dans la somme considérée, on regroupe le terme (i, j) avec le terme (j, i) pour $i \neq j$, ce qui a pour effet de mettre chaque terme avec son inverse. Lorsque $i = j$, le quotient vaut 1. Ainsi,
$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{a_i}{a_j} \geq n + 2\binom{n}{2}$$
en utilisant la fameuse inégalité $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.
3. Soient $x_1, \dots, x_n$ les racines de P. Appliquons l'inégalité de la question précédente aux x_i^2 (histoire de manipuler des nombres positifs) :
$$S = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{x_i^2}{x_j^2} \geq n^2$$
Or
$$S = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j^2}\right) = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\left(\left(\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 - 2\frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_n}\right)$$

Les coefficients de P étant dans $\{-1, 0, 1\}$, les σ_i sont aussi dans $\{-1, 0, 1\}$, de sorte que l'égalité précédente donne $S \leq (1^2 + 2) \times (1^2 + 2)$. Comme $S \geq n^2$, on en déduit que $n \leq 3$.

On peut alors mener une recherche exhaustive. On trouve comme solutions $X - 1$, $X + 1$, $X^2 - 1$, $X^2 + X - 1$, $X^2 - X - 1$, $X^3 + X^2 - X - 1$ et $X^3 - X^2 - X + 1$.

Solution de l'exercice 17 La démonstration de ce magnifique résultat dû à Laguerre, utilisant les polynômes symétriques élémentaires et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, peut être trouvée dans l'ouvrage *Proofs from the Book* de Martin Aigner et GÃ¼nter M. Ziegler (au chapitre concernant les inégalités). Le lecteur intéressé y trouvera de nombreuses autres perles mathématiques.

Solution de l'exercice 18 Cette superbe application de l'IAG dûe à Polya est également consultable dans le livre cité dans l'exercice précédent.

8 Groupe D : géométrie

1 lundi 21 matin : Thomas Budzinski

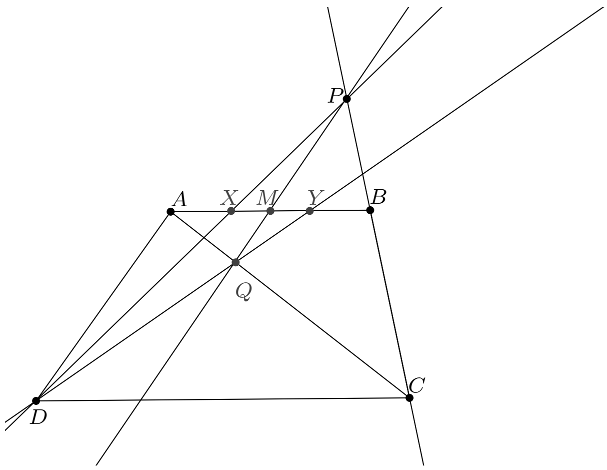
Nous avons principalement parlé d'homothéties, de chasse aux tangentes et du théorème de Monge. Le cours est essentiellement la partie 2 du cours sur les transformations géométriques, disponible sur le site d'Animath : http://www.animath.fr/IMG/pdf/transfos.pdf.

Voici les exercices traités en cours.

Exercice 1 Soient $ABCD$ un trapèze avec (AB) parallèle à (CD), M le milieu de $[AB]$ et P un point de (BC). On pose $X = (PD) \cap (AB)$, $Q = (PM) \cap (AC)$ et $Y = (PQ) \cap (AB)$.

Montrer que M est le milieu de $[XY]$.

Solution de l'exercice 1



Les droites parallèles donnent envie de chercher des homothéties qui les envoient l'une sur l'autre. Deux sont intéressantes : celle de centre Q qui envoie A sur C et Y sur D, qu'on note h_Q et celle de centre P qui envoie C sur B et D sur X, qu'on note h_P.

$h_P \circ h_Q$ est alors une homothétie qui envoie A sur B et Y sur X. Son centre est sur (AB) et sur

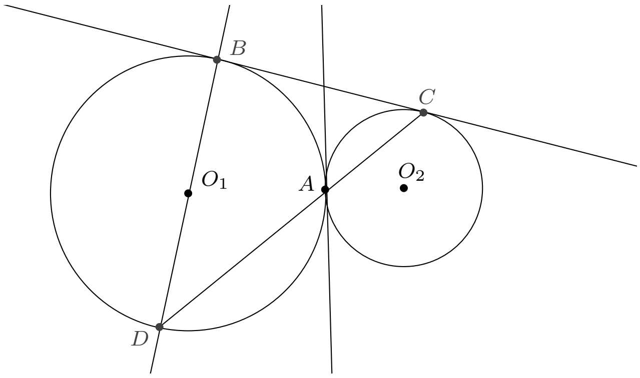
(PQ) (car c'est le centre d'une composée d'homothéties de centres P et Q), donc c'est M et, comme M est le milieu de $[AB]$, $h_P \circ h_Q$ est la symétrie centrale de centre M, donc $MX = MY$.

Remarque 97. Il est aussi possible de résoudre l'exercice en appliquant le théorème de MénélaÃ¼s dans ABC.

Exercice 2 Deux cercles Γ_1 et Γ_2 sont tangents extérieurement en A, et une tangente commune extérieure est tangente à Γ_1 en B et à Γ_2 en C. Soit D le point diamétralement opposé à B dans Γ_1.

Montrer que A, C et D sont alignés.

Solution de l'exercice 2

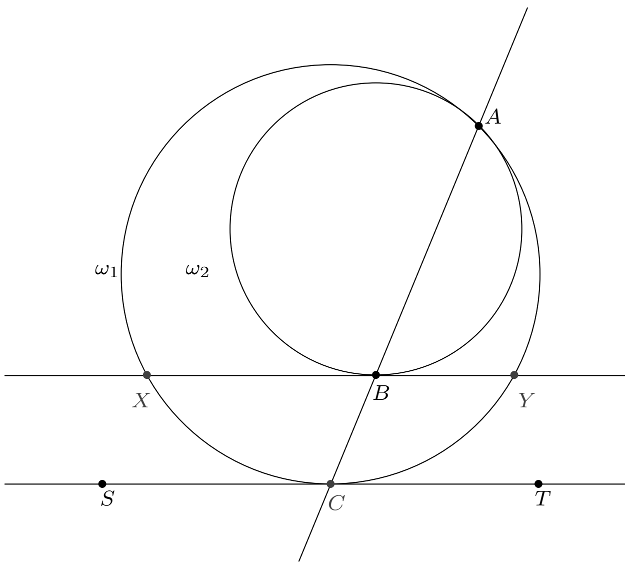


A est le centre d'une homothétie négative h qui envoie Γ_2 sur Γ_1. De plus, D est diamétralement opposé à B donc la tangente à Γ_1 en D est parallèle à (BC). On a donc $h(C) = D$, donc A, C et D sont alignés.

Exercice 3 Soient ω_1 et ω_2 deux cercles tangents en un point A avec ω_2 à l'intérieur de ω_1. Soit $B \in \omega_2$ différent de A. La tangente à ω_2 en B recoupe ω_1 en X et Y.

Montrer que $\widehat{BAX} = \widehat{BAY}$.

Solution de l'exercice 3



On veut montrer que (AB) est la bissectrice de $\widehat{XAY}$. Soit C la deuxième intersection de (AB) avec ω_1 : il suffit de montrer que C est le milieu de l'arc XY. Soit h l'homothétie de centre A qui envoie ω_2 sur ω_1 : on a $h(B) = C$ donc la tangente à ω_1 en C est parallèle à (XY). En notant (ST) la tangente comme sur la figure, on peut écrire, en utilisant le cas tangent du théorème de l'angle inscrit puis le fait que (XY) et (ST) soient parallèles :

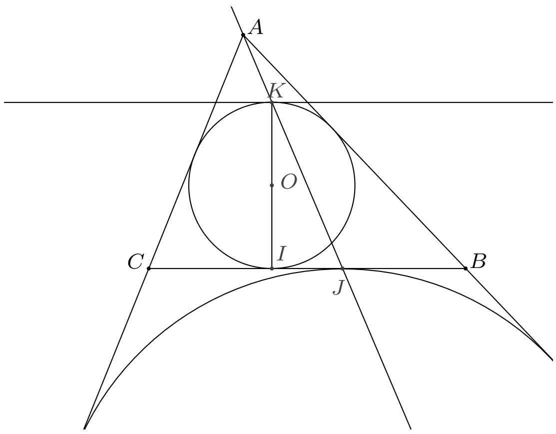
$$\widehat{CXY} = \widehat{YCT} = \widehat{CYX}$$

donc C est bien le milieu de l'arc XY de ω_1, d'où le résultat.

Exercice 4 Soit ABC un triangle. On note Γ son cercle inscrit et Γ_A son cercle A-exinscrit. Le cercle Γ touche $[BC]$ en I, et Γ_A touche $[BC]$ en J. Soit K le point de Γ diamétralement opposé à I.

Montrer que A, J et K sont alignés.

Solution de l'exercice 4

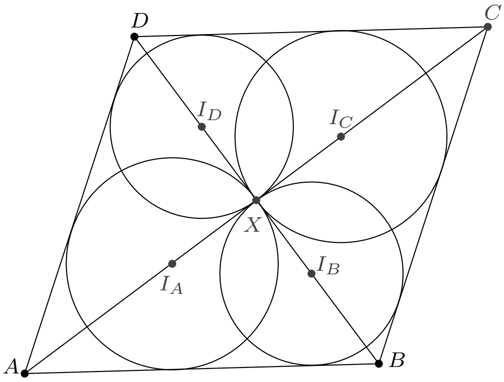


A est l'intersection des tangentes communes extérieures à Γ et Γ_A, donc c'est le centre de l'homothétie positive h qui envoie Γ_A sur Γ. De plus, K est diamétralement opposé à I sur Γ donc la tangente à Γ en K est parallèle en I à (BC). Or, la tangente à Γ_A en J est (BC), donc son image par h est tangente à Γ, différente de (BC) et parallèle à (BC). Il s'agit donc de la tangente Γ en K, donc $K = h(J)$ et A, J et K sont alignés.

Exercice 5 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On suppose que les cercles inscrits aux triangles ABC, BCD, CDA et DAB ont un point commun.

Montrer que $ABCD$ est un losange.

Solution de l'exercice 5



On note ω_A le cercle inscrit à DAB et ainsi de suite. Les cercles ω_B et ω_D sont situés de part et d'autre de (AC), donc ils ne peuvent s'intersecter que sur (AC). De même, ω_A et ω_C ne peuvent s'intersecter que sur (BD), donc l'intersection des 4 cercles ne peut être que l'intersection des diagonales, qu'on note X.

De plus, notons R et S les points de tangence de ω_B avec $[AB]$ et $[BC]$, et T et U les points de contact de ω_D avec $[CD]$ et $[DA]$. On a :

$$AB+CD = AR+BR+CT+DT = AX+BS+CX+DU = AU+BS+CS+DU = AD+BC$$

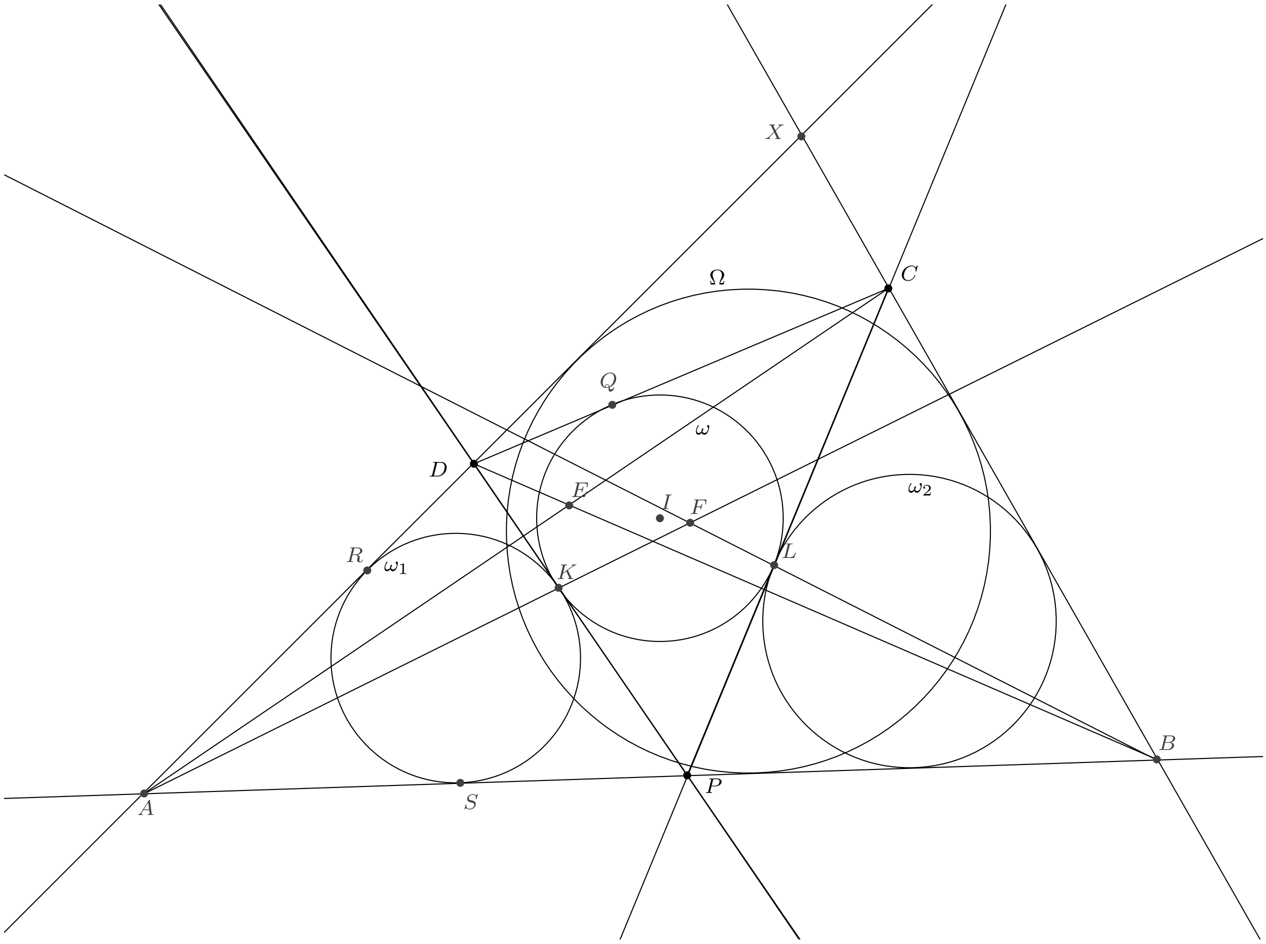
donc $ABCD$ est circonscriptible : il existe un cercle à l'intérieur de $ABCD$ tangent à tous les côtés, qu'on note ω.

Le centre de l'homothétie négative qui envoie ω_A sur ω_C est X, donc est sur (AC). De plus, A est le centre de l'homothétie positive qui envoie ω_A sur ω, et C est le centre de l'homothétie positive qui envoie ω sur ω_C, donc le centre de l'homothétie positive qui envoie ω_A sur ω_C est aussi sur (AC), donc les centres de ω_A et ω_C sont sur (AC), donc (AC) est la bissectrice de $\widehat{BCD}$ et $\widehat{DAB}$, donc le quadrilatère est symétrique par rapport à (AC) d'où $AB = AD$ et $CB = CD$. On a de même $BA = BC$ et $DA = DC$, donc $ABCD$ est un losange.

Exercice 6 (Shortlist 2007) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et P sur $[AB]$. On note ω, ω_1 et ω_2 les cercles inscrits à PCD, PAD et PBC. On note I le centre de ω. On suppose que ω_1 et ω_2 sont tangents à ω en K et L. On pose enfin $E = (AC) \cap (BD)$ et $F = (AK) \cap (BL)$.

Montrer que E, I et F sont alignés.

Solution de l'exercice 6

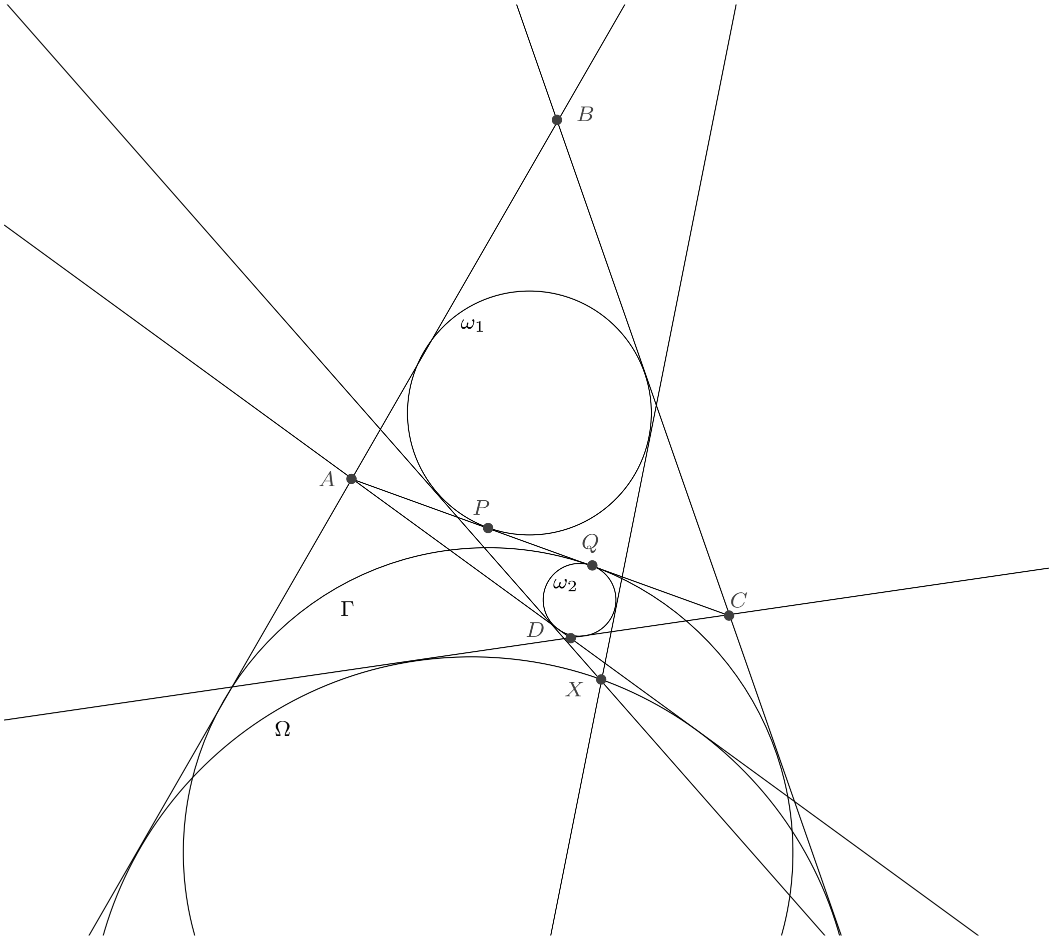


Soit $X = (AD) \cap (BC)$ et Ω le cercle inscrit à ABX : A est le centre de l'homothétie positive qui envoie Ω sur ω_1 et K le centre de l'homothétie négative qui envoie ω_1 sur ω, donc le centre de l'homothétie négative qui envoie Ω sur ω est sur (AK). De même, il est sur (BL) donc il s'agit de F. Pour que E, I et F soient alignés, il suffit donc de montrer que E est le centre de l'homothétie positive qui envoie Ω sur ω.

D'autre part, comme ω et ω_1 sont tangents, une rapide chasse aux tangentes montre que le quadrilatère $APCD$ est circonscriptible. On note Γ_1 son cercle inscrit (qui n'est pas sur la figure par souci de lisibilité). De même, $BPDC$ est circonscriptible, on note Γ_2 son cercle inscrit. A est le centre de l'homothétie positive qui envoie Ω sur Γ_1 et C le centre de celle qui envoie Γ_1 sur ω, donc le centre de l'homothétie positive qui envoie Ω sur ω est sur (AC) et par le même raisonnement avec Γ_2, il est sur (BD) donc il s'agit de E, d'où le résultat.

Exercice 7 (IMO 2008) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe avec $BA \neq BC$. On note ω_1 et ω_2 les cercles inscrits à ABC et ADC. On suppose qu'il existe Ω tangent à (BA) au-delà de A, à (BC) au-delà de C, à (AD) et à (CD).
Montrer que les tangentes communes extérieures à ω_1 et ω_2 se coupent sur Ω.

Solution de l'exercice 7



Une chasse aux tangentes exploitant l'existence de Ω donne $AB + AD = CB + CD$ (la preuve est la même que celle du théorème sur les quadrilatères circonscriptibles, mais le résultat légèrement différent car le cercle n'est pas à l'intérieur de $ABCD$). Si P et Q sont les points de tangence de ω_1 et ω_2 avec $[AC]$, on trouve donc :

$$AP = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{CD + AC - AD}{2} = CQ$$

Cela donne envie d'introduire Γ, cercle B-exinscrit à ABC : il est tangent à $[AC]$ en Q d'après les résultats habituels sur les points de contact du cercle exinscrit.

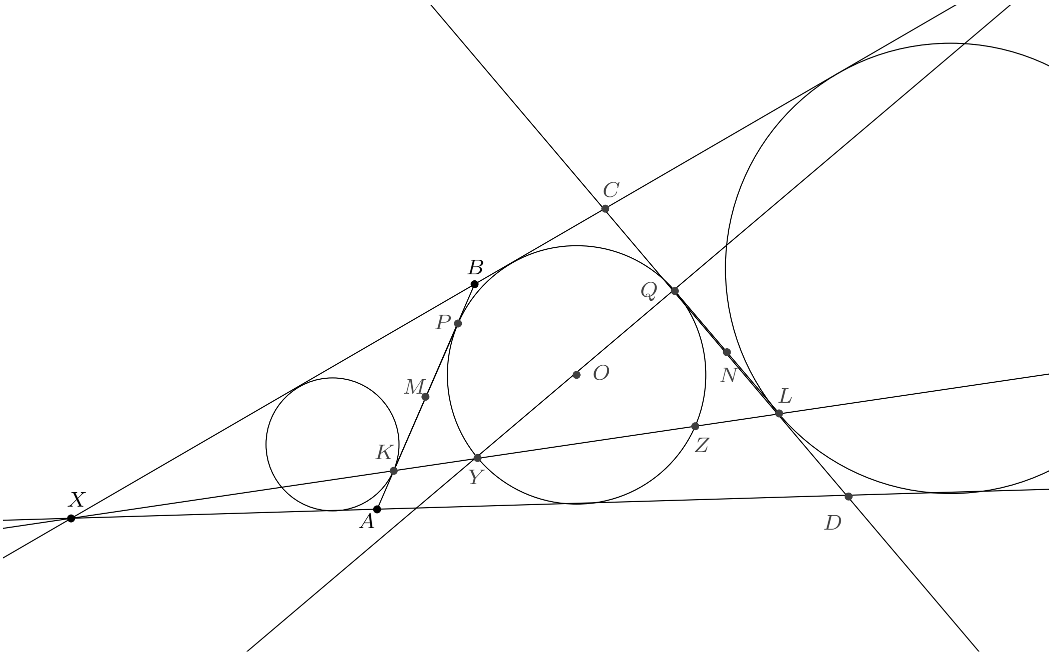
On note X le point d'intersection des tangentes communes extérieures : d'après le théorème de Monge avec ω_1, ω_2 et Γ, il est sur (BQ). De même, en introduisant Γ', cercle D-exinscrit à ACD, on obtient $X = (BQ) \cap (DP)$.

Il faut maintenant identifier le point X : une bonne figure suggère que la tangente à Ω en X est parallèle à (AC). Soit donc Y le point de Ω le plus proche de (AC) en lequel la tangente à Ω est parallèle à (AC) : en utilisant l'homothétie de centre B qui envoie Γ sur Ω, on voit que B, Q est Y sont alignés. De même, en utilisant l'homothétie de centre D qui envoie Γ' sur Ω, on voit que D, P est Y sont alignés, d'où $X = Y$ et $X \in \Omega$.

Exercice 8 Soit $ABCD$ un quadrilatère circonscriptible et ω son cercle inscrit, de centre O. On note X l'intersection de (AD) et (BC). Le cercle ω_1 est tangent aux prolongements de $[AD]$ et $[BC]$ et au côté $[AB]$ en K. Le cercle ω_2 est tangent aux prolongements de $[AD]$ et $[BC]$ et au côté $[CD]$ en L. On suppose que X, K et L sont alignés.

Montrer que O, le milieu de $[AB]$ et le milieu de $[CD]$ sont alignés.

Solution de l'exercice 8



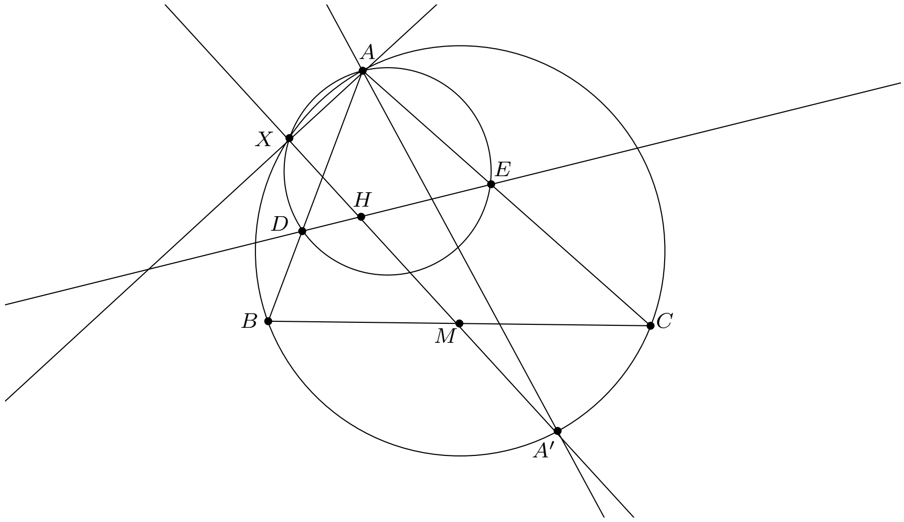
Sans perte de généralité, on suppose que $A \in [DX]$ et $B \in [CX]$. On note P et Q les points de tangence de ω avec $[AB]$ et $[CD]$. D'après l'exercice 4 appliqué au triangle XCD, la droite (XL) passe par le point de ω diamétralement opposé à Q, qu'on note Y. Dans l'exercice 4, on peut intervertir les rôles du cercle inscrit et du cercle exinscrit (la preuve est exactement la même). Appliqué au triangle XAB, cela montre que (XK) passe par le point de ω diamétralement opposé à P. On note ce point Z : les points X, K, Y, Z et L sont alignés dans cet ordre. De plus, $PQZY$ est un rectangle donc (PQ) est parallèle à (KL). Comme $\widehat{KPQ} = \widehat{LQP}$ (cas tangent du théorème de l'angle inscrit), $PQLK$ est donc un trapèze isocèle donc $PK = QL$.

De plus, notons M et N les milieux de $[AB]$ et de $[CD]$: une rapide chasse aux tangentes montre que $BP = AK = \frac{AB+AX-BX}{2}$ et $CQ = DL = \frac{CD=CX-DX}{2}$ (résultats connus sur les points de contact du cercle exinscrit) donc M et N sont aussi les milieux de $[PK]$ et $[QL]$. Or, on sait que PYZ est rectangle en Y donc PYK est rectangle en Y donc M est le centre du cercle circonscrit à PYK. En particulier, M est sur la médiatrice de $[PY]$ donc (OM) est la médiatrice de $[PY]$. De même, (ON) est la médiatrice de $[QZ]$. Comme $PQZY$ est un rectangle, ces médiatrices sont confondues, d'où le résultat.

Exercice 9 Soit ABC un triangle avec $AB \neq AC$. Soient H l'orthocentre de ABC et M le milieu de $[BC]$. Soient $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$ tels que $AD = AE$ et D, H et E sont alignés. Les cercles circonscrits à ABC et ADE se recoupent en X. Montrer que (AX) est perpendiculaire à (HM).

Solution de l'exercice 9

Soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit à ABC. On commence par remarquer que A', H et M sont alignés. En effet, les droites $(A'C)$ et (BH) sont toutes deux perpendiculaires à (AC) donc elles sont parallèles, et de même pour $(A'B)$ et (CH). Le quadrilatère $A'BHC$ est donc un parallélogramme, donc M est le milieu de $[A'H]$.



On sait de plus que (AX) est perpendiculaire à $(A'X)$, donc il suffit de montrer que X est sur la droite passant par A', H et M, donc de montrer A', H et X alignés : on a fait disparaître M !

On a $\widehat{BDH} = 180° - \widehat{ADE} = 180° - \widehat{AED} = \widehat{CEH}$ et $\widehat{DBH} = 90° - \alpha = \widehat{ECH}$, donc les triangles BDH et CEH sont semblables, donc $\frac{BD}{CE} = \frac{HD}{HE}$. D'autre part, X est le centre de la similitude directe qui envoie B sur C et D sur E, donc $\frac{XD}{XE} = \frac{BD}{CE} = \frac{HD}{HE}$. D'après le théorème de la bissectrice, (XH) est donc la bissectrice de $\widehat{DXE}$. Soit donc S le second point d'intersection de (XH) avec le cercle circonscrit à (ADE). D'après le théorème du pôle Sud, S est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{DE}$, donc S est le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit à ADE. La droite $(XH) = (XS)$ est donc perpendiculaire à (AX). Elle est donc confondue avec (XA'), donc A', H et X sont alignés, ce qui permet de conclure.

2 mardi 22 matin : Cécile Gachet

Dans ce cours, on a présenté de nombreuses propriétés de la configuration suivante : soit ABC un triangle, Ω son cercle circonscrit, ω son cercle A-mixtilinéaire, c'est-à-dire le cercle tangent intérieurement à Ω et tangent à (AB) et (AC). On a repris une partie des propriétés énoncées dans le livre original d'Evan Chen *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads* (dont la lecture est par ailleurs particulièrement conseillée aux élèves désireux de commencer l'étude des inversions avec beacoup de problèmes et très peu d'explications plus générales sur la géométrie projective complexe), ainsi que des résultats exposés dans l'admirable cours de géométrie de Jean-François Martin au stage de Montpellier 2014.

On en a aussi profité pour revoir (ou découvrir) le théorème de Pappus et le théorème de Pascal (pour une introduction thÃ©orique plus détaillée à ce sujet, voir le premier cours de géométrie projective réelle du groupe C de ce polycopié, qui manque cependant cruellement d'exercices), les fondements à connaÃ®tre sur les involutions projectives (plus de précisions dans le livre d'Evan Chen conseillé ci-dessus), quelques résultats sur les conjugués isogonaux (détaillés en partie dans le cours de géométrie de Jean-Louis Tu au groupe C au stage de Montpellier 2014), faire beaucoup de chasse aux angles. Ces divers points ont probablement été expliqués trop vite pour une partie du groupe : j'en suis désolée. Dans ce cas, je vous conseille de retravailler sur ce cours après avoir lu ou en lisant les références conseillées ci-dessus (ou en suivant l'enseignement de qualité du club de mathématiques discrètes de Lyon) pour apprendre les éléments de géométrie projective nécessaires. Avec plus de familiarité avec ces notions, j'espère de tout cœur que les propriétés dont nous avons discuté pourrons Ãªtre comprises, retenues, voire appréciées de tous.

3 mercredi 23 matin : Alexander Semenov

Un cours sur les inversions peut par exemple être trouvÃ© dans le livre "Transformations gÃ©omÃ©triques" de Yaglom.

Exercices

Ces exercices sont issus pour la plupart d'entre eux du livre "Transformations gÃ©omÃ©triques" de Yaglom.

Exercice 1 Soit S un cercle qui est tangent à la fois aux cercles S_1 et S_2. Montrer que la droite qui relie les points de contact passe par un des deux centres d'homothÃ©tie qui envoie S_1 sur S_2.

Exercice 2 Soient A, B, C, D quatre points du plan non collinÃ©aires ou cocycliques. Montrer que l'angle entre les cercles circonscrits à ABC et ABD est Ã©gal à l'angle entre les cercles circonscrits à CDA et CDB.

Exercice 3 Soient S_1, S_2, S_3, S_4 des cercles, tels que pour $i = 1, 2, 3, 4$ S_i est tangent à S_{i-1} et S_{i+1} où les indices sont pris modulo 4. Montrer que les quatre points de contact ainsi introduits sont cocycliques.

Exercice 4 1) Soient $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ six points du plan. Montrer que si les cercles circonscrits à $A_1A_2B_3$, $A_1B_2A_3$ et $B_1A_2A_3$ sont concourants, alors les cercles circonscrits à $B_1B_2A_3$, $B_1A_2B_3$ et $A_1B_2B_3$ le sont aussi.

2) Soient S_1, S_2, S_3, S_4 quatre cercles et A_1, A_2 les points d'intersection de S_1 et S_2, B_1, B_2 ceux de S_2 et S_3, C_1, C_2 ceux de S_3 et S_4 et D_1, D_2 ceux de S_4 et S_1. Montrer que si $A_1B_1C_1D_1$ sont cocycliques ou alignÃ©s, alors $A_2B_2C_2D_2$ sont cocycliques ou alignÃ©s.

3) Soient $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ six points du plan. Montrer que si les cercles circonscrits à $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$ et $A_2B_2C_1$ sont concourants, alors les cercles circonscrits à $A_1B_1C_2$, $A_1B_2C_1$, $A_2B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ sont concourants.

Exercice 5 1) On appelle point magique de 2 droites leur point d'intersection.

Lorsqu'on a 3 droites, le cercle qui passe par les points magiques des trois couples de droites s'appelle le cercle magique des trois droites.

Pour $n \geq 4$:

Si n est pair, lorsqu'on a n droites, on considère les cercles magiques de tous les sous-ensembles possibles de $n - 1$ droites. Montrer alors que ces cercles sont concourants. Leur point de concours s'appelle point magique de ces n droites.

Si n est impair, lorsqu'on a n droites, on considère les points magiques de tous les sous-ensembles possibles de $n-1$ droites. Montrer alors que ces points sont cocycliques. Le cercle sur lequel se trouvent tous ces points s'appelle cercle magique de ces n droites.

2) Soient deux droites l_1 et l_2 sur lesquelles on choisit respectivement les points A_1 et A_2 diffÃ©rents de leur point d'intersection. Le cercle qui passe par A_1, A_2 et par le point d'intersection de l_1 et l_2 s'appelle cercle magique de cette paire de droites avec les points qu'on a choisi dessus.

Lorsqu'on a 3 droites et qu'on choisit sur chacune d'entre elles un point qui est diffÃ©rent d'un point d'intersection, on considère les cercles magiques de tous les sous-ensembles possibles de 2 droites. Tous ces cercles magiques sont concourants en un point qu'on appelera point magique de ces trois droites avec les points qu'on a choisi dÃ©jà. Il s'agit là du thÃ©orème de Miquel le plus simple et fait en gÃ©nÃ©ral l'objet d'un des premiers exercices sur la chasse aux angles qu'on donne aux Ã©lèves des groupes A et B.

Pour $n \geq 4$:

Si n est pair, lorsqu'on a n droites et qu'on choisit sur chacune d'entre elles un point qui est diffÃ©rent d'un point d'intersection, on demande en plus que ces points soient cocycliques. On considère les points magiques de tous les sous-ensembles possibles de $n-1$ droites. Montrer que tous ces points sont cocyclique sur un cercle qu'on appelle cercle magique de ces n droites.

Si n est impair, lorsqu'on a n droites et qu'on choisit sur chacune d'entre elles un point qui est diffÃ©rent d'un point d'intersection, on demande en plus que ces points soient cocycliques. On considère les cercles magiques de tous les sous-ensembles de $n-1$ droites possibles. Montrer que tous ces cercles sont concourants en un point qu'on appelle point magique de ces n droites.

Remarque Pour l'exercice ci-dessus, les droites considÃ©rÃ©es ne sont pas nÃ©cessairement distinctes. Par contre, si on choisit deux fois la même droite, il faut choisir un point sur cette droite qu'on va considÃ©rer comme point d'intersection. Dans ce cas, les rÃ©sultats ci-dessus sont vrais avec les même preuves.

Exercice 6 1) Soir R et r les rayons respectivement du cercle circonscrit et du cercle inscrit d'un triangle. Soit d la distance entre les centres de ces cercles. Montrer que :

$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}$$

RÃ©ciproquement, si R et r sont les rayons de deux cercles et d la distance entre leurs centres qui vÃ©rifient la relation ci-dessus, montrer qu'on peut les voir comme cercles circonscrits et inscrits d'un certain triangle (et même d'une infinitÃ© de triangle ; tout point du grand cercle peut être choisi comme un des sommets du triangle).

2) Soit R et r_1 les rayons du cercle circonscrit et d'un cercle exinscrit d'un triangle. Soit d_1 la distance entre leurs centres. Montrer que ;

$$\frac{1}{d_1 - R} - \frac{1}{d_1 + R} = \frac{1}{r_1}$$

Exercice 7 Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit Γ son cercle sirconscrit. Soit l une droite tangente à Γ. Soit l_a, l_b, l_c les droites symÃ©triques à l par rapport respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB).

Montrer que le cercle circonscrit au triangle dÃ©terminÃ© par les droites l_a, l_b, l_c est tangent à Γ.

Exercice 8 Soient Σ_1 et Σ_2 deux cercles qui sont tangents intÃ©rieurement. Dans la figure ainsi obtenue, on inscrit successivement les cercles $S_0, S_1, S_2, ...$, de sorte à ce que le centre du cercle S_0 soit sur la droite l qui joint les centres des cercles Σ_1 et Σ_2, que S_0 soit tangent à Σ_1 et Σ_2 et que pour tout $n \geq 1$ S_n soit tangent à S_{n-1}, à Σ_1 et à Σ_2.

On note les rayons des cercles $S_0, S_1, S_2, S_3, ...$ par $r_0, r_1, r_2, r_3, ...$ et les distance de leurs centres à la droite l par $d_0, d_1, d_2, d_3, ...$

1) Montrer que $d_n = 2nr_n$

2) Exprimer r_n en fonction de R_1, R_2 (les rayons des cercles Σ_1 et Σ_2) et n.

Exercice 9 Soit Σ_1 et Σ_2 deux cercles qui ne se coupent pas. On appelle chaîne un nombre fini de cercles $S_1, S_2, ..., S_n$ tels que chacun de ses cercles est tangent à Σ_1, Σ_2 et à deux autres cercles de la chaîne. Les cercles Σ_1 et Σ_2 s'appellent la base de la chaîne. Montrer que si une paire de cercles Σ_1 et Σ_2 est base d'une certaine chaîne, alors elle est Ã©galement base d'une infinitÃ© de chaînes qui sont constituÃ©es du même nombre de cercles.

Exercice 10 (thÃ©orème de Poncelet) Soient S et s deux cercles tels qu'il existe un polygone tel que S est son cercle circonscrit et s est son cercle inscrit. Montrer qu'il existe une infinitÃ© de tels polygones et que tout point du cercle S peut être sommet d'un tel polygone.

Exercice 11 Soit S une cercle et M un point qui n'est pas sur ce cercle. Par M, on fait passer un cercle variable Σ, qui coupe S en A et en B. Trouver le lieu des points d'intersection de (AB) avec la tangente à Σ en M.

Solutions

Exercice 1 Soient A et B les points de contact de S avec S_1 et S_2, O_1 et O_2 les centres de S_1 et S_2. Soit O le point d'intersection entre (AB) et (O_1O_2). (dans le cas où ces droites sont parallèles, O est le point à l'infini. On prÃ©cisera entre parenthèses la solution dans ce cas dÃ©gÃ©nÃ©rÃ©)

On considère l'inversion de centre O et de degrÃ© $OA.OB$ (dans le cas dÃ©gÃ©nÃ©rÃ©, on considère la symÃ©trie axiale par rapport à la mÃ©diatrice de $[AB]$). Cette transformation involutive du plan Ã©change les objets suivants :

$$\begin{aligned} A &\longleftrightarrow B \\ S &\longleftrightarrow S \\ S_1 &\longleftrightarrow S_2 \end{aligned}$$

(justifier le)

Ceci preouve que O est un centre d'homothÃ©tie qui envoie S_1 sur S_2.

Exercice 2 On peut appliquer une inversion de centre A.

Exercice 3 On peut appliquer une inversion centrÃ©e en un des points de contact.

Exercice 4 1) Soit P le point de concours des 3 cercles. En appliquant une inversion de centre P, on se ramène au thÃ©orème de Miquel le plus simple.

2) En faisant une inversion de centre A_1, on se ramène à une chasse aux angles simple.

3) Il suffit d'appliquer une inversion du centre le point de concours des 4 cercles. C'est le thÃ©orème de Miquel pour le quadrilatère complet, qui est un exercice classique sur les similitudes. Ou bien se thÃ©orème se prouve avec le thÃ©orème de la droite de Simpson.

Exercice 5 1) On va raisonner par rÃ©currence. On fait l'initialisation pour $n \leq 4$ (en effet, on peut remarquer que la rÃ©currence ci-dessous ne marche pas encore pour $n = 4$).

Pour l'hÃ©rÃ©ditÃ©, on va distinguer les cas n pair et n impair.

Pour le cas n impair : On a $l_1, .., l_n$ n droites distinctes. Pour $i = 1, ..., n$, si on enlève l_i à l'ensemble des n droites, on obtient $n - 1$ droites et on note A_i leur point magique. On veut montrer que $A_1 ... A_n$ sont cocycliques. Il suffit de montrer que si on prend 4 de ces n points, on obtient 4 points cocycliques. Sans perte de gÃ©nÃ©ralitÃ©, il suffit de montrer que $A_1A_2A_3A_4$ sont cocycliques. Pour $i \neq j$, si on enlève l_i et l_j à l'ensemble de n droites, on obtient $n - 2$ droites et on note S_{ij} leur cercle magique. Pour i, j, k deux à deux distincts, si on enlève l_i, l_j, l_k à l'ensemble de n droites, on obtient $n - 3$ droites et on note A_{ijk} leur point magique. Pour i, j, k, m deux à deux distincts, si on enlève l_i, l_j, l_k, l_m à l'ensemble de n droites, on obtient $n - 4$ droites et on note S_{ijkm} leur cercle magique (dans le cas où $n = 5$, on peut considère que le cercle magique d'une seule droite est la droite elle-même).

On remarque que :

- ▷ les cercles S_{12} et S_{23} se coupent en A_2 et A_{123}
- ▷ les cercles S_{23} et S_{34} se coupent en A_3 et A_{234}
- ▷ les cercles S_{34} et S_{41} se coupent en A_4 et A_{134}
- ▷ les cercles S_{41} et S_{12} se coupent en A_1 et A_{124}

Mais, les points $A_{123}A_{234}A_{134}A_{124}$ sont cocycliques sur le cercle S_{1234}. On en dÃ©duit la cocyclicitÃ© de $A_1A_2A_3A_4$ grâce à l'exercice 4,2.

On laisse le lecteur utiliser l'exercice 4,1 pour faire le cas n pair.

2) On laisse le lecteur dÃ©duire le cas $n = 4$ à partir de l'exercice 4,2.

On raisonne par rÃ©currence pour $n \geq 5$.

On va rÃ©diger le cas n impair et laisser au lecteur le cas n pair. On introduit des notations similaires que dans le corrigÃ© de la question 1.

Il suffit de montrer que les cercles S_1, S_2, S_3 sont concourants.

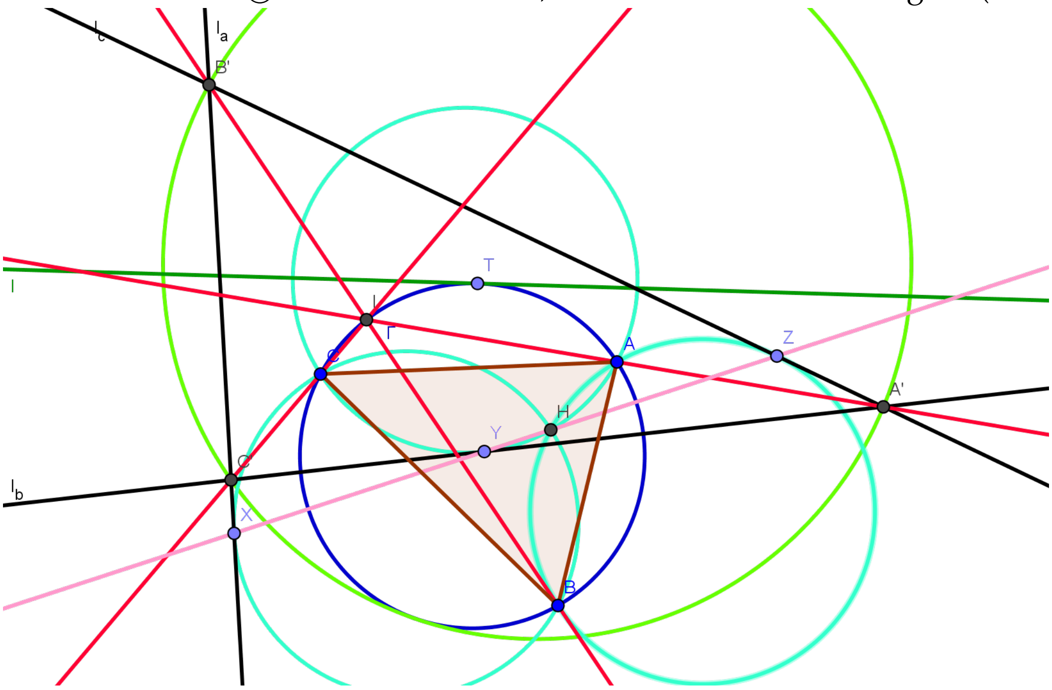
On remarque :

- ▷ S_1 passe par A_{12}, A_{13}, A_{14}
- ▷ S_3 passe par A_{13}, A_{23}, A_{34}
- ▷ S_2 passe par A_{23}, A_{12}, A_{24}
- ▷ S_{134} passe par A_{14}, A_{34}, A_{13}
- ▷ S_{234} passe par A_{34}, A_{24}, A_{23}
- ▷ S_{124} passe par A_{12}, A_{41}, A_{24}

Mais, les trois derniers cercles sont concourants en A_{1234}, donc par l'exercice 4,1, les trois premiers cercles sont concourants.

Exercice 6 cf le livre de Yaglom

Exercice 7 Pour rÃ©soudre cet exercice, il convient de faire une figure (ou un schÃ©ma).



Il faut d'abord commencer par chercher une dÃ©finition alternative du trilatère $l_a l_b l_c$. Notons $A'B'C'$ les sommets de ce trilatère (de sorte à ce que chaque sommet soit opposÃ© à l'arrête de même lettre). On note $\alpha = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$, $\beta = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et $\gamma = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.

La composÃ©e de la rÃ©flexion par rapport à (BC) puis de la rÃ©flexion par rapport à (CA) transforme l_a en l_b. Cette composÃ©e est une rotation de centre C et d'angle 2γ. Par consÃ©quent, C est à la même distance de l_a et l_b et l'angle entre droites vaut $(l_a, l_b) = 2\gamma$. Le même raisonnement peut être fait de manière cyclique pour les autres lettres.

On en dÃ©duit que les angles du triangle $A'B'C'$ sont $180 - 2\alpha, 180 - 2\beta, 180 - 2\gamma$, et que les bissectrices de ce triangle sont $(AA'), (BB'), (CC')$. Soit I le centre du cercle inscrit de $A'B'C'$. On voit que l'angle au somment I du triangle $B'IC'$ est $180 - \alpha$. On en dÃ©duit que I est sur Γ.

On voit qu'avec ce qui est Ã©crit ci-dessus, le triangle $A'B'C'$ n'est pas uniquement dÃ©terminÃ© à partir de ABC. On a besoin donc de caractÃ©risations supplÃ©mentaires. Soit T le point de contact entre l et Γ. Si on reflète T par rapport à $(BC), (CA), (AB)$, alors on obtient des points X, Y, Z qui se trouvent sur les droites l_a, l_b, l_c respectivement. Ils sont alignÃ©s sur une droite de Steiner du triangle ABC qui passe par son orthocentre H (exercice).

Enfin, on peut reflÃ©ter Γ par rapport à $(BC), (CA), (AB)$ pour obtenir trois cercles qui passent par H et qui sont tangents à l_a en X, à l_b en Y et à l_c en Z respectivement.

Maintenant, tout est dÃ©terminÃ© uniquement.

Une manière Ã©lÃ©gante de s'en sortir à partir de là, c'est d'utiliser l'exercice 5,1 pour $n = 5$ dans un cas dÃ©gÃ©nÃ©rÃ©.

On choisit les cinq droites suivantes : l_a, l_b, l_c et deux fois la droite de Steiner XYZ en supposant qu'elle s'intersecte avec elle-même en H. Notons K le point magique associÃ© au quadrilatère formÃ© par l_a, l_b, l_c et XYZ (en particulier, K appartient au cercle circonscrit de $A'B'C'$). On voit alors que les cinq points magiques qui apparaissent pour ces cinq droites sont : A, B, C et deux fois K. Leur cocyclicitÃ© dÃ©montre ce qu'il fallait.

D'autres preuves sont possibles et ont probablement Ã©tÃ© discutÃ©es en classe.

Exercice 8 cf le livre de Yaglom

Exercice 9 cf le livre de Yaglom

Exercice 10 cf le livre de Yaglom

Exercice 11 cf le livre de Yaglom

9 Groupe D : combinatoire

1 lundi 21 après-midi : Guillaume Conchon–Kerjan

Introduction

Les monovariants s'utilisent dans un contexte où sur un ensemble de situations (par exemple une grille d'échecs contenant des lampes, la situation étant décrite par l'état de chaque lampe), on peut passer de l'une à l'autre par certaines opérations (par exemple allumer n'importe quelle voisine de n'importe quelle lampe déjà allumée). On introduit un compteur qui associe un certain nombre à chaque situation, qui vérifie une propriété de monotonie : lorsqu'on fait une opération, ce compteur augmente toujours (ou diminue toujours). Dans notre exemple, un compteur naturel serait le nombre de lampes allumées. On voit qu'à chaque opération, le compteur augmente strictement.

Le choix du compteur dépend de ce qu'on veut faire : ici, il est strictement croissant, donc cela permet de prouver qu'on ne peut pas passer d'une situation A à une situation B s'il y a plus de lampes allumées en A qu'en B.

Parfois, on chercher simplement à prouver qu'on ne peut faire qu'un nombre fini d'opérations. Lorsqu'on peut caractériser la situation par un compteur borné qui augmente (ou diminue, après tout) d'au moins 1 à chaque fois, c'est gagné.

Le raisonnement est dans certains cas un peu subtil (voir exercices 1 et 2) : on doit choisir soi-même quelles seront les opérations autorisées, trouver un monovariant sur ces opérations, et prouver que la situation que l'énoncé demande d'atteindre est le seul maximum du compteur... en prenant garde à ce qu'on finisse par l'atteindre en un nombre fini d'opérations (parce qu'il n'y a qu'un nombre fini de situations possibles, ou parce que le compteur est borné et qu'on augmente d'au moins une certaine constante à chaque fois).

Ce fameux "compteur" n'est pas toujours un nombre entier ou réel : cela peut-être l'ordre lexicographique sur une suite de réels (l'ordre lexicographique est celui du dictionnaire : par exemple pour comparer (a, b, c) et (d, e, f), on compare d'abord a et d, puis si $a = d$, on compare b et e, et en cas d'égalité, c et f.

Assez disserté, passons aux exercices !

Exercices

Exercice 1 La reine d'Angleterre décide de partager la Chambre des Lords de façon originale : chaque Lord ayant au plus trois ennemis (l'inimité est réciproque), elle veut faire de groupe ou chacun aura au plus un ennemi. Peut-elle y arriver ?

Exercice 2 Cécile veut apparier $2n$ points en traçant n segments, de sorte que chaque point soit relié à un seul autre, et qu'aucun segment n'en intersecte un autre. Prouver que c'est possible.

Exercice 3 Un virus se reproduit sur une grille carrée $n \times n$: lorsqu'une case vide est bordée par au moins deux cases infectées, le virus s'y installe. Combien faut-il de quand on a au moins 2 voisins.

Exercice 4 Sur le plan, on part de $(1, \sqrt{2})$. Quand on est en (x, y), on a le droit d'aller en $(x, y + 2x), (x, y - 2x), (x + 2y, y)$ ou $(x - 2y, y)$. On ne peut toutefois se déplacer au point où l'on se trouvait à l'étape précédente. Montrer qu'on ne peut revenir au point de départ.

Exercice 5 2017 mésanges sont réparties sur 120 arbres. Un chasseur maladroit tire un coup de feu (manqué) par minute. Chaque coup effraie une mésange qui s'envole vers un autre arbre contenant au moins autant de congénères que celui dont elle s'élance (en la comptant dans l'arbre initial). Montrer qu'après que le chasseur aura gaspillé un certain fini de balles, toutes les mésanges seront sur le même arbre.

Exercice 6 (Liste courte 2009) 2009 cartes, chacune ayant un côté bleu et un côté jaune, sont alignées sur une (grande) table, toutes côté bleu. Deux personnes situées du même côté de la table, pratiquent un jeu où on alterne les coups. Un coup consiste à choisir un bloc de 50 cartes dont la première est bleue et de retourner toutes ces cartes. Lorsqu'une personne ne peut plus jouer, elle a perdu.
(a) Le jeu se termine-t-il forcément ?
(b) Quelqu'un a-t-il une stratégie gagnante ?

Exercice 7 (Liste courte 2012) Des entiers positifs, en nombre fini, sont écrits de gauche à droite sur une ligne. Alice choisit deux nombres voisins x et y tels que $x > y$, x étant à droite de y, et remplace la paire (x, y) soit par $(y + 1, x)$, soit par $(x - 1, x)$. Puis, elle choisit de nouveau une paire pour appliquer cette opération, ainsi de suite. Montrer qu'elle ne pourra pas continuer indéfiniment.

Exercice 8 (non traité en classe) La mairie a fait installer une belle œuvre d'art sur la place de la ville. Elle est constituée d'un certain nombre de tas (non-vides) de cailloux, comportant $\frac{n(n+1)}{2}$ cailloux au total. Une nuit, un plaisantin prend un caillou par tas, et constitue un nouveau tas. La nuit suivante, un autre fait de même, et ainsi de suite. Arrivera-t-on un jour dans une configuration stable, c'est-à-dire avec toujours le même nombre de tas comportant le même nombre de cailloux ?

Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On fait d'abord deux groupes quelconques. On compte le nombre total de relations d'inimité entre deux Lords d'un même groupe : si un Lord a au moins deux ennemis dans son groupe, on le change de groupe. Cela supprime deux relations d'inimité.

On en rajoute au plus une. Donc le nombre de relations d'inimité diminue d'au moins 1 à chaque opération, donc on ne peut plus agir au bout d'un certain temps : cela signifie qu'il n'y a plus de Lord ayant au moins deux ennemis dans son groupe, donc la reine est satisfaite.

Solution de l'exercice 2 Cette fois-ci l'opération choisie par Cécile est le "décroisement" : si $[AB]$ et $[CD]$ s'intersectent en E, on remplace ces segments par $[AC]$ et $[BD]$. Attention, cela ne diminue pas forcément le nombre de croisements, car $[AC]$ ou $[BD]$ peuvent couper d'autres segments de l'appariement... Elle doit donc choisir autre chose pour notre monovariant. On remarque que $AB + CD = AE + EB + CE + ED = (AE + CE) + (EB + ED) > AC + BD$ par inégalité triangulaire. Donc la somme des longueurs des n segments est toujours strictement décroissante. Elle décroît peut-être de "très peu" à chaque étape - on ne peut en tout cas pas mesurer de combien. Toutefois, il y a un nombre fini de points, donc un nombre fini de segments qui existent, donc un nombre fini d'appariements possibles : comme on a un nombre fini de situations, on finit par tomber sur une situation d'où on ne peut décroître strictement. Cela signifie que Cécile ne peut plus opérer, donc qu'il n'y a plus de croisement, ce qu'on voulait.

Solution de l'exercice 3 Mais d'où sort cette exigence qu'on ne puisse contaminer une cellule que si elle a au moins deux voisines ? En faisant quelques dessins, on voit qu'ainsi, à chaque nouvelle contamination, le périmètre de l'ensemble formé par les cellules infectées n'augmente pas. Or, on part d'un périmètre d'au plus $4(n - 1)$ (si on fixe la longueur des petits carrés à 1). Le grand carré a un périmètre total égal à $4n > 4(n - 1)$ donc il ne peut être entièrement contaminé. Il y aura donc toujours une cellule saine.

Solution de l'exercice 4 On remarque que pour un point (x, y) tel que $|x| \neq |y|$ et $xy \neq 0$, trois des quatre mouvements possibles aboutissent à une position où les deux coordonnées ont strictement augmenté en valeur absolue.
Partant de $(1, \sqrt{2})$, on voit qu'on reste sur des points de la forme $(a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2})$ où a, b, c, d sont des entiers ayant toujours la même parité (a, d impairs, b, c pairs). Ainsi, on ne pourra qu'atteindre des points vérifiant la condition précédente d'éloignement. On remarque en outre qu'après un mouvement d'éloignement, les trois mouvements autorisés depuis le nouveau point (on ne peut faire demi-tour) sont les trois mouvements qui l'éloignent encore plus de l'origine.
Enfin, si $(1, \sqrt{2})$ appartient à un cycle, on peut le parcourir dans les deux sens : on vérifie aisément que si on peut passer de (x, y) à (a, b) par un mouvement autorisé, alors on peut faire l'inverse. Dans un tel cycle, qui ne peut consister en un unique aller-retour, le sommet de départ ou le suivant possède deux voisins (ie atteignables par un mouvement) présents dans le cycle. Donc depuis ce point, il y a au plus deux mouvements qui nous envoient "à l'infini". Ceci contredit ce qu'on a établi au paragraphe précédent. Ainsi, partant de $(1, \sqrt{2})$, on ne peut revenir au départ.

Solution de l'exercice 5 On note $a_1, \dots, a_{120}$ le nombre de mésanges sur chaque arbre. On cherche un compteur qui avantage les situations où les a_i sont "déséquilibrés". On peut donc tester une fonction, comme $x \to x^2$: on pose

$$c(a_1, \dots, a_{120}) := a_1^2 + \dots a_{120}^2.$$

Lors d'un mouvement, on change a_i et a_j pour certains i, j tels que $a_i \geq a_j$ en $a_i + 1$ et $a_j - 1$. Ainsi, c augmente de $(a_i + 1)^2 + (a_j - 1)^2 - a_i^2 - a_j^2 = 2(a_i - a_j) + 2 \geq 2$. c est borné par

$(a_1 + \dots a_{120})^2 = 2017^2$. Il est maximal lorsque $\sum_{i<j} a_i a_j = 0$, qui correspond au cas où seul un $a_i \neq 0$, donc où toutes les mésanges sont sur le même arbre.

Solution de l'exercice 6

a) Le jeu se termine forcément : on représente la suite par un nombre à 2009 chiffres, en remplaçant les cartes côté bleu par des 1 et celles côté jaune par des 0. On voit ainsi l'utilité de la condition exigeant que la carte la plus à gauche d'un bloc qu'on retourne soit bleue : le chiffre le plus à gauche parmi ceux qu'on change est un 1 qui devient 0. On passe donc d'un entier à un entier strictement plus petit. Or une suite strictement décroissante d'entiers positifs fini par atteindre 0. Cela correspond à un état où toutes les cartes sont du côté jaune.

b) On regarde les 40 cartes dont la position à partir de la droite est un multiple de 50 : à chaque coup, on en retourne une et une seule. Donc lorsque le premier joueur joue, il laisse toujours un nombre impair de telles cartes du côté bleu. Il y en a donc au moins une, qui est à la tête d'un bloc de 50 cartes, permettant au second joueur de jouer. Ce dernier ne peut donc pas perdre. D'après a), il finit par gagner à coup sûr.

Solution de l'exercice 7 On remarque que la valeur la plus grande de la suite sera toujours la même, notons la M. Les opérations ont tendance à augmenter les nombres (la somme totale augmente strictement sauf quand $y = x - 1$), et à décaler les gros vers la gauche. On conçoit donc le compteur suivant : pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_1, \dots, a_n$ les nombres de gauche à droite et on pose

$$c(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{-i}.$$

On vérifie que c augmente d'au moins 2^{-n} à chaque opération, et qu'il est borné par M. Ceci permet de conclure.

Solution de l'exercice 8 On aboutit à une position stable avec n tas de $1, 2, \dots, n$ pierres. Pour trouver un monovariant, on représente les pierres par des carrés (x, y) du réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (qui se trouve dans le quadrant d'abscisse et d'ordonnées positives du plan). On range les pierres de la façon suivante : le plus grand tas, de taille a_1, occupe les a_1 cases en bas de la colonne la plus à gauche, le deuxième plus grand tas la deuxième colonne de même, etc.

Lorsqu'on fait une opération, on choisit de retirer la case du haut de chaque colonne, et de former avec ces cases une nouvelle colonne, que l'on insère à la bonne place pour que l'ordre décroissant des colonnes soit préservé. On vérifie que l'on diminue ainsi strictement la somme totale des coordonnées des cases occupées par des pierres (donc d'au moins 1 car elle est entière), sauf si on est sur la configuration citée au début.

2 mardi 22 après-midi : Thomas Budzinski

Résumé du cours

Définition 98. Un *espace de probabilité* fini est un ensemble Ω muni d'une application $\mathbb{P}$ de l'ensemble des parties de Ω dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

- ▷ Si $A \cap B = \varnothing$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- ▷ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Les parties de Ω sont alors appelées *événements*.

Proposition 99. ▷ $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

▷ $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
▷ Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
▷ $\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_k) \leq \mathbb{P}(A_1) + ... + \mathbb{P}(A_k)$.

Définition 100. ▷ Deux événements A et B sont dits *indépendants* si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
▷ k événements A_1, ..., A_k sont dits *indépendants* si pour tout $I \subset [\![1, k]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Définition 101. Une *variable aléatoire* est une application X de Ω dans $\mathbb{R}^+$. On notera $\mathbb{P}(X = a)$ pour $\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = a\}\big)$, et de même pour $X \leq a$, $X \in E$ etc...

Définition 102. Soit X une variable aléatoire. L'*espérance* de X est le nombre :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega)$$

Remarque 103. Si $\mathbb{E}[X] \geq a$, alors il existe ω tel que $X(\omega) \geq a$.

Proposition 104. Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ et, si $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$.

Proposition 105. Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble aléatoire de E. Alors :

$$\mathbb{E}[|A|] = \sum_{x \in E} \mathbb{P}(x \in A)$$

ThéorÃ¨me 106. (Inégalité de Markov) Soient X une variable aléatoire positive et $a > 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

Exercices

Exercice 1 Montrer qu'il est possible de colorier les entiers de 1 à 2014 en quatre couleurs de manière à n'avoir aucune progression arithmétique monochrome de longueur 11.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On colorie aléatoirement chaque entier de 1 à 2014 : la proba qu'une progression arithmétique fixée de longueur 11 soit monochrome est $\frac{1}{4^{10}} < \frac{1}{1000000}$, et il y a au plus 203 choix pour la raison r (r est compris entre 1 et 201, car le dernier terme est au moins $1 + 10r$ donc $1 + 10r \leq 2014$) et 2014 choix pour le premier terme, donc la proba qu'il existe une suite monochrome est inférieure à $\frac{203 \times 2014}{1000000} < \frac{300 \times 3000}{1000000} < 1$, donc il existe un coloriage sans progression monochrome.

Exercice 2 Soient n et k dans $\mathbb{N}^*$. Au cours d'un tournoi entre n joueurs, chaque paire s'affronte exactement une fois. On dit que le tournoi est *k-indécis* si pour tout ensemble A de k joueurs, il existe un joueur qui a battu tous ceux de A.
Montrer que pour tout k, il existe un tournoi k-indécis à plus de k joueurs.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On considère un tournoi aléatoire : pour chaque match, le résultat est tiré à pile ou face ! Pour un ensemble de k joueurs fixés, qu'un adversaire fixé les ait tous battus

est $\frac{1}{2^k}$. La proba qu'aucun des $n-k$ joueurs restants ne les ait tous battus est donc $\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-k}$. La proba qu'il existe k joueurs que personne n'a battu se majore donc par $\binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-k}$.

Or, quand $n \longrightarrow +\infty$, cette quantité tend vers 0 car le dénominateur croît exponentiellement et le numérateur polynomialement. Si n est choisi assez grand, la proba que le tournoi ne soit pas k-indécis est donc strictement plus petite que 1, donc en particulier il existe un tournoi k-indécis.

Exercice 3 Soit $k \geq 3$ et $n > 2^{k/2}$. Soit K_n le graphe complet à n sommets. Montrer qu'il est possible de colorier les arêtes de K_n en jaune et violet de telle manière qu'il n'existe pas k sommets dans K_n telles que toutes les arêtes les reliant sont de la même couleur.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> On fait un coloriage aléatoire : on colorie chaque arête en jaune avec proba $\frac{1}{2}$ et en violet avec proba $\frac{1}{2}$, indépendamment les unes des autres. On se fixe un ensemble de k sommets. Il y a $\binom{k}{2}$ arêtes reliant ces sommets, donc la probabilité que ces arêtes soient toutes de la même couleur vaut $2^{1-\binom{k}{2}}$. En sommant sur les $\binom{n}{k}$ ensembles de k sommets, la probabilité qu'il existe un ensemble monochrome de k sommets se majore par

$$\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Si cette quantité est strictement plus petite que 1, alors la condition voulue est vérifiée avec proba strictement positive et on a gagné. Or, on a $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \frac{2^{k^2/2}}{k!}$. Il suffit donc de vérifier

$$\frac{2^{k^2/2+1-\binom{k}{2}}}{k!} < 1,$$

soit $2^{1+\frac{k}{2}} < k!$, ce qui est vrai pour $k \geq 3$ par une récurrence immédiate.

Remarque 107. Le plus petit n pour lequel tout coloriage contient un ensemble monochrome de k sommets est appelé *k-ième nombre de Ramsey*, et noté $R(k)$. Estimer ces nombres est un problème de combinatoire important et difficile. On a ici montré que $R(k) \geq 2^{k/2}$, tandis que les meilleures minorations connues sont de la forme $c \times k \times 2^{k/2}$ avec c une constante. D'un autre côté, les meilleurs bornes supérieures connues sont de l'ordre de 4^k. Pire encore, $R(5)$ est inconnu. [à PRéCISER!!!]

Exercice 4 (Sperner) Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de sous-ensembles de $[\![1, 2n]\!]$: on suppose que pour tous B et C distincts dans $\mathcal{A}$, B n'est pas inclus dans C. (On dit alors que $\mathcal{A}$ est une antichaîne.)

▷ Montrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{B\in\mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{|B|}} \leq 1$$

▷ En déduire $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

▷ On prend une chaîne aléatoire uniforme (A_i) : on ajoute les éléments un par un tels qu'à chaque étape, tous les éléments restants ont la même probabilité d'être ajoutés, et on note A_i l'ensemble des éléments ajoutés aux i premières étapes. La proba que la chaîne contienne un B est égale à la probabilité que B soit le $|B|$-ième élément de la chaîne.

Or, il y a $\binom{n}{|B|}$ sous-ensembles de taille $|B|$ et chacun a la même proba d'être le $|B|$-ième élément de la chaîne, donc $\mathbb{P}(B \in \mathcal{A}) = \frac{1}{\binom{n}{|B|}}$. On conclut car la chaîne contient au plus un élément de l'antichaîne.

▷ Chaque dénominateur se majore par $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Exercice 5 Soient $p, q \geq 0$ avec $p + q = 1$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'inégalité :

$$(1 - p^m)^n + (1 - q^n)^m \geq 1$$

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> On colorie chaque case d'un rectangle m sur n en blanc ou noir de manière indépendante aevc probas p et $1-p$. $1-p^m$ est la proba qu'une ligne fixée soit entièrement blanche, donc le premier terme est la proba qu'il n'y ait une pas de ligne blanche. De même, le deuxième est la proba qu'il n'y ait pas de colonne noire. Or, au moins un de ces deux évènements se produit car si il y a une ligne blanche et une colonne noire, alors elles s'intersectent et on obtient une contradiction.

Exercice 6 Soit G un graphe et, pour tout x sommet de G, $d(x)$ son degré, i.e le nombre de voisins de ce sommet dans le graphe. On dit qu'un ensemble A de sommets de G est *indépendant* si il ne contient pas deux sommets voisins.
Montrer qu'il existe un ensemble indépendant de taille supérieure ou égale à :

$$\sum_x \frac{1}{1 + d(x)}$$

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On colle sur chaque sommet une étiquette dans $[\![1, n]\!]$ de manière à ce que chaque entier de 1 à n apparaisse une unique fois, et ce de manière uniforme parmi les $n!$ manières possibles. On prend pour A l'ensemble des points dont l'étiquette est plus grande que celles de tous les voisins. Cet ensemble est forcément indépendant car parmi deux voisins, l'un a forcément une étiquette plus petite que l'autre et donc n'est pas dans A.

De plus, soit x un sommet du graphe. On note $V(x)$ l'ensemble formé par x et ses voisins : $\mathbb{P}(x \in A)$ est la probabilité que, dans $V(x)$ voisins, x soit le sommet avec la plus grande étiquette. Or, chacun des $d(x) + 1$ sommets de $V(x)$ a la même probabilité d'être celui avec la plus grande étiquette donc $\mathbb{P}(x \in A) = \frac{1}{1+d(x)}$, d'où :

$$\mathbb{E}[|A|] = \sum_x \frac{1}{1 + d(x)}$$

En particulier, il existe au moins une configuration où $|A|$ est plus grande que cette quantité.

Exercice 7 Un championnat voit s'affronter 1000 équipes, chaque équipe jouant une unique fois contre chaque autre. Montrer qu'il est possible de former deux groupes A et B de 7 équipes chacun tels que toutes les équipes de B ont battu toutes les équipes de A.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Dans toute la suite, on notera $n = 1000$. On choisit les 7 éléments de A aléatoirement de manière uniforme, et on note X le nombre d'équipes qui ont battu toutes les équipes de A. On va montrer $\mathbb{E}[X] > 6$. Ainsi, avec probabilité positive, au moins 7 équipes ont battu toutes celles de A, donc on peut former le groupe B.

Pour calculer $\mathbb{E}[X]$, il faut calculer la probabilité qu'une équipe fixée i ait battu toutes celles de A. Cette probabilité dépend du nombre de victoires de i, qu'on note v_i. Il y a $\binom{n}{7}$ manières de choisir A et $\binom{v_i}{7}$ manières de choisir A tel que i a battu toutes les équipes de A, donc

$$\mathbb{P}\left(i \text{ a battu toutes les équipes de } A\right) = \frac{\binom{v_i}{7}}{\binom{n}{7}}.$$

On a donc

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\binom{n}{7}} \sum_{i=1}^{n} \binom{v_i}{7}.$$

De plus, une des seules choses qu'on sait sur les v_i est que $\sum_i v_i = \binom{n}{2}$. Pour faire apparaître cette somme, on applique l'inégalité de Jensen à la fonction convexe $j \to \binom{j}{7}$. On obtient

$$\mathbb{E}[X] \geq \frac{n}{\binom{n}{7}} \binom{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i}{7} = \frac{n}{\binom{n}{7}} \binom{\frac{n-1}{2}}{7}.$$

En utilisant l'encadrement $\frac{(n-k+1)^k}{k!} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$, on obtient

$$\mathbb{E}[X] \geq n \left(\frac{\frac{n-1}{2} - 6}{n}\right)^7.$$

Le terme dans l'exposant est proche de $\frac{1}{2}$, mais un peu plus petit. Pour estimer l'erreur, on cherche à utiliser l'inégalité $(1-x)^7 \geq 1 - 7x$:

$$\mathbb{E}[X] \geq n \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{n}\right)^7 = \frac{n}{2^7}\left(1 - \frac{26}{n}\right)^7 \geq \frac{n}{2^7}\left(1 - \frac{26 \times 7}{n}\right).$$

On veut donc $\frac{n}{2^7}\left(1 - \frac{26\times 7}{n}\right) > 6$, soit $n - 26\times 7 > 6 \times 2^7$, soit $n > 26\times 7 + 6 * 2^7 = 182 + 768 = 950$, ce qui est bien le cas ici.

Remarque 108. En faisant le calcul exact avec une calculatrice, on peut remplacer 1000 par 798.

Exercice 8 (USAMO 2012) Soient x_1, x_2, ..., x_n tels que $\sum_i x_i = 0$ et $\sum_i x_i^2 = 1$. Pour tout $A \subset [\![1, n]\!]$ on pose $S_A = \sum_{i \in A} x_i$. Soit aussi $\lambda > 0$.

Montrer que le nombre de A tels que $S_A \geq \lambda$ est inférieur ou égal à $\frac{2^{n-3}}{\lambda^2}$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Tout d'abord, si A' est le complémentaire de A, comme $\sum_i x_i = 0$, la somme des éléments de A' est l'opposé de celle de A, donc il y a autant de sous-ensembles avec $S_A \geq \lambda$ que de sous-ensembles avec $S_A \leq -\lambda$, donc il suffit de montrer que le nombre de A tels que $S_A^2 \geq \lambda^2$ est inférieur ou égal à $\frac{2^{n-2}}{\lambda^2}$.

On choisit donc un sous-ensemble aléatoire uniforme A de $[\![1, n]\!]$, ce qui revient à choisir indépendamment avec proba $\frac{1}{2}$ pour chaque i si i est dans A. L'énoncé revient à montrer que $\mathbb{P}(S_A^2 \geq \lambda^2) \leq \frac{1}{4\lambda^2}$. D'après l'inégalité de Markov, cette proba se majore par $\frac{\mathbb{E}[S_A^2]}{\lambda^2}$, donc il suffit de montrer $\mathbb{E}[S_A^2] = \frac{1}{4}$.

On fait donc le calcul :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_A^2] &= \mathbb{E}\Big[\big(\sum_i x_i \mathbb{1}_{i\in A}\big)^2\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_i x_i^2 \mathbb{1}_{i\in A} + \sum_{i\neq j} x_i x_j \mathbb{1}_{i\in A}\mathbb{1}_{j\in A}\Big] \\
&= \sum_i x_i^2 \mathbb{E}[\mathbb{1}_{i\in A}] + \sum_{i\neq j} x_i x_j \mathbb{E}[\mathbb{1}_{i\in A}\mathbb{1}_{j\in A}] \\
&= \sum_i x_i^2 \mathbb{P}(i\in A) + \sum_{i\neq j} x_i x_j \mathbb{P}(i\in A \text{ et } j\in A) \\
&= \frac{1}{2}\sum_i x_i^2 + \frac{1}{4}\sum_{i\neq j} x_i x_j \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

car $\sum_i x_i^2 = 1$ et $\sum_{i\neq j} x_i x_j = \big(\sum_i x_i\big)^2 - \sum_i x_i^2 = -1$, d'où le résultat.

3 mercredi 23 après-midi : Félix Breton

Exercice 1 Le pays d'Euleria contient 1000 villes, reliées par un réseau de routes à double sens qui joint toutes les villes. Le gouvernement veut transformer certaines de ces routes en autoroutes de manière à ce que chaque ville aie un nombre impair d'autoroutes. Montrer qu'il peut le faire.

Exercice 2 Montrer qu'on peut colorier les sommets de tout graphe en deux couleurs de manière à ce que pour chaque sommet, au moins la moitié de ses voisins soit de l'autre couleur.

Exercice 3 Les arêtes du graphe complet à n sommets sont coloriées en n couleurs. Pour chaque triplet de couleurs, il existe trois sommets reliés avec des arêtes de ces trois couleurs.
a) Peut on avoir $n = 6$?
b) Peut on avoir $n = 7$?

Exercice 4 $2n$ mathématiciens sont présents à une conférence. Chacun d'eux connait exactement k autres mathématiciens. Trouver la plus petite valeur de k qui assure l'existence d'un triplet de mathématiciens se connaissant tous.
Question bonus : et si $2n + 1$ mathématiciens étaient présents ?

Exercice 5 Alice et Bob jouent à un jeu sur un graphe complet G à 2014 sommets. Ils jouent à tour de rôle, en commençant par Alice. À chaque coup, Alice oriente une arête non orientée de G. À chaque coup, Bob choisit un entier m, avec $1 \leq m \leq 1000$ et oriente m arêtes non orientées de G. La partie se finit quand toutes les arêtes sont orientées. Alice gagne si et seulement si il y a un cycle. Existe-t-il une stratégie gagnante pour Alice ?

Exercice 6 Montrer que pour tout couple (A, B), il existe un entier $R(A, B)$ tel que tout graphe à $R(A, B)$ sommets contienne soit A sommets tous reliés, soit B sommets tous non reliés.
Calculer $R(3, 3)$.

Exercice 7 Calculer $R(3, 4)$.
Question bonus : calculer $R(4, 4)$.

Exercice 8 Montrer que pour tout triplet (A, B, C), il existe un entier $R(A, B, C)$ tel que tout graphe complet à $R(A, B, C)$ sommets dont les arêtes sont coloriées en vert, bleu et noir contienne soit A sommets tous reliés par des arêtes vertes, soit B sommets tous reliés par des arêtes bleues, soit C sommets tous reliés par des arêtes noires.

Exercice 9 Montrer que $R(A, B, C) \leq R(A, R(B, C))$.
Question bonus : trouver un cas où l'inégalité est stricte.

Exercice 10 Montrer qu'un graphe représenté de manière planaire vérifie la formule $S + F = A + 2$.

Exercice 11 K_5 est il planaire ? $K_{3,3}$?

Exercice 12 Un physicien fou découvre une nouvelle particule qu'il nomme imon. Certains couples d'imons sont intriqués. Le physicien peut faire 2 opérations :
-Détruire un imon qui est intriqué avec un nombre impair d'autres imons.
-Dupliquer la structure, chaque imon devenant alors intriqué avec son double.
Montrer que le physicien peut isoler tous les imons (c'est à dire faire en sorte qu'il n'y ait plus d'intrication).

Solution de l'exercice 4 Si $k = n$, on peut répartir les mathématiciens en 2 groupes de n tels que chacun connaisse les n mathématiciens de l'autre groupe. On n'a alors aucun triangle. Si $k > n$, on peut prendre 2 mathématiciens qui se connaissent. Chacun connait alors au moins n autres mathématiciens, mais il n'y a que $2n-2$ autres mathématiciens, donc d'après le principe des tiroirs, les 2 mathématiciens ont une connaissance commune, et un triangle existe. Par conséquent, la plus petite valeur de k assurant l'existence d'un triplet de mathématiciens se connaissant tous est $n + 1$.

Solution de l'exercice 5 Alice peut gagner en formant une chaine (une suite de sommets distincts, chacun étant relié au suivant par une arête orientée). A chaque tour, elle prend la plus grande chaine existante, un sommet hors de cette chaine et relie le sommet à la chaine de manière à rallonger cette dernière (une disjonction de cas montre que c'est toujours possible). Après au plus 2017 coups, la chaine sera complète, et comme il y a$2017 * 2016/2$, soit plus de $2017 * 1001$ arêtes, il restera des arêtes non orientées. Toute paire de sommets étant alors indirectement liée par la chaine, il suffit à Alice de prendre une arête non orientée et de l'orienter dans la direction inverse de la chaine pour former un cycle et gagner.

L'exercice 3 provient de la JBMO 2012, le 12 est le C3 de la shortlist de l'IMO 2013.
Pour les exercices 1,2,6,10 et 11 : voir le cours de théorie des graphes de Po-Shen Loh.
Les solutions des exercices 7,8 et 9 sont trouvables sur la page Wikipédia du théorème de Ramsey.

VIII. Jeudi 24 matin : Test de fin de parcours

1 Groupe A

1 énoncé

Exercice 1

Trouver tous les couples d'entiers positifs satisfaisant

$$3m^3 = 7n^2 + 2017$$

Exercice 2

Soit Ω_1 un cercle tangent intérieurement à un autre cercle Ω_2 en A. Soit P un point de Ω_2. La première tangente à Ω_1 passant par P recoupe Ω_1 en X et Ω_2 en Q. La seconde recoupe Ω_1 en Y et Ω_2 en R. Montrer que $\widehat{QAR} = 2\widehat{XAY}$.

Exercice 3

Soit $ABCD$ un parallélogramme, soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABD. Soit S la seconde intersection de (AC) avec Γ. Montrer que (DB) est tangente au cercle circonscrit au triangle CSB.

Exercice 4

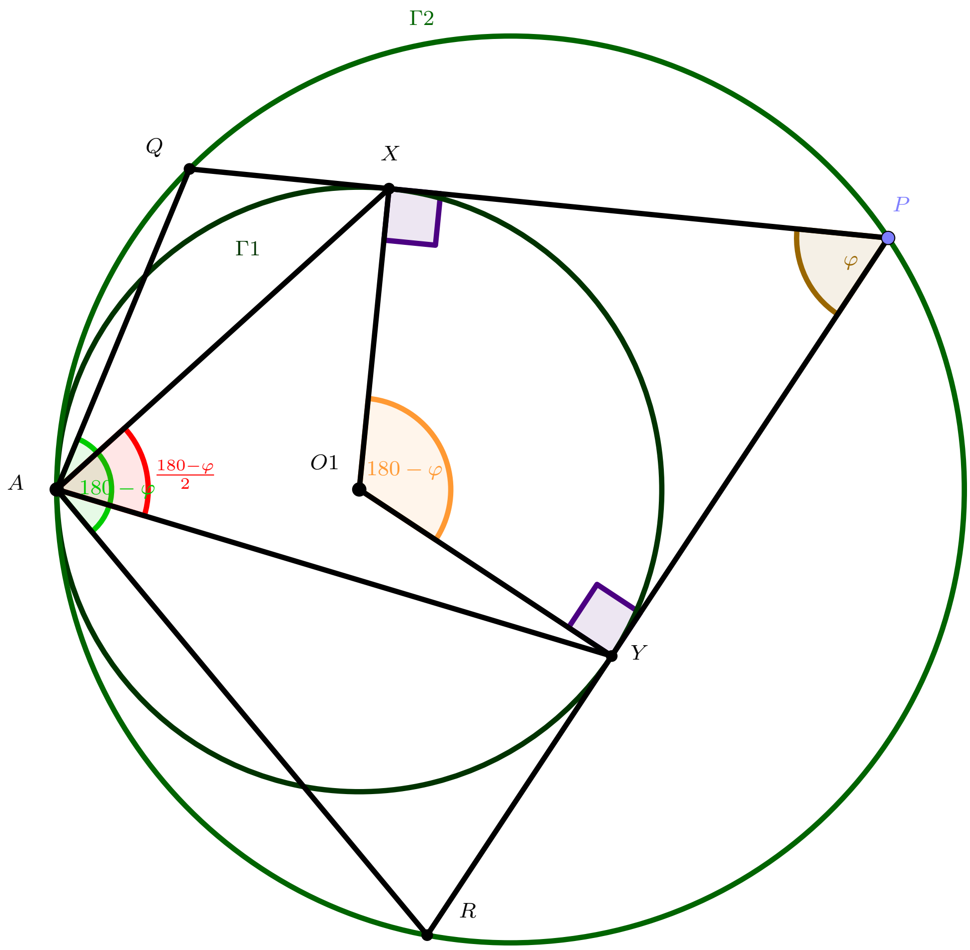
Trouver tous les entiers impairs y tels qu'il existe un entier x vérifiant

$$x^2 + 2y^2 = yx^2 + y + 1.$$

2 Solution

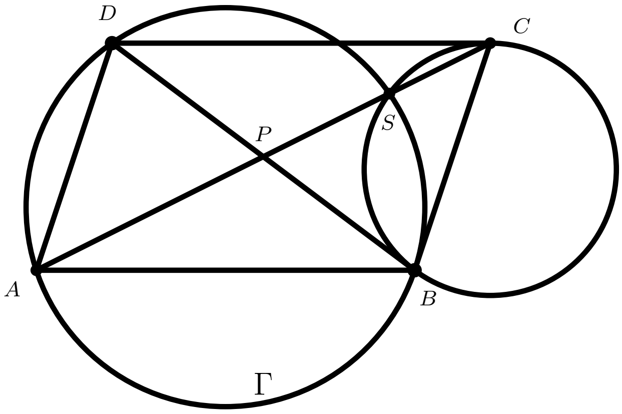
<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On regarde l'équation modulo 3. Un rapide tableau de congruences montre que $n^2 \equiv 0[3]$ ou $n^2 \equiv 1[3]$, donc $7n^2$ vaut 0 ou 1 modulo 3. De plus $2017 \equiv 1[3]$, donc finalement $7n^2 + 2017$ vaut 1 ou 2 modulo 3, et ne peut jamais être égal à $3m^3$. L'équation proposée n'admet donc pas de solutions.

Solution de l'exercice 2



Soit O_1 le centre de Γ_1. Alors, puisque (PX) et (PY) sont des tangentes à Γ_1, $\widehat{PXO_1} = \widehat{PYO_1} = 90°$. Donc P, X, O_1 et Y sont cocycliques.
Soit $\widehat{YPX} = \varphi$.
Donc $\widehat{YO_1X} = 180° - \varphi$, par théorème de l'angle inscrit version 2 avec les quatre points cocycliques P, X, O_1 et Y.
Or O_1 est centre du cercle passant par X, Y et A. Donc par le théorème de l'angle au centre, $\widehat{XO_1Y} = \widehat{XAY} = \frac{180-\varphi}{2}$.
Mais par théorème de l'angle inscrit version 2 avec les quatre points cocycliques P, Q, A et R, $\widehat{QPR} = \widehat{QAR} = \varphi$.
Donc on a bien $\widehat{QAR} = 2\widehat{XAY}$.

Solution de l'exercice 3



Soit P le point d'intersection de (AC) et (BD). Alors, par puissance d'un point par rapport à un cercle, $P_\Gamma(P) = PD \times PB = PS \times PA$.
Mais $ABCD$ est un parallélogramme, et P est l'intersection de ses diagonales. Donc $PA = PB = PC = PD$.
Donc $P_\Gamma(P) = PB^2 = PS \times PC$.
Donc, par la puissance d'un point par rapport à un cercle, la droite (PB) est tangente au cercle circonscrit à CSB.
Donc on a bien (DB) tangente au cercle circonscrit du triangle CSB.

Solution de l'exercice 4 On réécrit l'équation sous la forme

$$(y-1)x^2 = 2y^2 - y - 1,$$

or $2y^2 - y - 1 = (y-1)(2y+1)$, donc **si** $y \neq 1$, on peut diviser par $y-1$, et l'équation devient $x^2 = 2y+1$. Or y est impair, donc on peut l'écrire sous la forme $y = 2k+1$. Dans ce cas, $x^2 = 4k+3$, mais un tableau de congruences montre que x^2 ne peut valoir que 0 ou 1 modulo 4, donc ne peut pas être de la forme $4k+3$. Il reste à traiter le cas $y = 1$, et on remarque facilement qu'il aboutit à une solution pour tout x. Le seul entier y solution de ce problème est donc $y = 1$

2 Groupe B

1 énoncé

Exercice 1

Soit ABC un triangle et soit Ω son cercle circonscrit. Montrer que le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ et de la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ se trouve sur le cercle Ω.

La bissetrice extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ est la perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ passant par A.

Exercice 2

Montrer que pour tous réels a et b strictement supérieurs à 1, on a :

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8.$$

Exercice 3

Déterminer tous les polynômes P satisfaisant l'équation suivante pour tout réel x :

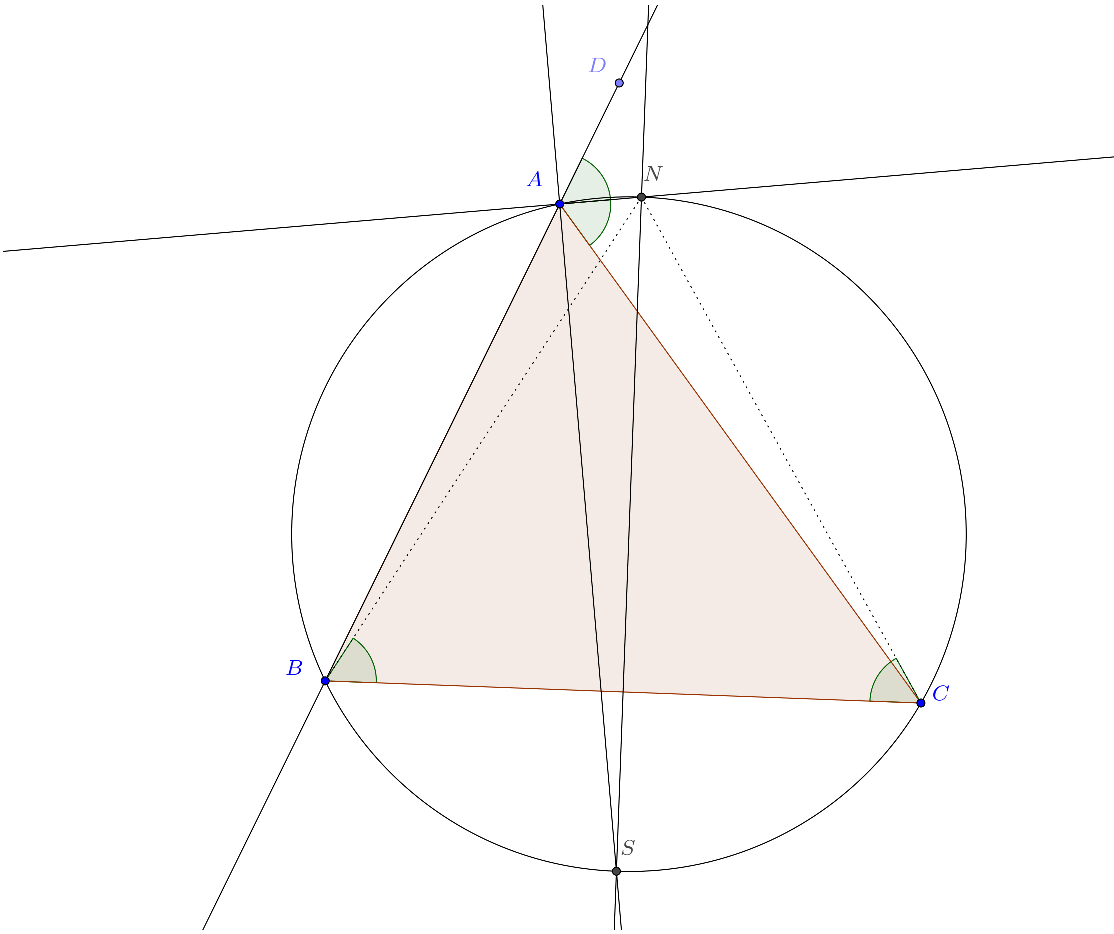
$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x-2).$$

Exercice 4

Soient A, B, C, D quatre points situés sur un cercle dans cet ordre. On note Q le point d'intersection des droites (AD) et (BC) et on note P le point d'intersection des droites (AC) et (BD). Soit G un point tel que le quadrilatère $PCGD$ est un parallélogramme.

Montrer que $\widehat{GQD} = \widehat{PQB}$.

2 Solution



Solution de l'exercice 1
Sans perte de généralité, on peut supposer que $AC \geq AB$. On note N le point d'intersection de la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ avec Ω et on note S celui de la bissectrice intérieure avec Ω. On place un point D sur la demi-droite $[AB)$ qui n'appartiennent pas au segment $[AB]$. Puisque (AN) est la perpendiculaire à (AS) passant par A, on a $\widehat{NAC} = 90^o - \widehat{CAS} = 90^o - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ et $\widehat{NAD} = 180^o - 90^o - \widehat{SAB} = 90^o - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Donc $\widehat{NAD} = \widehat{NAC}$ donc (AN) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CAD}$.

On a alors, par le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{NAC} = \widehat{NBC}$. D'autre part, $\widehat{NCB} = 180^o - \widehat{BAN} = \widehat{NAD}$. Comme $\widehat{NAD} = \widehat{NAC}$, on trouve $\widehat{NBC} = \widehat{NCB}$ donc le triangle BNC est isocèle. Donc le point N est équidistant des points B et C donc N appartient à la médiatrice du segment BC. Donc le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ et de la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ est en fait N or on a définit N comme appartenant au cercle circonscrit au triangle ABC.

Le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ et de la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ appartient donc bien au cercle circonscrit au triangle ABC.

Solution de l'exercice 2 On utilise l'inégalité des mauvais élèves pour avoir :

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq \frac{(a+b)^2}{a+b-2}$$

Pour prouver l'inégalité demandée, il est donc suffisant d'avoir $\frac{(a+b)^2}{a+b-2} \geq 8$ ou encore, en supprimant les dénominateurs, $(a+b)^2 \geq 8(a+b-2)$. Mais cetter dernière inégalité est vraie puisque qu'elle est équivalente à $(a+b-4)^2 \geq 0$ qui est vraie pour tout réels a, b strictement supérieurs à 1 car un carré est toujours positif ou nul.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Remarquons tout d'abord que le polynôme nul est une solution de l'équation de l'énoncé.

On suppose désormais que P est une solution de l'équation et que P est non nul. Réécrivons tout d'abord l'équation de l'hyptohèse. Elle est en effet équivalente à

$$(x-2)(x-4)P(x) = x(x+2)P(x-2)$$

En substituant x par 0 on trouve $8P(0) = 0$ soit $P(0) = 0$. En substituant x par -2 on trouve $24P(-2) = 0$ soit $P(-2) = 0$. En substituant x par 4 on a $0 = 24P(2)$ soit $P(2) = 0$. Le polynôme P a donc au moins 3 racines : $-2, 0, 2$. Donc $x, x-2$ et $x+2$ divisent tous les trois le polynôme P donc il existe un polynôme Q tel que $P(x) = x(x-2)(x+2)Q(x)$ pour tout réel x. En remplaçant P par $x(x-2)(x+2)Q(x)$ dans l'équation on trouve

$$(x-2)(x-4)x(x+2)(x-2)Q(x) = x(x+2)(x-4)x(x-2)Q(x-2)$$

ce qui est équivalent à

$$(x-4)(x+2)(x-2)x[(x-2)Q(x) - xQ(x-2)] = 0$$

Donc pour tout x différent de $-2, 0, 2, 4$ on a $(x-2)Q(x) - xQ(x-2) = 0$. Le polynôme $R(x) = (x-2)Q(x) - xQ(x-2)$ admet une infinité de racines (il suffit de prendre tous les x entiers différents de $-2, 0, 2, 4$) donc il s'agit du polynôme nul. Donc pour tout réel x on a $(x-2)Q(x) - xQ(x-2) = 0$. En particulier, pour $x = 0$ on a $-2Q(0) = 0$ donc $Q(0) = 0$ donc 0 est racine du polynôme Q donc x divise Q. Donc il existe un polynôme S tel que $Q(x) = xS(x)$ et l'équation se réécrit

$$(x-2)xS(x) = x(x-2)S(x-2)$$

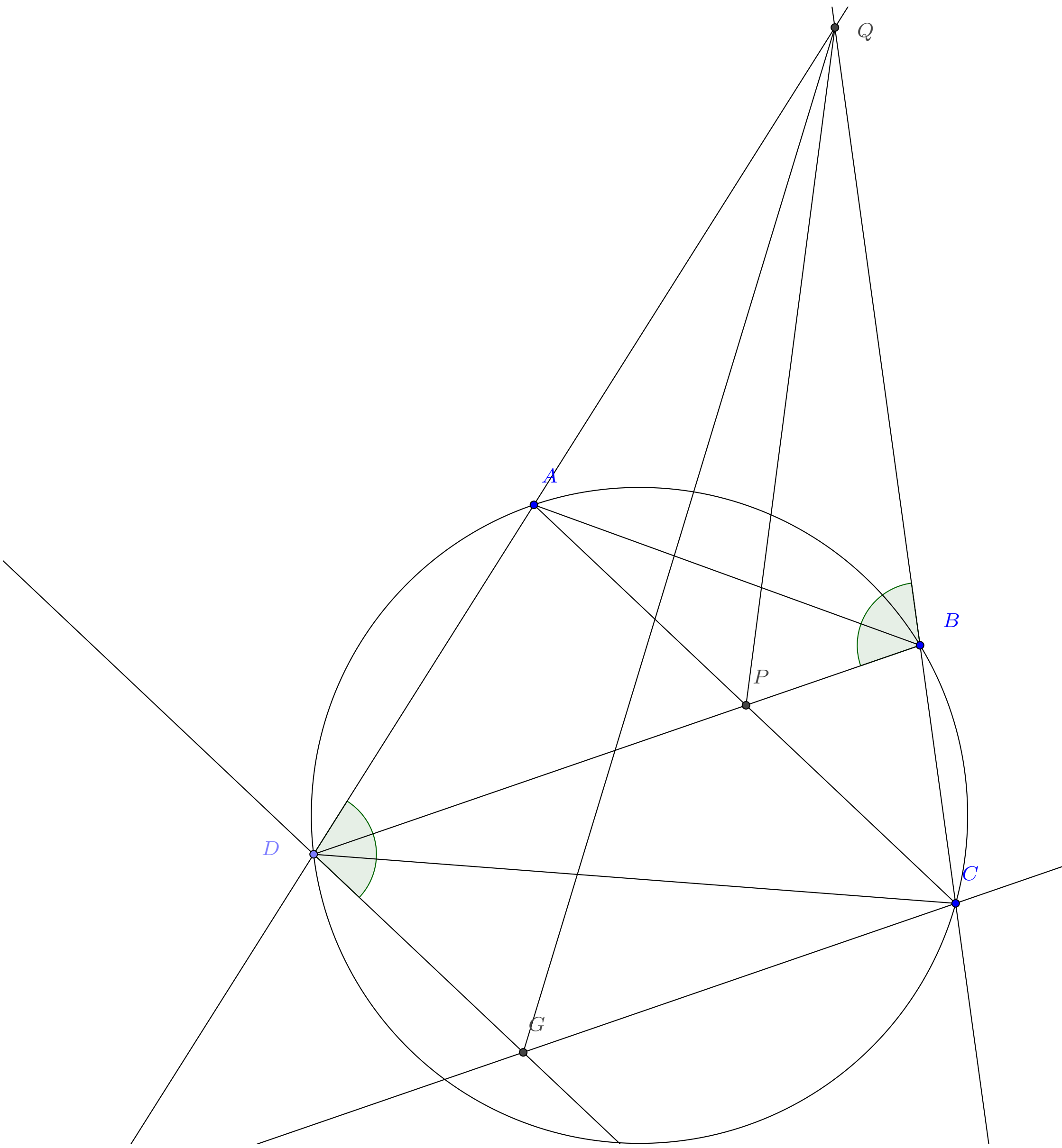
soit encore

$$x(x-2)[S(x-2) - S(x)] = 0$$

donc pour x différent de 0 et différent de 2 on a $S(x-2) = S(x)$. En particulier, par une récurrence immédiate on trouve que $S(x) = S(4)$ pour tout entier pair strictement supérieur à 2. En posant $c = S(4)$, on s'aperçoit que le polynôme T défini par $T(x) = S(x) - c$ admet une infinité de racines donc il s'agit du polynôme nul. Donc $S(x) = c$ pour tout réel x ce qui implique que $P(x) = x(x-2)(x+2)xS(x) = x^2(x^2-4)c$ avec c un réel non nul. Réciproquement, on vérifie que ce polynôme est bien solution de l'équation polynômiale puisqu'on a

$$(x-2)(x-4)P(x) = (x-2)(x-4)x^2(x^2-4)c = x(x+2)P(x-2)$$

Les solutions sont donc tous les polynômes P définis par $P(x) = x^2(x^2-4)c$ avec c un réel sont donc solution de l'équation et ce sont les seules, en remarquant que le polynôme nul correspond au cas où $c = 0$.



Solution de l'exercice 4

On va montrer que les triangles GDQ et PBQ sont semblables, ce qui impliquera directement l'égalité d'angles demandée.

On a tout d'abord

$$\begin{aligned}
\widehat{GDQ} &= \widehat{GDP} + \widehat{PDQ} && \text{(VIII.1)}\\
&= \widehat{CPB} + \widehat{PCB} && \text{(VIII.2)}\\
&= 180^o - \widehat{PBC} && \text{(VIII.3)}\\
&= \widehat{PBQ}. && \text{(VIII.4)}
\end{aligned}$$

Ensuite, on remarque également que les triangles QAB et QCD sont semblables puisque $\widehat{QAB} = 180^o - \widehat{DAB} = \widehat{DCB} = \widehat{DCQ}$ et de même $\widehat{QBA} = \widehat{QDC}$.

On remarque aussi que les triangles PAB et PDC sont semblables puisque $\widehat{PAB} = \widehat{CAB} = \widehat{CDB} = \widehat{CDQ}$ et de même $\widehat{PBA} = \widehat{PCD}$. De plus, puisque $PCGD$ est un parallélogramme

donc $PC = GD$
$$\frac{GD}{PB} = \frac{PC}{PB} = \frac{AB}{CD} = \frac{QB}{QD}.$$

Cette égalité implique bien que les triangles GDQ et PBQ sont semblables donc $\widehat{GQD} = \widehat{PQB}$.

3 Groupe C

1 énoncé

Exercice 1

Soit ABC un triangle, D le pied de la bissectrice issue de A. Le cercle circonscrit à ABD recoupe (AC) en E. Le cercle circonscrit à ADC recoupe (AB) en F. Montrer que $BF = CE$.

Exercice 2

Soient a, b, c des réels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}$. Montrer que
$$\frac{1 - a^2 + c^2}{c(a + 2b)} + \frac{1 - b^2 + a^2}{a(b + 2c)} + \frac{1 - c^2 + b^2}{b(c + 2a)} \geq 6$$

Exercice 3

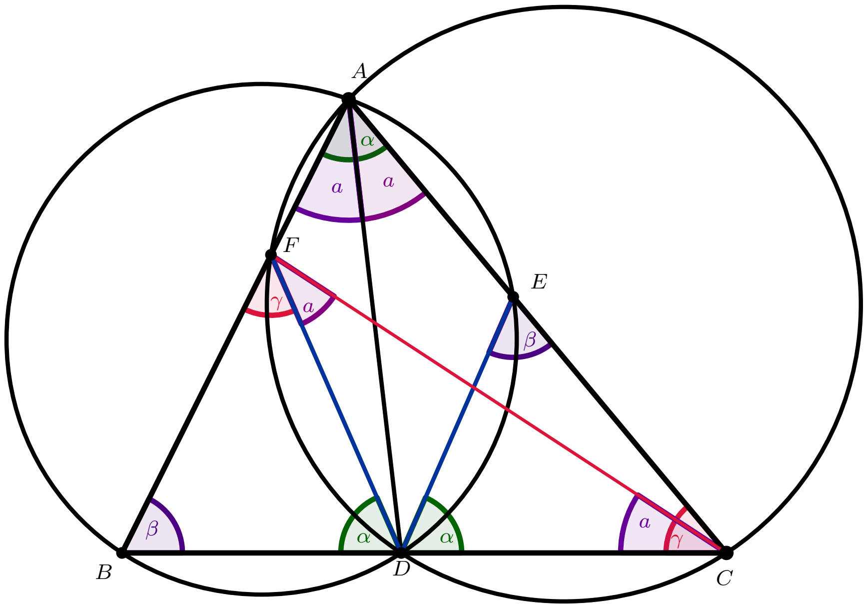
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,
$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

Exercice 4

Soit A et B deux points quelconques, h_A, g_A (resp. h_B, g_B) deux droites passant par A (resp. B). On note C (resp. D) l'intersection de h_A, g_B (resp. h_B, g_A), et E (resp. F) l'intersection de g_A, g_B (resp. h_A, h_B). Soit P un point quelconque de la droite h_B et H un point de la droite g_A. On note X (resp. Y) l'intersection de (CP) et (EF) (resp. (EP) et (HF). Démontrer que X, Y et B sont alignés si et seulement si A, H, E, D sont des points harmoniques.

2 Solution

Solution de l'exercice 1



Soit $\widehat{BAC} = \alpha$; $\widehat{ACB} = \gamma$ et $\widehat{CBA} = \beta$.
Alors, par le théoréme de l'angle inscrit version 2 dans le quadrilatére circonscriptible ABDE, $\widehat{ABD} = \widehat{DEC} = \beta$.
De même, par le théoréme de l'angle inscrit version 2 dans le quadrilatére inscriptible AFDC, $\widehat{ACD} = \widehat{DFB} = \gamma$.
Donc DBF et DEC sont des triangles semblables.
Or $\widehat{FCD} = \widehat{FAD} = \widehat{DAC} = \widehat{DFC} = \frac{\alpha}{2}$, par le théoréme de l'angle inscrit version 1 dans le cercle circonscrit à AFDC.
Donc FDC est isocèle en D, donc $FD = DC$.
Donc DBF et DEC sont isométriques. En particulier, on a bien $BF = EC$.

Solution de l'exercice 2 On remplace 1 par $2a^2 + 2b^2 + 2c^2$:

$$\frac{1-a^2+c^2}{c(a+2b)} + \frac{1-b^2+a^2}{a(b+2c)} + \frac{1-c^2+b^2}{b(c+2a)} = \frac{a^2+2b^2+3c^2}{c(a+2b)} + \frac{b^2+2c^2+3a^2}{a(b+2c)} + \frac{c^2+2a^2+3b^2}{b(c+2a)}$$

D'aprés l'IAG,

$$ac + 2bc \leq \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} + b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{2b^2}{2} + \frac{3c^2}{2}$$

Ainsi

$$\frac{a^2+2b^2+3c^2}{c(a+2b)} \geq \frac{a^2+2b^2+3c^2}{\frac{a^2}{2}+\frac{2b^2}{2}+\frac{3c^2}{2}} = 2$$

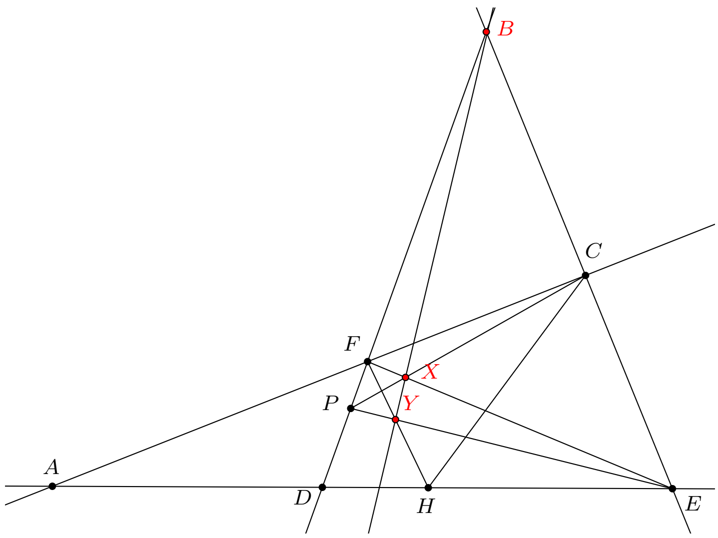
En sommant cycliquement, on obtient l'inégalité voulue.

Solution de l'exercice 3 On pose $y = \frac{(x^2-f(x))}{2}$, afin que $f(x) + y = x^2 - y$ ainsi pour tout x réel on a :

$$0 = 4f(x)\frac{(x^2-f(x))}{2}$$

Ainsi $f(x) = 0$ ou $f(x) = x^2$.
Une erreur classique est de s'arrêter là et de dire : f est la fonction carrée ou la fonction nulle. Or ce que nous avons prouvé ici est tout autre chose ! Le résultat que nous avons ne s'applique que point par point. Donc rien encore ne nous assure qu'une fonction provenant d'un "mélange" entre $x \mapsto 0$ et $x \mapsto x^2$ ne puisse être solution.
Il reste clair que $f(0) = 0$ ($0 = 0$ et $0 = 0^2$) ainsi en posant $x = 0$ dans l'équation de départ, on obtient pour tout réel y, $f(y) = f(-y)$ (ie f est paire).
Supposons que f soit effectivement une combinaison de $x \mapsto 0$ et $x \mapsto x^2$. alors il existe deux nombres distincts $a, b \neq 0$ avec $f(a) = 0$ et $f(b) = b^2$. Par parité, $f(-b) = (-b)^2$. En posant $x = a$ et $y = b$ dans l'équation on a $f(a^2 - b) = b^2$, donc soit $b^2 = 0$ (absurde), soit $b^2 = (a^2 - b)^2$ d'où $a^2(a^2 - 2b) = 0$ et $a^2 = 2b$. En faisant de même avec $x = a$ et $y = -b$, on a idem $a^2 = -2b$ donc $a = 0$, absurde !
$x \mapsto 0$ et $x \mapsto x^2$ sont donc les seules solutions possibles. On vérifie qu'elles en sont bien.

Solution de l'exercice 4



Notons $S = (CP) \cap (FH)$. On veut montrer que B est sur la diagonale (XY) du quadrilatére complet (FE), (EP), (PC), (FH). Il suffit donc de montrer que $B, (SE) \cap (BD), F, P$ sont harmoniques. On calcule les birapports, en reliant à S puis en projetant sur (EB) puis en reliant à F et en projetant sur (ED) :

$$\begin{aligned} b_{B,(SE)\cap(BD),F,P} &= b_{(SB),(SE),(SF),(SP)} \\ &= b_{B,E,(SF)\cap(BE),C} \\ &= b_{(FB),(FE),(FS),(FC)} \\ &= b_{D,E,H,A} \\ &= -1. \end{aligned}$$

4 Groupe D

1 énoncé

Exercice 1

Soient ω_1 et ω_2 deux cercles de rayons r_1 et r_2, tangents en un point T, avec ω_1 à l'intérieur de ω_2. Soit $K \in \omega_1$ différent de T. La tangente à ω_1 en K recoupe ω_2 en A et B. Soit S le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ de ω_2 qui ne contient pas T.

Montrer que le rayon du cercle circonscrit à AKS ne dépend pas de K, et l'exprimer en fonction de r_1 et r_2.

Exercice 2

n clowns en cercle jonglent, chacun avec un certain nombre de balles. Toutes les minutes, le directeur du cirque donne un signal, et chaque clown envoie la moitié de ses balles à son voisin de droite. Si un clown a un nombre impair de balles, il en sort une de sa poche juste avant le signal.

Prouver que les clowns finiront par tous avoir le même nombre de balles.

Exercice 3

Une classe contient un certain nombre de filles et un certain nombre de garçons. On sait que chaque garçon est ami avec au moins une fille.

1. Montrer qu'il est possible de choisir un groupe qui contient au moins la moitié des élèves de la classe et tel que chaque garçon du groupe est ami avec un nombre impair de filles du groupe.
2. Cela reste-t-il vrai en remplaçant « au moins la moitié » par « au moins 51% » ?

Exercice 4

Soit ABC un triangle, Ω son cercle circonscrit, ω son cercle inscrit. Soit M un point de Ω et X_1, X_2 les points d'intersection des tangentes à ω passant par M avec la droite (BC). Soit T le point de tangence entre le cercle A-mixtilinéaire et Ω.

Montrer que T est sur le cercle circonscrit à MX_1X_2.

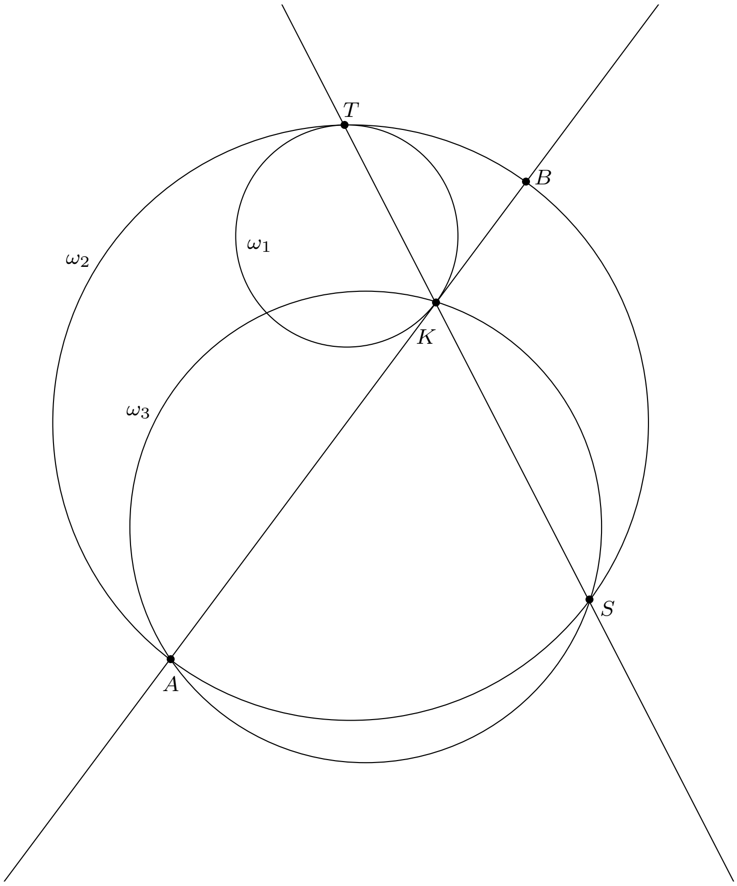
Indication : on pourra introduire les points Y_1 et Y_2, intersections respectives de MX_1 et MX_2 avec Ω, et admettre que (Y_1Y_2) est tangente à ω.

2 Solution

Solution de l'exercice 1

On note r_3 le rayon recherché.

Pour commencer, on montre que les points T, K et S sont alignés. En effet, soit h l'homothétie de centre T qui envoie ω_2 sur ω_1. Une rapide chasse aux angles montre que la tangente à ω_2 en S est parallèle à (AB), donc $h(S) = K$ et T, S et K sont alignés. De plus, la droite passant par ces trois points est la bissectrice de $\widehat{BAC}$.



T
B
ω_1
ω_2
K
ω_3
S
A

On a donc $\widehat{SAK} = \widehat{SAB} = \widehat{STB} = \widehat{STA}$. Comme les triangles SAK et STA ont aussi en commun l'angle $\widehat{AST}$, ils sont (indirectement) semblables. Comme la similitude qui envoie l'un sur l'autre envoie également le cercle circonscrit à AKS sur ω_2, on a

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{SK}{SA} = \frac{SA}{ST},$$

donc

$$\frac{r_3}{r_2} = \sqrt{\frac{SK}{SA} \times \frac{SA}{ST}} = \sqrt{\frac{SK}{ST}} = \sqrt{1 - \frac{TK}{TS}} = \sqrt{1 - \frac{r_1}{r_2}}$$

car l'homothétie h est de rapport $\frac{r_1}{r_2}$ et envoie T sur T et S sur K. On a donc finalement

$$r_3 = r_2\sqrt{1 - \frac{r_1}{r_2}} = \sqrt{r_2(r_2 - r_1)}.$$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Pour $k \in \mathbb{N}$, on appelle "étape k" la période entre le k-ème et le $k+1$-ème signal.
Soit $M(k)$ le nombre de balles du clown qui en possède le plus. Si $M(k)$ est impair, $M(k)$ peut augmenter de 1, à condition qu'un clown ait $M(k)$ balles et son voisin de gauche aussi. Si $M(k)$ est pair, chaque clown garde au plus $M(k)/2$ balles et en donne au plus $M(k)/2$, donc après le signal, chaque clown a au plus $M(k)$ balles. Une récurrence immédiate montre qu'aucun clown n'aura jamais plus de $M(k)$ balles. Donc $M(k)$ est bornée par $M(0) + 1$.
Soit $m(k)$ le nombre de balles du clown qui en possède le moins, et $c(k)$ le nombre de clowns ayant $m(k)$ balles. Il est clair que $(m(k))_{k \geq 0}$ est une suite croissante : une récurrence immédiate montre de même qu'aucun clown n'aura jamais moins de $m(k)$ balles.
Si $M(k) > m(k)$, il existe un clown ayant $d(k)$ balles et dont le voisin de gauche en a strictement plus. Après le $k+1$-ème signal, il en aura strictement plus de $m(k)$. Ainsi, soit $m(k)$ augmente d'au moins 1, soit $c(k)$ diminue strictement de 1. Or $0 \geq c(k) \geq n$ donc il s'écoule au plus n périodes avant que $m(k)$ n'augmente d'au moins 1. Si $M(k) > m(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m(k)$ augmente d'au moins 1 autant de fois qu'on veut. Au bout de $M(0) + 2 - m(0)$ fois, on aura $m(k) \geq M(0) + 2 \geq M(k) + 1$, absurde.
Ainsi, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $M(k) = m(k)$ et tous les clowns ont le même nombre de balles (ce sera clairement le cas dans toutes les périodes suivantes).

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

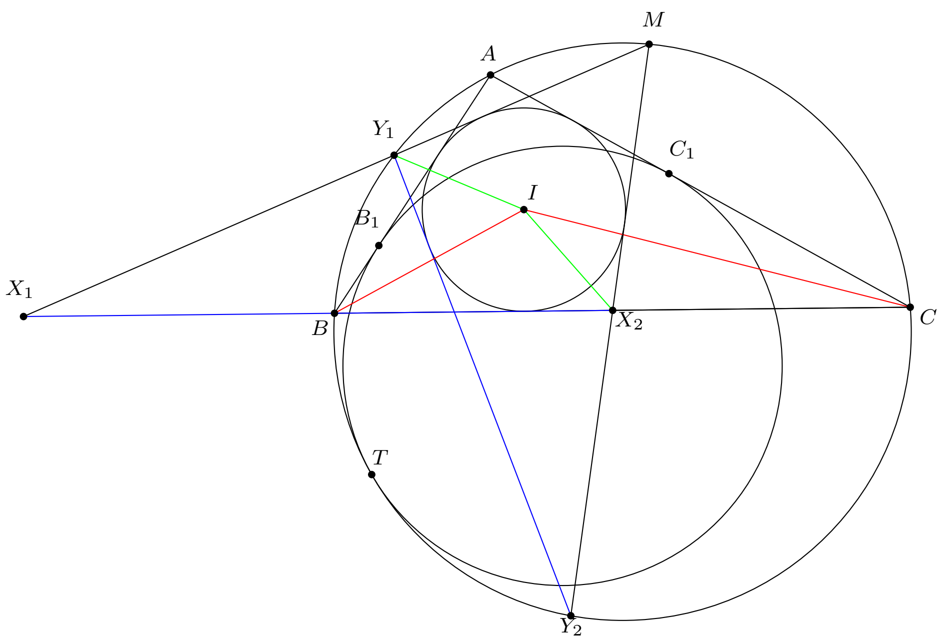
1. Une fois choisies les filles du groupe, la meilleure chose à faire est de prendre tous les garçons qui ont un nombre impair d'amies dans le groupe. La difficulté consiste donc à choisir correctement les filles.
   On les choisit aléatoirement ! Chaque fille est dans le groupe avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment les unes des autres. On prend ensuite tous les garçons possibles. On vérifie que chaque garçon a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être dans le groupe. Supposons qu'un garçon g a k amies $f_1, \ldots, f_k$, et que le tirage au sort ait déjà été fait pour les filles $f_1, \ldots, f_{k-1}$. Soit F le nombre de filles dans le groupe parmi $f_1, \ldots, f_{k-1}$. Si F est pair, alors g est dans le groupe si et seulement si f_k y est, ce qui arrive avec proba $\frac{1}{2}$. Si F est impair, alors g est dans le groupe si et seulement si f_k n'y est pas, ce qui arrive avec proba $\frac{1}{2}$. Chaque élève a donc une chance sur deux d'être dans notre groupe aléatoire. L'espérance du nombre d'élèves dans le groupe vaut donc $\frac{n}{2}$, où n est le nombre d'élèves dans la classe. Avec proba positive, il contient donc au moins la moitié de la classe.

2. Considérons une classe avec k filles et $\frac{k(k-1)}{2}$ garçons où chaque garçon est ami avec exactement 2 filles et, pour toutes filles f_1 et f_2 distinctes, il existe un unique garçon qui est ami avec f_1 et f_2.

   Supposons qu'un groupe vérifie la condition voulue et qu'il contienne i filles. Alors un garçon ne peut être dans le groupe que si exactement une de ses deux amies y est. Il y a donc au plus $i(k-i)$ garçons dans le groupe. Le nombre d'élèves est donc au plus $i + i(k-i) = i(k+1-i) \leq \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$ par IAG. Mais le nombre total d'élèves dans la classe vaut $k + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$, donc la proportion des élèves qui sont dans le groupe vaut $\frac{k+1}{2k}$. Pour $k > 50$ (soit une classe d'au moins 1326 élèves), c'est moins que 51%.

   L'idée de considérer une classe aussi "déséquilibrée" peut sembler étrange, mais c'est probablement nécessaire. En effet, si la classe contient une proportion significative de filles, on appliquer la même méthode probabiliste que ci-dessus en gardant chaque fille avec proba $p > \frac{1}{2}$. On aura alors nettement plus de la moitié des filles, mais toujours à peu près la moitié des garçons, donc on devrait atteindre 51%.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On introduit B_1, C_1 les points de tangence du cercle mixtilinéaire avec (AB) et (AC), I le centre du cercle inscrit à ABC.



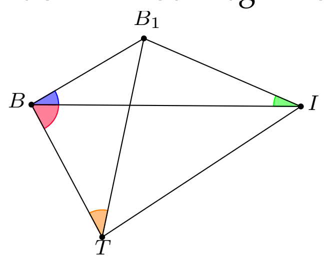
L'exercice consiste à montrer que T est le point d'intersection des cercles circonscrits à MX_1X_2 et MY_1Y_2, autrement dit que T est le centre de la similitude qui envoie X_1 sur X_2 et Y_1 sur Y_2. Notons T' le centre de cette similitude et montrons que $T = T'$ en étudiant les différentes similitudes de centre T et T'.

▷ **Étape 1 :** montrons que T est le centre de la similitude qui envoie B sur I et I sur C. Comme on l'a vu lors du cours sur le cercle mixtilinéaire, les points B, B_1, I, T sont cocycliques, (CI) est tangente au cercle qu'ils définissent, et B_1, I, C_1 sont alignés, donc $\widehat{BIB_1} = \widehat{ICC_1}$. Les cocyclicités des points B, B_1, T, I et C, C_1, T, I permettent d'en déduire également $\widehat{BTB_1} = \widehat{ITC_1}$.

Par ailleurs,

$$\widehat{IBB_1} = \beta/2 = 180^o - (90^o + \alpha/2) - \gamma/2 = 180^o - \widehat{IC_1C} - \widehat{ACI} = \widehat{CIC_1}.$$

On a aussi $\widehat{ITB_1} = \widehat{CTC_1}$. Enfin, on a montrÃ© en cours que (CI) est tangente au cercle circonscrit Ã B, B_1, I, T, donc $\widehat{TIC} = \widehat{TBI}$. Finalement, on a montré que les angles indiqués sur le diagramme suivant sont égaux sur TBB_1I et TIC_1C :



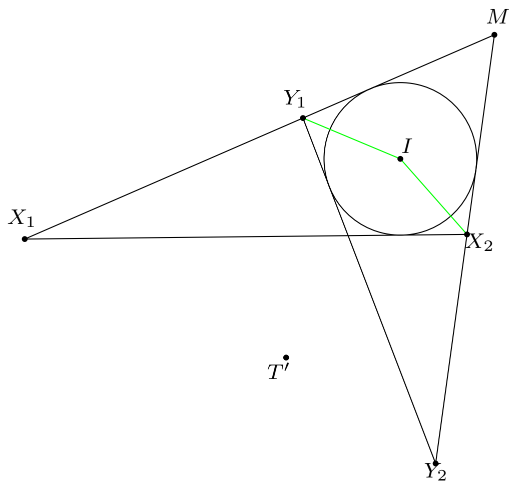
Donc les quadrilatères sont semblables et il existe une similitude de centre T qui envoie B sur I et I sur C.

- **Étape 2 :** montrons que T' est le centre de la similitude s_1 qui envoie B sur X_2 et Y_1 sur C. On a $\widehat{BY_1T'} = \widehat{BCT'}$ car B, Y_1, C, T' cocycliques. On a aussi

$$\widehat{T'X_2C} = 180^o - \widehat{T'X_2X_1} = 180^o - \widehat{T'MX_1} = 180^o - \widehat{T'CY_1} = \widehat{Y_1BT'},$$

donc les triangles $T'BY_1$ et $T'X_2C$ sont bien semblables.

- **Étape 3 :** montrons que T' est le centre de la similitude s_2 qui envoie I sur X_2 et Y_1 sur I. D'après l'indication (qui est vraie d'après le porisme de Poncelet), on peut simplifier la figure :



On calcule en complexes : on pose $I = 0$ et a, b, c, d les affixes de différents points de tangence dans l'ordre $(MX_1), (MX_2), (Y_1Y_2), (X_1X_2)$. On calcule les affixes des sommets :

$$\begin{aligned}
M &= \frac{2ab}{a+b}, \\
Y_1 &= \frac{2bc}{b+c}, \\
(X_1X_2) \cap (Y_1Y_2) &= \frac{2cd}{c+d}, \\
Y_2 &= \frac{2da}{d+a}, \\
X_1 &= \frac{2bd}{b+d}, \\
X_2 &= \frac{2ac}{a+c}.
\end{aligned}$$

Si on note t' l'affixe de T', on sait que $\frac{t'-X_1}{t'-X_2} = \frac{t'-Y_1}{t'-Y_2}$, c'est-à-dire que

$$t' = \frac{Y_1Y_2 - X_1X_2}{X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2} = \frac{2}{1/a + 1/b + 1/c + 1/d}.$$

et on veut montrer que $\frac{t'-Y_1}{t'} = \frac{t'}{t'-X_2}$, c'est-à-dire que

$$t' = \frac{Y_1X_2}{X_2 + Y_1} = \frac{2}{1/a + 1/b + 1/c + 1/d}.$$

D'où le résultat.

▷ **Étape 4 :** concluons. Comme deux similitudes de même centre commutent, les étapes 2 et 3 montrent que T' est le centre de la similitude $s_2^{-1} \circ s_1$ qui envoie B sur I et I sur C. Par unicité du centre de la similitude, $T = T'$, ce qui conclut.

IX. Dernière période

1 Groupe A

1 vendredi 25 matin : Rémi Lesbats

Ce cours est intégralement repris sur celui donné au stage olympique de Montpellier 2014 par Guillaume Conchon–Kerjan, page 411 du polycopié. Il est possible de l'approfondir avec le classique cours de Pierre Bornsztein.

2 vendredi 25 après-midi : Wassim Trabelsi

Introduction aux racines primitives modulo n

Activité : La classe est divisée en deux groupes, un groupe qui travaille modulo 23 et un autre modulo 25. Le but est de classifier toutes les puissances de 2 dans son modulo.

Modulo 23	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}
	1	2	4	8	16	9	18	13	3	6	12	1

Modulo 25	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
	1	2	4	8	16	7	14	3	6	12	24
	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}
	24	23	21	17	9	18	11	22	19	13	1

On remarque que les puissances de 2 forment toujours un cycle complet modulo un nombre impair ! En effet, modulo n impair il n'y a qu'un nombre fini d'entiers compris entre 1 et n. Par le principe des tiroirs, on a donc deux puissances de deux qui sont égales modulo n. Soient donc $a < b$ tels que

$$2^a = 2^b[n]$$

On multiplie chaque coté par $(\frac{n+1}{2})^a$ On a donc $2^{b-a} = 1[n]$ On a donc bien une puissance de 2 qui vaut 1 modulo n. Ce qui confirme l'existence d'un cycle.

Quelle est la longueur de ce cycle ? Une chose est sûre, c'est que le cycle ne passe pas par 0, ni par aucun nombre qui n'est pas premier avec n. Donc celui ci a une longueur comprise entre 1 et $n - 1$.

Une racine primitive modulo n est élément a compris entre 1 et n tel que tout nombre premier avec n peut s'écrire comme une puissance de a modulo n. (Autrement dit le cycle est de longueur maximale)

Dans nos exemples, 2 est une racine primitive modulo 25 mais 2 n'est pas une racine primitive modulo 23.

Cherchons une racine primitive modulo 23.

Modulo 23	5^0	5^1	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	5^7	5^8	5^9	5^{10}	5^{11}
	1	5	2	10	4	20	8	17	16	11	9	22
	5^{12}	5^{13}	5^{14}	5^{15}	5^{16}	5^{17}	5^{18}	5^{19}	5^{20}	5^{21}	5^{22}	5^{23}
	18	21	13	19	3	15	6	7	12	14	1	5

On remarque que 5 est bien une racine primitive modulo 23 car 22 nombres sont visités.

Remarquons que les puissances de 2 modulo 23 sont exactement ceux qui ont des exposants pair. Il est donc facile de retrouver le premier tableau à partir du second.

Lorsque l'on fait l'opération $a^x \times a^y$, au lieu de faire la multiplication puis de réduire modulo n, on peut se contenter de faire l'addition des exposant et rechercher dans le tableau la valeur de a^{x+y}

Exemple : Calculer $9^3 \times 2^4$ modulo 23

$$9^3 \times 2^4 = 5^{30} \times 5^8 = 5^{38} = 5^{38-22} = 5^{16} = 3[23]$$

Le fait de chercher une racine primitive modulo n permet de transformer une structure multiplicative en une structure additive.

Si on cherche maintenant les puissances de 10 modulo 23, on prend notre dernier tableau et on avance dans les cases 3 par 3. On remarque que tous les nombres seront visités avant de tomber sur 1. Donc 10 est une autre racine primitive modulo 23.

Il y a 22 éléments inversibles modulo 23. Pour trouver toutes les racines primitives modulo 23, on prend toutes les puissances de 5 dont les exposants sont premiers avec 22. Les racines primitives sont donc :

$\{5^1, 5^3, 5^5, 5^7, 5^9, 5^{13}, 5^{15}, 5^{17}, 5^{19}, 5^{21}\}$

Soit

$\{5, 10, 20, 17, 11, 21, 19, 15, 7, 14\}$

Il y en a exactement 10 et ce sont les seules modulo 23.

Pour les plus avancés et ceux qui connaissent la fonction d'indicatrice d'Euler, on peut démontrer que modulo n, s'il existe une racine primitive, alors il en existe exactement $\phi(\phi(n))$.

Un dernier théorème très utile mais qui est difficile à démontrer : Il existe une racine primitive modulo n si et seulement si $n = 4$ ou si n s'écrit p^k ou $2p^k$ pour un nombre premier $p \geq 3$ et $k \geq 0$

En particulier, modulo p premier, on a toujours une racine primitive et on en a même exactement $\phi(p-1)$

2 Groupe B

1 vendredi 25 matin : Martin Rakovsky

Ce cours aura pour principal objectif une introduction aux nombres complexes. Nous commencerons par les définir puis nous verrons leur application en géométrie et enfin nous ferons une petite digression sur les racines complexes d'un polynôme.

Des présentations s'imposent

Il existe différentes façon de présenter un nombre complexe. Une première approche consiste à considérer la suite d'équations suivantes :

$$\begin{aligned} x - 42 &= 0 && \text{(IX.1)}\\ x + 42 &= 0 && \text{(IX.2)}\\ 2x + 17 &= 0 && \text{(IX.3)}\\ x^2 - 2 &= 0 && \text{(IX.4)}\\ x^2 + 1 &= 0 && \text{(IX.5)}\\ & && \text{(IX.6)} \end{aligned}$$

La première équation trouve sa solution dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. La deuxième équation trouve sa solution dans $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. La troisième équation trouve sa solution dans $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels. La pénultième équation trouve ses solution dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels.

La dernière équation exige comme solution un nombre dont le carré serait négatif. Ce nombre n'existe pas parmi les réels, nous avons donc « créé » un nouveau nombre noté i dont le carré vaut -1, c'est-à-dire que i est un nombre tel que $i^2 = -1$. Ce nombre est appelé nombre complexe et appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ qui contient tous les ensembles décrits précédemment. Un nombre complexe z peut s'écrire à l'aide de deux réels a et b sous la forme $a + ib$. Nous verrons plus tard que le Â« processus Â» est en quelque sorte terminé puisque n'importe quel polynôme à coefficients réels admet une racine complexe.

Une deuxième approche, plus rigoureuse, consiste à définir un complexe comme un couple de réels $(a, b) \in \mathbb{R}^{\nvDash}$ que l'on note $a + ib$. On définit alors l'addition de deux complexes comme suit :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

et la multiplication un peu plus compliquée

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Avec cette definition, le nombre i correspond au couple $(0, 1)$ et donc on a

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 - 0) = (-1, 0) = -1$$

Somme toute, un nombre complexe $z = a + ib$ peut être caractérisé par sa partie réelle a et par sa partie imaginaire b. En particulier, si la partie imaginaire d'un complexe est nulle, le complexe est réel et si la partie imaginaire d'un complexe est nulle, le complexe appartient à l'ensemble des imaginaires purs noté $i\mathbb{R}$.

On définit ensuite le conjugué d'un complexe $z = a + ib$ comme le nombre $\overline{z} = a - ib$. On peut s'essayer à montrer que :

$$\begin{aligned} \overline{z + z'} &= \overline{z} + \overline{z'} && \text{(IX.7)}\\ \overline{z \cdot z'} &= \overline{z} \cdot \overline{z'} && \text{(IX.8)}\\ \overline{\frac{z}{z'}} &= \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} && \text{(IX.9)}\\ \overline{z^n} &= \overline{z}^n && \text{(IX.10)}\\ & && \text{(IX.11)} \end{aligned}$$

On définit ensuite le module d'un complexe $z = a + ib$ comme le nombre $\sqrt{a^2 + b^2}$. Ce module, noté $\mid z \mid$ aura, nous le verrons, beaucoup d'intérêt en géométrie. De nouveau, on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} \mid \overline{z} \mid &= \mid z \mid && \text{(IX.12)} \\ \mid z \mid + \mid z' \mid &\geq \mid z + z' \mid && \text{(IX.13)} \\ \mid z \cdot z' \mid &= \mid z \mid \cdot \mid z' \mid && \text{(IX.14)} \\ \frac{1}{z} &= \frac{\overline{z}}{\mid z \mid} && \text{(IX.15)} \\ & && \text{(IX.16)} \end{aligned}$$

On peut remarquer que le module d'un complexe ressemble étrangement à la valeur absolue d'un réel. Les propriétés précédentes nous montrent en fait que le module est une « généralisation » de la valeur absolue... Avec ces quelques notions de complexes, on peut déjà aborder les exercices suivants : **Exercice 1** Déterminer tous les nombres complexes z tels que $\mid z \mid + \mid \overline{z} \mid = \mid z + \overline{z} \mid$. **Exercice 2** Déterminer tous les triplets de complexes (x, y, z) satisfaisant le système suivant :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 && \text{(IX.17)} \\ xyz &= 1 && \text{(IX.18)} \\ \mid x \mid = \mid y \mid = \mid z \mid &= 1 && \text{(IX.19)} \\ & && \text{(IX.20)} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 1 On note $z = a + ib$. On remarque que $z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a$ et l'égalité devient $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4a^2}$. Cependant, $2\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4a^2 + 4b^2} \geq \sqrt{4a^2}$ avec égalité si et seulement si $b = 0$. Les complexes solutions sont donc les complexes dont la partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire les nombres réels. *Solution de l'exercice 2* On retrouve dans le système plusieurs fonctions symétriques élémentaires, ce qui peut nous encourager à considérer le polynôme unitaire de degré 3 dont x, y, z sont les racines. Il s'agit du polynôme $t^3 - t^2 + at - 1$ (où on a utilisé les relations de Viète) avec $a = xy + yz + zx$. Si on parvient à déterminer a, il restera à trouver les racines du polynôme. Or :

$$\begin{aligned} a &= xy + yz + zx \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \\ &= \overline{z} + \overline{y} + \overline{x} \\ &= \overline{z + y + x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

x, y, z sont donc les racines du polynôme $t^3 - t^2 + t - 1 = (t^2 + 1)(t - 1) = (t + i)(t - i)(t - 1)$ c'est-à-dire que $\{x, y, z\} = \{-i, 1, i\}$.

Les complexes en géométrie

Qui pourrait croire qu'un objet aussi abstrait qu'un complexe puisse avoir autant d'application dans un domaine aussi »visuel » que la géométrie ? Et pourtant, on pourrait s'en douter puisqu'on rappelle qu'à tout nombre complexe on peut faire correspondre un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^{\not\in}$, ce qui nous fait penser à des coordonnées d'un point.

Ainsi naquit le plan complexe : un plan muni d'un repère orthonormé avec un axe réel qui correspondrait à l'ensemble des points de coordonnées $(x, 0)$ avec x un réel et un axe complexe qui correspondrait à l'ensemble des points de coordonnées $(0, y)$ avec y un réel.

L'avantage du plan complexe sur le plan usuel est que les points du plan complexe n'ont qu'une seule coordonnée $z = a+ib$ que l'on appelle affixe. On retrouve ici l'intérêt du module d'un complexe. Ce module nous fait étrangement penser à une distance dans le plan Euclidien. En effet, on peut facilement se convaincre que le module d'un complexe z correspond à la distance séparant le point du plan complexe d'affixe z de l'origine du repère. Il nous est également permis de calculer la distance entre 2 complexes z et z' puisqu'il s'agit du nombre $\mid z - z' \mid$.

Pour identifier le point A d'affixe z, on peut donc utiliser sa forme algébrique ou on peut utiliser son module ainsi que l'angle formé par l'axe des réels et la droite (OA). Cet angle θ est appelé argument d'un complexe et noté $\arg z$. Il vient alors la question suivante : comment déterminer l'argument d'un nombre complexe ?

Il faut tout d'abord calculer son module puis de noter que

$$z = \mid z \mid \left(\frac{x}{\mid z \mid} + i \frac{y}{\mid z \mid} \right)$$

On remarque ensuite que le point d'affixe $\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}$ se trouve sur le cercle unité donc il existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $\frac{x}{|z|} = \cos\theta$ et $\frac{y}{|z|} = \sin\theta$. Ce θ est l'argument que nous cherchions. On obtient alors ce que l'on appelle la forme trigonométrique de notre complexe z :

$$z = \mid z \mid \left(\cos\theta + i\sin\theta \right)$$

On peut alors chercher quelques propriétés de l'argument : Par exemple, quel est l'argument de $\overline{z}$? On peut facilement retrouver que $\arg\overline{z} = -\arg z$. Ou encore, on peut vouloir exprimer l'argument d'un produit $\arg zz'$ en fonction de $\arg z$ et de $\arg z'$. Pour cela on commence tout simplement par calculer le produit des deux complexes en question en notant $\arg z = \theta$ et $\arg z' = \theta'$:

$$\begin{aligned} zz' &= \mid z \mid \left(\cos\theta + i\sin\theta \right) \cdot \mid z' \mid \left(\cos\theta' + i\sin\theta' \right) && \text{(IX.21)} \\ &= \mid zz' \mid \left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta) \right) && \text{(IX.22)} \\ &= \mid zz' \mid \left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \right) && \text{(IX.23)} \\ & && \text{(IX.24)} \end{aligned}$$

On obtient ainsi la relation suivante :

$$\arg zz' = \arg z + \arg z'$$

qui nous rappelle une propriété de la fonction logarithme népérien et nous rappelle donc la fonction exponentielle. C'est pour cette raison que nous intorduisons la notation suivante, appelée forme exponentielle d'un complexe z d'argument θ :

$$z =\mid z \mid e^{i\theta}$$

Cette forme s'avère très utile et nous permet notamment de calculer facilement les puissances de nombres complexes.

Maintenant que nous avons plusieurs façons de noter un nombre complexe, faire de la géomètrie dans la plan complexe devrait être plus facile. On rappelle que n'importe point du plan complexe possède une affixe. C'est également la cas des vecteurs dans le plan complexe. La translation dans le plan complexe d'un vecteur $\vec{u}$ associe donc à tout point du plan d'affixe z le point du plan d'affixe $z + a$ avec a l'affixe du vecteur $\vec{u}$. De même, une similitude de rapport k, d'angle θ et de centre A d'affixe a associe à tout point d'affixe z le point du plan d'affixe $ke^{i\theta}(z - a) + a$.

On peut également définir le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme la quantité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(z\overline{z'} + \overline{z}z')$ et on retrouve l'équivalence avec le produit scalaire dans le plan réel.

Ce produit est nul si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, en effet, l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ correspond à $\arg \frac{z'}{z}$ et donc si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ avec un peu

De la même façon, les points d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4 sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\arg \frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}$$

soit si et seulement si

$$\arg \frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_1} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2} = 0$$

donc finalement si et seulement si la quantité $\frac{z_4-z_1}{z_3-z_1} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_4-z_2}$ appelée birapport de z_1, z_2, z_3 et z_4 est réelle.

Exercice 3 Pour tous points du plan A, B, C, D on a

$$AC \cdot BD \leq AD \cdot BC + AB \cdot CD$$

avec égalité si et seulement si les points A, B, C, D sont cocycliques ou alignés dans cet ordre. L'inégalité est appelée inégalité de Ptolémée. **Exercice 4** On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1) Montrer que $j^2 + j + 1 = 0$.

2) Montrer que les points A, B, C d'affixes respectives a, b, c sont les sommets d'un triangle équilatéral si et seulement si $aj^2 + bj + c = 0$.

3) Montrer que les points A, B, C d'affixes respectives a, b, c sont les sommets d'un triangle équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$. <u>*Solution de l'exercice 3*</u> On se place dans le plan complexe, avec $A(0), B(b), C(c), D(d)$. L'inégalité devient

$$\mid c \mid\mid d - b \mid\leq\mid d \mid\mid c - b \mid$$

qui devient, en divisant par $\mid bcd \mid$

$$\mid \frac{1}{b} - \frac{1}{d} \mid\leq\mid \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \mid + \mid \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \mid$$

qui correspond à l'inégalité triangulaire avec égalité si et seulement si $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)$ est réel, c'est-à-dire si et seulement si $\frac{b}{d}\cdot\frac{c-d}{c-b}$ est réel. On retrouve bien la condition sur l'alignement ou la cocyclicité des points A, B, C, D

Solution de l'exercice 4 1) La somme $1+j+j^2$ est la somme des trois premiers termes d'une suite géométrique de raison j et de premier terme 1, on a donc

$$1+j+j^2=\frac{1-j^3}{1-j}=\frac{1-(e^{\frac{2\pi}{3}})^3}{1-j}=\frac{1-e^{i2\pi}}{1-j}=\frac{0}{j-1}=0$$

2) D'après l'égalité précédente, on peut remplacer j^2 par $-1-j$ et l'égalité est équivalente à

$$-j(b-a)=c-a$$

c'est-à-dire que C est l'image de B par une rotation d'angle $\arg(-j)=-\frac{\pi}{3}$ donc le triangle ABC est bien équilatéral.

3) L'égalité est équivalente à

$$(aj^2+bj+c)(aj+bj^2+c)=0$$

et on reconnaÃ®t la condition de la question précédente.

Racines complexes d'un polynôme

On commence par énoncer le théroème fondamental de l'algèbre, aussi connu sous le nom de théroème de D'Alembert-Gauss.

ThéorÃ¨me 109. Tout polynôme non constant à coefficients réels admet une racine complexe.

Il découle de ce théorème que tout polynôme à coefficients réels de degré n admet exactement n racines complexes.

Exercice 5 1) Montrer que si a est une racine complexe d'un polynôme P à coefficients réels, alors $\overline{a}$ est également racine de P.

2) En déduire qu'un polynôme P à coefficients réels possède un nombre de racines réelles de même parité que son degré.

Exercice 6 Trouver tous les polynômes à coefficients réels satisfaisant :

$$P(x)P(x-1)=P(x^2)\quad\forall x\in\mathbb{C}$$

Solution de l'exercice 5 1) Posons $P(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i$ et supposons que a est racine de P. On a

$$P(\overline{a})=\sum_{i=0}^{n}c_i\overline{a}^i=\sum_{i=0}^{n}\overline{c_ia^i}=\overline{\sum_{i=0}^{n}c_ia^i}=\overline{0}=0$$

donc $\overline{a}$ est aussi racine de P.

2) On a vu avec la question précédente que pour tout complexe racine de P le complexe conjugué est également racine, donc P admet un nombre pair de racines complexes non

réelles. Donc le nombre de racines réelles de P est de la même parité que son degré puisque P admet $\deg P$ racines complexes.

Solution de l'exercice 6 Si P est constant, alors $P(x) = 0$ ou $P(x) = 1$. On suppose désormais que P est non constant donc P admet une racine complexe noté a. En remplaçant x par a dans l'équation polynomiale on trouve :

$$P(a^2) = P(a)P(a-1) = 0$$

donc a^2 est également racine de P. Il s'ensuit que a^{2^n} est racine de P pour tout entier naturel n. Comme P admet un nombre fini de racine, il s'ensuit que $\mid a \mid = 1$. Cependant, on remarque en remplaçant x par $a+1$ que $(a+1)^2$ est également racine de P ce qui signifie que $(a+1)^{2^n}$ est aussi racine de P pour tout naturel n donc $\mid a \mid = \mid (a+1)^2 \mid = 1$ soit $\mid a \mid = \mid a+1 \mid$. On obtient rapidement que $a = j$ ou $a = j^2$ donc les seules racines de P sont j et j^2 donc P est de la forme $(x-j)^n(x-j^2)^n = (x^2+x+1)^n$. Réciproquement, les polynômes de cette forme sont tous solutions de l'équation polynomiale.

Racines de l'unité

Quels sont les complexes satisfaisant $z^n = 1$?

Déjà, le module d'un tel nombre vaut 1. Posons désormais $z = e^{i\theta}$ et supposons que $z^n = 1$. Dans ce cas, $n\theta = 0 \mod 2\pi$ donc il existe un entier relatif k tel que $n\theta = 2k\pi$ soit $\theta = \frac{2k\pi}{n}$. Puisque $\frac{2n\pi}{n} = 0 \mod 2\pi$ on voit que les n nombres z satisfaisant $z^n = 1$ sont les n nombres de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $0 \leq k \leq n-1$ ou encore les n première puissances du nombre $e^{\frac{2\pi}{n}}$. Ces nombres sont appelés racines n-èmes de l'unité. Une remarque amusante est que $e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}}$ s'obtient en multipliant $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ par $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ donc le point d'affixe $e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}}$ est l'image de $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ par la rotation de centre l'origine du repère et d'angle $\frac{2\pi}{n}$. Donc les n racines n-ème de l'unité forment un n-gone régulier dans le plan complexe.

Exercice 7 Soient A, B, C, D des polynômes à coefficients réels tels que pour tout réel x :

$$A(x^5) + xB(x^5) + x^2C(x^5) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)D(x)$$

Montrer que $A(1) = 0$

Solution de l'exercice 7 On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Il s'agit d'une racine 5-ème de l'unité et elle vérifie

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1-\omega^5}{1-\omega} = \frac{0}{1-\omega} = 0$$

En remplaçant x par ω, ω^2 et ω^3 on trouve successivement

$$A(1) + \omega B(1) + \omega^2 C(1) = 0 \quad \text{(IX.25)}$$
$$A(1) + \omega^2 B(1) + \omega^4 C(1) = 0 \quad \text{(IX.26)}$$
$$A(1) + \omega^3 B(1) + \omega C(1) = 0 \quad \text{(IX.27)}$$
$$\text{(IX.28)}$$

Il s'agit d'un système de 3 équations différentes à 3 inconnus $A(1), B(1), C(1)$, il admet un unique triplet solution. D'autre part, le triplet $(0,0,0)$ est une solution du système, c'est donc la seule solution. Donc $A(1) = 0$.

2 vendredi 25 après-midi : Henry Bambury

Ce cours consistait en une introduction à la théorie des graphes, inspirée du polycopié de Pierre Bornzstein.

3 Groupe C

1 vendredi 25 matin : Martin Andler

2 vendredi 25 matin : Cécile Gachet

Autour du théorème de Monsky

Échauffement : quelques problèmes d'équidissection Soit $\mathcal{P}$ un polygone dans le plan. On se pose la question suivante : pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ peut-on découper $\mathcal{P}$ en n triangles d'aires égales ? On dit que $\mathcal{P}$ est *n-découpable* si un tel découpage existe.
Exercice 1 Montrer que si $\mathcal{P}$ est n-découpable, alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}$ est mn-découpable.

L'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathcal{P}$ est n-découpable est appelé le *spectre* de $\mathcal{P}$.
Exercice 2 Existe-t-il un polygone $\mathcal{P}$ dont le spectre n'est pas de la forme $m\mathbb{N}^*$ pour un certain entier m ?

Exercice 3 Montrer que tout polygone à coordonnées rationnelles est de spectre non vide.

ThéorÃ¨me 110. Le spectre du carré est $2\mathbb{N}^*$.

Le but de la séance est de présenter la démonstration de ce résultat.

Valeurs absolues ultramétriques

(i) $v(x) = 0 \iff x = 0$

(ii) $\forall x, y \in K,\ v(xy) = v(x)v(y)$

(iii) $\forall x, y \in K,\ v(x + y) \leq v(x) + v(y)$.

Une *valeur absolue ultramétrique* sur K est une application $v : K \to \mathbb{R}_+$ vérifiant (i), (ii) et l'hypothèse supplémentaire :

(iii') $\forall x, y \in K,\ v(x + y) \leq \max(v(x), v(y))$.

Exercice 4 Vérifier que toute valeur absolue ultramétrique est bien une valeur absolue. Donner des exemples de valeurs absolues ultramétriques sur $\mathbb{Q}$. à votre avis, existe-t-il des valeurs absolues ultramétriques sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Exercice 5 Soit v valeur absolue ultramétrique sur un corps K. Montrer que :

$$\forall x, y \in K,\ v(x) \neq v(y) \Longrightarrow v(x + y) = \max(v(x), v(y)).$$

Lemme de Sperner Soit RVB un triangle dans le plan. On en définit une triangulation $\mathcal{T}$ et on colorie chaque sommet de $\mathcal{T}$ en rouge, en bleu ou en vert de sorte que :

- ▷ R est rouge, V est vert, B est bleu ;
- ▷ tout sommet de $\mathcal{T} \cap [RV]$ est, au choix, rouge ou vert (et de mÃªme pour $[VB]$ en vert et bleu et $[BR]$ en bleu et rouge).

On dit qu'un petit triangle de la triangulation $\mathcal{T}$ est *multicolore* si ses trois sommets sont de trois couleurs différentes. On a alors le résultat suivant :

ThéorÃ¨me 111. Le nombre de petits triangles multicolores de $\mathcal{T}$ est impair.

On présente deux preuves de ce lemme, l'une reposant sur un double comptage astucieux, la seconde sur un argument de type « path-finding ». Pour plus de détails, voir les références *infra*.

Exercice 6 Que se passe-t-il si on remplace RVB par un polygone quelconque dans l'énoncé du lemme ?

Théorème de Monsky Voici quelques éléments permettant de recoller les morceaux ; pour plus de détails, voir les références *infra*.

Admettons qu'on dispose d'une valeur absolue ultramétrique v qui prolonge la valeur absolue 2-adique à $\mathbb{R}$ (on peut en discuter à la fin si le temps le permet).

Exercice 7 Si n est impair, montrer que $v\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.

On définit le coloriage du carré suivant : pour tout $x, y \in [0, 1]$,

$$(x, y) \text{ est } \begin{cases} \text{rouge} & \text{si } v(x) \geq v(y) \text{ et } v(x) \geq 1, \\ \text{vert} & \text{si } v(x) < v(y) \text{ et } v(y) \geq 1, \\ \text{bleu} & \text{si } v(x) < 1 \text{ et } v(y) < 1. \end{cases}$$

Exercice 8 Que peut-on dire des couleurs de trois points qui sont alignés (indication : trois points alignés sont trois points qui forment un triangle d'aire nulle) ?

Exercice 9 Que dire de l'aire d'un triangle dont les trois sommets sont de trois couleurs différentes (indication : considérer sa valeur absolue ultramétrique) ?

Exercice 10 Conclure la preuve du théorème de Monsky.

Exercice 11 Existe-t-il un polygone de spectre vide ?

Sujets liés Selon le temps restant et les préférences de chacun, on peut continuer la discussion sur :

- ▷ des résultats plus récents d'équidissection ;
- ▷ un peu de théorie des valuations ;
- ▷ d'autres jolies applications du lemme de Sperner.

Pour aller plus loin… Vous pouvez notamment lire, regarder, feuilleter les documents suivants :

- ▷ le chapitre de *Proofs from the Book* d'Aigner et Ziegler traitant du théorème de Monsky (c'est plus ou moins ce qu'on fait, avec en plus une annexe sur les extensions de valeurs absolues ultramétriques ; attention toutefois, cette annexe est plus technique et utilise des outils non élémentaires) ;

- ▷ une vidéo sur une preuve du lemme de Sperner et une jolie application aux problèmes de partage : `https://www.youtube.com/watch?v=7s-YM-kcKME` ;
- ▷ la page Wikipédia sur l'équidissection, qui résume les avancées dans ce domaine et fournit les références idoines (attention, c'est déjà plus compliqué !).

4 Groupe D

1 vendredi 25 après-midi : Mathieu Barré

La théorie analytique des nombres désigne l'étude asymptotique des nombres entiers, c'est-à-dire le comportement à l'infini, « vu de loin », de certaines quantités arithmétiques. Ce domaine des mathématiques consiste donc en un mélange d'arithmétique et d'analyse (réelle ou complexe). Dans tout ce document, les notations n et p désigneront respectivement un nombre entier et un nombre premier. La somme $\sum_{p \leq x} \dots$ s'étend donc sur tous les nombres premiers p inférieurs à x.

Exercice 1 Pour des fonctions f et g, avec g à valeurs positives, on adopte les notations suivantes :

- ▷ $f(x) = O(g(x))$ s'il existe une constante positive C indépendante de x telle que pour tout x suffisamment grand, $|f(x)| \leq Cg(x)$.
- ▷ $f(x) = o(g(x))$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- ▷ $f(x) \sim g(x)$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

1. Formuler des affirmations avec des O, o et $\sim$ pour les fonctions suivantes :
   x, $x+1$, $x+\frac{1}{x}$, $21x$, $\ln x$, $\ln(x+1)$, $\ln(\ln x)$, $\sin x$, 1.
2. Que peut-on dire de f si $f(x) = o(1)$? Si $f(x) = O(1)$?
3. Montrer que $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x)) \Leftrightarrow g(x) = f(x) + o(f(x))$.
4. Si $f(x) = O(g(x))$ et $g(x) = O(f(x))$, a-t-on nécessairement $f(x) \sim g(x)$?
5. On admet (si vous arrivez à le démontrer tout seul, ça m'intéresse) le théorème des nombres premiers : si $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, alors on a l'équivalent
   $$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$
   En déduire que le n-ième nombre premier p_n vérifie $p_n \sim n \ln n$.

Exercice 2 (série harmonique) On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que
   $$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$$
2. En déduire que la série harmonique diverge et que $H_n \sim \ln n$.
3. On note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs d'un entier n. Prouver l'inégalité $\sigma(n) \leq n + n\ln n$.

Exercice 3 On note $d(n)$ le nombre de diviseurs d'un entier n et on pose $F(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} d(k)$.

1. Montrer que $F(n) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.
2. En déduire que $F(n) \sim n \ln n$.
3. Cela signifie-t-il que le nombre de diviseurs de n est « souvent » de l'ordre de $\ln n$?

Exercice 4

1. Montrer que pour tout réel $x \in \left]-1; 1\right[$, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$
2. Pour une partie finie X de l'ensemble des nombres premiers, on note $N(X)$ l'ensemble des nombres naturels dont la factorisation en facteurs premiers ne fait intervenir que des nombres premiers de X. Montrer que pour tout entier s
$$\prod_{p\in X} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n\in N(X)} \frac{1}{n^s}$$
3. Pour $s > 1$, on admet que $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est bien définie. Déduire de ce qui précède que
$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$
Cette formule fondamentale fait le lien entre la fonction ζ (« zêta ») de Riemann et les nombres premiers, c'est-à-dire entre l'analyse et l'arithmétique.

Exercice 5 (preuve analytique de l'infinité des nombres premiers)

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 1$ on a l'inégalité
$$\ln x \leq \prod_{p\leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$
2. En déduire que $\ln x \leq \pi(x) + 1$ et conclure.

Exercice 6 (dû à Erdös) L'objectif est de démontrer que la série $\sum_p \frac{1}{p}$ diverge. On raisonne par l'absurde en supposant que cette série converge. Il existe donc un entier k tel que
$$\sum_{i\geq k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$$
Appelons $p_1, \ldots, p_k$ les « petits » nombres premiers et $p_{k+1}, \ldots$ les « grands » nombres premiers. Soit N un entier fixé. Notons

- ▷ N_g le nombre d'entiers inférieurs à N divisibles par un grand nombre premier au moins

▷ N_p le nombre d'entiers inférieurs à N qui n'ont que des petits diviseurs premiers

1. Justifier l'égalité $N_g + N_p = N$.
2. Montrer que $N_g < \frac{N}{2}$.
3. En écrivant tous les entiers $n \leq N$ n'ayant que des petits diviseurs premiers sous la forme $n = a_n b_n^2$, avec a_n sans facteur carré, prouver que $N_p \leq 2^k \sqrt{N}$.
4. En choisissant N convenablement, obtenir une contradiction à l'aide des trois questions précédentes et conclure.

Exercice 7

1. Montrer que
$$\ln(\ln x) - \ln \frac{\pi^2}{6} \leq \sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$$
2. En utilisant des techniques plus avancées (une sommation d'Abel et le résultat de l'exercice suivant), on peut en fait montrer que $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \sim \ln(\ln x)$. Retrouver cet équivalent à l'aide du théorème des nombres premiers.

Exercice 8 (premier théorème de Mertens)

1. En s'inspirant des techniques de l'exercice 2, montrer que $\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n)$
2. Montrer la formule de Legendre
$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$
En déduire l'inégalité
$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$
3. Soit m un entier. Montrer que $\displaystyle\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p$ divise $\binom{2m+1}{m}$. En déduire la majoration
$$\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq 4^m$$
4. Montrer par récurrence l'inégalité $\displaystyle\prod_{p\leq n} p \leq 4^n$.
5. En considérant $\ln(n!)$, montrer l'estimation
$$\sum_{p\leq x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1)$$

Exercice 9 On souhaite affiner le résultat de l'exercice 3, dont on reprend les notations.

1. Justifier l'existence de $\gamma = \lim_{n \to +\infty} (H_n - \ln n)$.

2. Montrer que $F(n) = 2\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor^2$.
3. En déduire que $F(n) = n\ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$.

Exercice 10 On note q_n le plus grand diviseur premier de n.
Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{nq_n}$?

Exercice 11 Soit r_n le plus petit nombre premier ne divisant pas n.
Montrer (sans utiliser le postulat de Bertrand) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{r_n}{n} = 0$.

2 vendredi 25 après-midi : Thomas Budzinski

Définitions et énoncé du théorème

Définition 112. Un *empilement de cercles C* est un ensemble de cercles dont les intérieurs sont disjoints. Si C_j est un de ces cercles, on note c_j son centre.

On peut, de manière naturelle, associer à tout empilement de cercles un graphe de la façon suivante. L'ensemble des sommets du graphe est l'ensemble des c_i, et on relie c_i à c_j par un segment si et seulement si les cercles C_i et C_j sont tangents. Notons que le segment $[c_ic_j]$ est entièrement contenu dans les disques intérieurs à C_i et C_j, donc il n'intersecte pas d'autre segment, donc les segments ne s'intersectent pas. Le graphe obtenu est donc planaire. On l'appelle *graphe de tangence* de C. Le but de ce cours est de montrer le théorème suivant.

ThéorÃ¨me 113. Tout graphe planaire est le graphe de tangence d'un empilement de cercles.

Notons tout d'abord une conséquence immédiate de ce théorème. C'est un résultat non-trivial, mais il existe des preuves plus simples que de passer par des empilements de cercles.

ThéorÃ¨me 114. Tout graphe planaire peut se représenter dans le plan de telle manière que toutes les arêtes sont des lignes droites.

Premières remarques et idée de la preuve

On commence par remarquer qu'il suffit de montrer le théorème pour une certaine classe de graphes planaires.

ThéorÃ¨me 115. On dit qu'un graphe planaire est *triangulaire* si il est possible de le représenter dans le plan de telle manière que toutes les faces formées (y compris la face externe !) sont des triangles.

Dans toute la suite, pour ne pas alourdir le propos, on s'autorisera à confondre le graphe avec la manière de le dessiner dans le plan. En particulier, on parlera de *faces* du graphe, même si a priori ces faces pourraient dépendre de la manière dont on dessine le graphe.

Il est suffisant de montrer le théorème pour les graphes planaires triangulaires. En effet, soit G un graphe planaire. On le représente dans le plan, et on note V l'ensemble de ses sommets et F l'ensemble des faces. On considère le graphe G^t dont les sommets sont les éléments de $V \cup F$, et où :

▷ si $v, v' \in V$, ils sont reliés dans G^t ssi ils le sont dans G,
▷ si $v \in V$ et $f \in F$, ils sont reliés dans G^t ssi la face f touche le sommet v,
▷ si $f, f' \in F$, alors f et f' ne sont pas reliées dans G^t.

Alors G^t est un graphe planaire triangulaire qui contient G. Si G^t est le graphe de tangence d'un empilement de cercles, il suffit de considérer cet empilement de cercles et de retirer tous les cercles correspondant à des faces de G. On obtient alors un empilement de cercles dont le graphe de tangence est G.

On supposera donc dans la suite que G est un graphe planaire triangulaire à n sommets. On identifie ses sommets aux entiers de 1 à,n. Si f est une face adjacente aux trois sommets i, j et k, on la notera f_{ijk}. On note F l'ensemble des faces de G. Quitte à permuter les sommets, on peut supposer que la face externe est f_{123}. Si $\{C_i\}$ est un empilement qui marche, on note r_i le rayon du cercle correspondant à v_i et c_i son centre. Notons que si il existe un empilement de cercles dont le graphe de tangence est G, quitte à appliquer des inversions bien choisies, on peut supposer que les centres c_1, c_2 et c_3 forment un triangle équilatéral de côté 1.

On énonce tout de suite un résultat général sur les graphes planaires qui nous sera utile dans la suite : la formule d'Euler.

ThéorÃ¨me 116. Soit G un graphe planaire connexe dessiné sur la sphère, V l'ensemble de ses sommets, E l'ensemble de ses arêtes et F l'ensemble de ses faces. Alors

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

De plus, si toutes les faces sont triangulaires, alors

$$|E| = 3|V| - 6 \quad \text{et} \quad |F| = 2|V| - 4.$$

Démonstration. On fixe le nombre de sommets et on fait une récurrence sur le nombre d'arêtes. Comme le graphe est connexe, on doit avoir $|E| \geq |V| - 1$. Si $|E| = |V| - 1$, alors G est un arbre, donc $|F| = 1$ et la formule est vérifiée. De plus, si on ajoute une arête, alors on sépare une face en 2 donc $|E|$ et $|F|$ augmentent de 1 tandis que $|V|$ ne bouge pas, donc la formule reste vraie.

Si toutes les faces sont des triangles, on considère que chaque arête a un côté droit et un côté gauche. Il y a donc $2|E|$ côtés d'arêtes. Mais chaque face contient aussi exactement 3 côtés d'arêtes, donc $2|E| = 3|V|$. On a deux équations pour trois inconnues, donc il est facile de tout exprimer en fonction de $|V|$. □

L'idée de la démonstration est la suivante : on commence par chercher quelles sont les conditions que doivent vérifier les rayons des cercles de l'empilement. D'après la formule d'Al-Kashi, on a

$$\widehat{c_i c_j c_k} = \arccos \frac{(r_i + r_j)^2 + (r_j + r_k)^2 - (r_i + r_k)^2}{2(r_i + r_j)(r_j + r_k)} =: \theta(r_i, r_j, r_k).$$

Or, on sait que la somme des angles en c_j doit valoir 2π si $j \geq 4$ (i.e. le sommet j est à l'intérieur), et à $\frac{\pi}{3}$ si $1 \leq j \leq 3$ (i.e. le sommet j touche la face externe). Pour tout j, on pose donc

$$G_j(\vec{r}) = \sum_{f_{ijk} \in F} \theta(r_i, r_j, r_k).$$

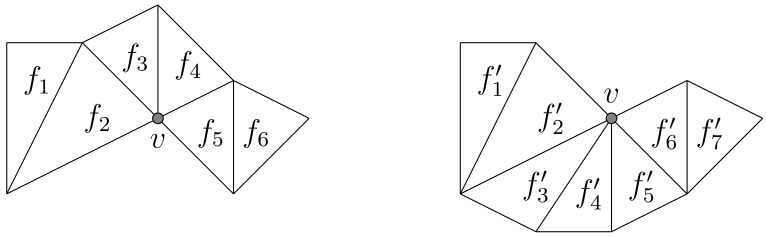


FIGURE 1 – Un exemple d'opération élémentaire : au lieu de passer à gauche de v, on passe à droite.

On pose aussi $\delta_j(\vec{r}) = G_j(\vec{r}) - 2\pi$ pour $j \geq 4$ et $\delta_j(\vec{r}) = G_j(\vec{r}) - \frac{\pi}{3}$ pour $1 \leq j \leq 3$. On va devoir trouver un vecteur $\vec{r}$ tel que $\delta_j(\vec{r}) = 0$ pour tout j.

La preuve se divise alors en deux parties. D'une part, il faut trouver un vecteur $\vec{r}$ qui vérifie la condition voulue, ce qu'on fera par une méthode algorithmique. D'autre part, il faut vérifier que si $\vec{r}$ vérifie les conditions voulues, alors on peut bien construire notre empilement de cercles.

Deuxième étape : construction à partir des rayons

Supposons qu'on ait trouvé $\vec{r}$ tel que $\delta_j(\vec{r}) = 0$ pour tout j. Si v_i et v_j sont reliés, la distance entre les centres c_i et c_j correspondants doit valoir $r_i + r_j$. Le triangle t_{ijk} correspondant à la face f_{ijk} aura donc pour côtés $r_i + r_j$, $r_j + r_k$ et $r_k + r_i$. On place c_1, c_2 et c_3 aux sommets d'un triangle équilatéral, et on cherche à paver le triangle $c_1c_2c_3$ par les triangles t_{ijk}.

Pour savoir où placer le triangle t_{ijk}, on peut procéder de la manière suivante : soit $(f_0, f_1, \ldots, f_p)$ une suite injective de faces telles que f_0 est la face externe, f_p est la face f_{ijk}, et les faces f_i et f_{i+1} se touchent pour tout i. Une telle suite est appelée *chaîne de f_0 vers f_{ijk}*. La face f_0 est placée. La face f_1 touche deux sommets de f_0 (supposons 1 et 2), donc on doit la coller le long de l'arête entre c_1 et c_2, et ainsi de suite. On finit ainsi par placer f_{ijk}. Il reste à vérifier deux choses :

1. la position de f_{ijk} ne dépend pas de la chaîne choisie,
2. les triangles ne s'intersectent pas.

On commence par prouver le premier point. Soit $(f_0, f_1, \ldots, f_p)$ une chaîne, et soit v un sommet adjacent à au moins une face de la chaîne. On suppose que les faces de la chaîne adjacentes à v sont $f_i, f_{i+1}, \ldots, f_j$. Alors il y a deux manières de passer de f_i à f_j en "tournant" autour de v : on peut contourner v "par la gauche" ou bien "par la droite". L'une de ces deux manières est celle utilisée par f, on peut la remplacer par l'autre (cf. Figure 1). On obtient ainsi une nouvelle chaîne. Une telle opération est appelée *opération élémentaire*.

Soit (f_i) une chaîne de f_0 vers f_{ijk} et (f'_i) une chaîne obtenue en faisant subir une opération élémentaire à (f_i). On veut montrer que f et f' placent t_{ijk} au même endroit. Par exemple, sur la figure 1, on a f_2 et f'_2 au même endroit car f et f' coÃ¯ncident jusque là. De plus, d'après la condition vérifiée par $\vec{r}$, on sait que la somme des angles en v des 7 triangles qui touchent v vaut 2π, donc f_5 va être au même endroit que f'_6. La fin de la chaîne est la même, donc f_6 et f'_7 seront au même endroit, donc deux chaînes donnent la même position pour t_{ijk} si on peut passer de l'une à l'autre par une opération élémentaire. Or, il est assez facile de se convaincre qu'on peut passer de n'importe quelle chaîne (de f_0 vers f_{ijk}) à n'importe quelle autre par une nombre fini d'opérations élémentaires, donc la position de t_{ijk} ne dépend pas de la chaîne choisie.

On vérifie maintenant que deux triangles ne s'intersectent pas. Soient f et f' deux faces. On rappelle que f_0 est la face externe, et on note f_1 la face qui touche f_0 en bas. Soit (f_i) une chaîne de f_0 vers f qui passe par f_1 mais pas par f'. On commence par placer f en suivant la chaîne (f_i), et on trace en rouge la limite de la zone déjà pavée. Puis on choisit un sommet sur la ligne rouge, et on place toutes les faces qui touchent le sommet. Comme la somme des angles vaut 2π, ça marche bien. Cela permet de déplacer la ligne rouge. On finira ainsi par placer f', qui sera donc forcément "au-dessus" de la ligne rouge. Cela permet de conclure.

Première étape : trouver les rayons

Comme promis, l'argument est algorithmique. On commence avec tous les rayons égaux à 1. Si $\delta_j(\vec{r}) > 0$, alors la somme des angles en j est trop grande, donc les angles en j sont trop grands, donc le rayon r_j est trop petit. Il faut donc augmenter ce rayon. De même, si $\delta_j(\vec{r}) < 0$, alors il faut diminuer r_j. On va donc préciser de combien on augmente ou diminue les rayons, puis vérifier qu'un tel algorithme converge vers un $\vec{r}$ tel que $\delta_j(\vec{r}) = 0$ pour tout j. Ce n'est a priori pas évident : il est possible qu'en modifiant un r_j, on pose des problèmes encore plus gros pour un de ses voisins.

Notons d'abord que $\theta(r_i, r_j, r_k)$ est une fonction croissante de r_i et r_k, et décroissante de r_j. Cela peut se montrer en dérivant, mais semble naturel d'un point de vue géométrique. De plus, on a

$$\theta(r_i, r_j, r_k) + \theta(r_j, r_k, r_i) + \theta(r_k, r_i, r_j) = \pi,$$

donc la somme de tous les angles vaut $|F| - 1$, le nombre de faces autres que la face externe. D'autre part, la somme de tous les angles qu'on veut obtenir vaut $3\times\frac{\pi}{3}+(n-3)2\pi = (2n-5)\pi = (|F| - 1)\pi$ d'après la formule d'Euler. On en déduit $\sum_j \delta_j(\vec{r}) = 0$ pour tout $\vec{r}$.

L'algorithme est le suivant. On place les valeurs $\delta_j(\vec{r})$ sur une droite, et on repère le plus grand écart entre deux termes consécutifs. Autrement dit, on considère le sous-ensemble $S \subset [\![1, n]\!]$ qui maximise

$$\min_{j \notin S} \delta_j(\vec{r}) - \max_{j \in S} \delta_j(\vec{r}).$$

Pour $\lambda \in]0, 1[$, on définit le vecteur $\vec{r}^{\lambda}$ par

$$r_j^{\lambda} = \frac{r_j}{\lambda \sum_{j\in S} r_j + \sum_{j\notin S} r_j} \text{ pour } j \notin S,$$

$$r_j^{\lambda} = \frac{\lambda r_j}{\lambda \sum_{j\in S} r_j + \sum_{j\notin S} r_j} \text{ pour } j \in S.$$

Autrement dit, on multiplie par λ tous les r_j qui sont "trop grands", et on divise tous les r_j par une constante pour que $\sum_j r_j^{\lambda} = 1$. Avant de préciser notre choix de λ, on commence par vérifier que ce procédé "va dans le bon sens".

Lemme 117. Soit $\lambda \in]0, 1[$. On a $\delta_j(\vec{r}^{\lambda}) \geq \delta_j(\vec{r})$ pour tout $j \in S$, et $\delta_j(\vec{r}^{\lambda}) \leq \delta_j(\vec{r})$ pour tout $j \notin S$.

Démonstration. Supposons que $j \in S$, et soit f_{ijk} une face adjacente à j. On distingue trois cas :

1. si $i, k \in S$, alors r_i, r_j et r_k sont tous multipliés par λ, donc $\theta(r_i^{\lambda}, r_j^{\lambda}, r_k^{\lambda}) = \theta(r_i, r_j, r_k)$,

2. si $i \notin S$ et $k \in S$ (ou l'inverse), alors r_j et r_k sont multipliés par λ et r_i ne bouge pas, ce qui revient à multiplier r_i par λ^{-1}, donc à l'augmenter. Comme θ est une fonction croissante de r_i, l'angle $\theta(r_i, r_j, r_k)$ augmente.
3. si $i, k \notin S$, alors r_j est multiplié par λ (donc diminue) et les deux autres ne bougent pas. Comme θ est une fonction décroissante de r_j, l'angle $\theta(r_i, r_j, r_k)$ augmente.

Ainsi, pour toute face f_{ijk} adjacente à j, l'angle $\theta(r_i, r_j, r_k)$ augmente, donc $\delta_j(\vec{r})$ augmente. □

Une manière naturelle de choisir λ est d'essayer de "boucher le trou" entre S et $V \backslash S$. Le lemme suivant montre que c'est possible.

Lemme 118. Il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que

$$\min_{j \notin S} \delta_j(\vec{r}^\lambda) = \max_{j \in S} \delta_j(\vec{r}^\lambda).$$

Démonstration. Il s'agit d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. On sait que les deux membres sont des fonctions continues de λ et que pour $\lambda = 1$, le membre de gauche est plus grand que celui de droite. Il suffit donc de montrer que quand $\lambda \to 0$, le membre de droite est plus grand.

Pour cela, il suffit de montrer

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{j \in S} \delta_j(\vec{r}^\lambda) > 0.$$

En effet, comme la somme des δ_j est nulle, on aura alors $\lim_{\lambda \to 0} \sum_{j \notin S} \delta_j(\vec{r}^\lambda) < 0$, donc il y a aura au moins un $\delta_j(\vec{r}^\lambda) > 0$ avec $j \in S$, et au moins un $\delta_j(\vec{r}^\lambda) < 0$ avec $j \notin S$, ce qui suffit à conclure.

Pour cela, considérons une face f_{ijk}. Si $i, j, k \notin S$, alors aucun angle de cette face ne contribue à un sommet de S. Supposons qu'un des sommets soit dans S, par exemple i. On montre alors que quand $\lambda \to 0$, la somme des angles de f_{ijk} en des sommets de S tend vers π :

1. si $i, j, k \in S$, alors la somme des angles vaut de toute façon π,
2. si $i, j \in S$ mais $k \notin S$, alors quand $\lambda \to 0$, on a $r_i, r_j \to 0$ et r_k reste identique, donc $\theta(r_i, r_k, r_j) \to 0$, donc la somme des angles en i et j tend vers π,
3. si $i \in S$ mais $j, k \notin S$, alors quand $\lambda \to 0$, on a $r_i \to 0$ mais r_j, r_k restent identiques. On en déduit que l'angle en i tend vers π.

Par conséquent, quand on cherche à calculer $\sum_{j \in S} G_j(\vec{r}^\lambda)$ quand $\lambda \to 0$, chaque face qui touche un sommet de S apporte une contribution π. On note F_S l'ensemble de ces faces. On a ainsi

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{j \in S} G_j(\vec{r}^\lambda) = |F_S|\pi.$$

On veut donc montrer que $|F_S|$ est grand. On va faire cela en appliquant la formule d'Euler au graphe $G_{\overline{S}}$ formé par les sommets qui ne sont pas dans S. Notons que ce graphe n'a aucune raison d'être triangulaire. On note $E_{\overline{S}}$ l'ensemble de ses arêtes et $F_{\overline{S}}$ l'ensemble de ses faces. Alors il a $2|E_{\overline{S}}|$ côtés d'arêtes, et chaque face contient au moins 3 côtés d'arêtes, donc il y a au moins $3|F_{\overline{S}}|$ côtés d'arêtes, donc $2|E_{\overline{S}}| \geq 3|F_{\overline{S}}|$, donc $|E_{\overline{S}}| \geq \frac{3}{2}|F_{\overline{S}}|$. D'après la formule d'Euler, on a donc

$$2 = |\overline{S}| - |E_{\overline{S}}| + |F_{\overline{S}}| \leq |\overline{S}| - \frac{3}{2}|F_{\overline{S}}| + |F_{\overline{S}}| = |\overline{S}| - \frac{1}{2}|F_{\overline{S}}|,$$

d'où $|F_{\overline{S}}| \leq 2|\overline{S}| - 4$. Or, si une face de G ne touche aucun sommet de S, alors tous les sommets qu'elle touche sont dans $\overline{S}$, donc elle est aussi une face de $G_{\overline{S}}$. On a donc $|F_S| \geq |F| - |F_{\overline{S}}| \geq 2|V| - 4 - (2|\overline{S}| - 4) = 2|S|$. De plus, supposons qu'on ait une égalité. Alors :

- ▷ toutes les faces de $G_{\overline{S}}$ sont des triangles,
- ▷ toutes les faces de $G_{\overline{S}}$ étaient déjà des faces de G.

Cela implique que $S = V$ (exercice !), ce qui est absurde. L'inégalité est donc stricte, donc $|F_S| > 2|S|$, donc

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{j \in S} G_j(\vec{r}^\lambda) > 2|S|\pi,$$

donc

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{j \in S} \delta_j(\vec{r}^\lambda) > 0,$$

car au pire on retire 2π pour chaque sommet $j \in S$ (on retire peut-être $\frac{\pi}{3}$ pour certains). On a donc montré le lemme (ouf !). □

Pour alléger les notations, on va poser $\delta_j = \delta_j(\vec{r})$ et $\delta'_j = \delta_j(\vec{r}^\lambda)$. Pour montrer la convergence, on va utiliser un "monovariant", et montrer qu'il décroît assez vite. Soient donc également $\varepsilon = \sum_j \delta_j^2$ et $\varepsilon' = \sum_j (\delta'_j)^2$. On veut montrer que ε' est "nettement plus petit" que ε. Enfin, on pose

$$t = \max_{j \in S} \delta'_j = \min_{j \notin S} \delta'_j.$$

En utilisant $\sum_j \delta_j = \sum_j \delta'_j = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon - \varepsilon' &= \sum_j \delta_j^2 - \sum_j (\delta'_j)^2 \\ &= \sum_j (\delta_j - \delta'_j)^2 - 2\sum_j \delta'_j(\delta'_j - \delta_j) \\ &= \sum_j (\delta_j - \delta'_j)^2 + 2\sum_j (t - \delta'_j)(\delta'_j - \delta_j). \end{aligned}$$

Or, pour $j \in S$, on a $\delta'_j \leq t$ (d'après notre choix de λ), et $\delta'_j \geq \delta_j$ (d'après le lemme 117). Pour $j \notin S$, on a de même $\delta'_j \geq t$ et $\delta'_j \leq \delta_j$. Ainsi, tous les termes de la deuxième somme sont positifs, donc

$$\varepsilon - \varepsilon' \geq \sum_j (\delta_j - \delta'_j)^2.$$

On cherche à montrer que cela représente une proportion pas trop petite de ε. On va raisonner de manière assez brutale. Soit

$$\Delta = \min_{i \notin S} \delta_i - \max_{i \in S} \delta_i$$

le "trou" qu'on cherchait à combler au début. On sait, par définition de λ, qu'il existe $i \in S$ et $j \notin S$ tels que $\delta'_i = \delta'_j$, donc un des δ_j a bougé au moins de $\frac{\Delta}{2}$. Ainsi, il existe j tel que $|\delta_j - \delta'_j| \geq \frac{\Delta}{2}$, d'où

$$\varepsilon - \varepsilon' \geq \sum_j (\delta'_j - \delta_j)^2 \geq \frac{\Delta^2}{4}.$$

Or, par définition de S, on sait que Δ est le plus grand écart entre deux δ_i "consécutifs", et il y a $n - 1$ tels intervalles. Tous les δ_i sont donc contenus dans un intervalle de longueur

$(n-1)\Delta$. Comme leur somme est nulle, au moins un est négatif donc ils sont tous plus petits que $(n-1)\Delta$, et de même ils sont tous plus grands que $-(n-1)\Delta$, donc $\delta_j^2 \leq (n-1)^2\Delta^2$ pour tout j. On en déduit

$$\varepsilon \leq n^3\Delta^2,$$

d'où

$$\varepsilon - \varepsilon' \geq \frac{\varepsilon}{4n^3}.$$

On a donc finalement $\varepsilon' \leq \left(1 - \frac{1}{4n^3}\right)\varepsilon$.

Quand on applique notre algorithme, on note $\vec{r^k}$ le vecteur obtenu après k étapes, et on définit de même $\delta_j(\vec{r^k})$ et $\varepsilon(\vec{r^k})$. On a $\varepsilon(\vec{r^k}) \leq \left(1 - \frac{1}{4n^3}\right)^k$ donc $\varepsilon(\vec{r^k}) \to 0$ quand $k \to +\infty$. En partant de là, on cherche à trouver un vecteur $\vec{r}$ tel que $\varepsilon(\vec{r}) = 0$.

Or, $(\vec{r^k})_{k\geq 0}$ est une suite de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que $|r_j^k| \leq 1$ pour tous $k \in N$ et $1 \leq j \leq n$. Il existe une suite (k_i) telle que les vecteurs $\vec{r^{k_i}}$ convergent vers un vecteur $\vec{r^\infty}$. C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass, qui se voit bien pour des vecteurs en dimension 2. En effet, si on a une infinité de points dans un carré, on peut le diviser en 4 carrés plus petit. L'un d'eux contient une infinité de nos points, donc on peut le rediviser en 4 carrés et ainsi de suite. Les carrés de plus en plus petits se rapprochent d'un point, qui est notre $\vec{r^\infty}$.

On a alors $\varepsilon(\vec{r^\infty}) = 0$, par continuité de toutes les fonctions considérées. On sait de plus que $\sum_j r_j^k = 1$ pour tout k d'après notre algorithme, donc $\sum_j r_j^\infty = 1$. Le vecteur $\vec{r^\infty}$ semble donc convenir. Mais attention ! On sait que $r_j^k > 0$ pour tous $j \in V$ et $k \in \mathbb{N}$, mais il serait possible que $r_j^\infty = 0$ pour certains sommets j.

Si c'est le cas, notons Z l'ensemble des j tels que $r_j^\infty = 0$. Pour les mêmes raisons que dans la preuve du lemme 118, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{j\in Z} G_j(\vec{r^k}) = |F_Z|\pi,$$

où F_Z est l'ensemble des faces avec au moins un sommet dans Z. En utilisant la formule d'Euler, comme dans le lemme 118, on obtient $|F_Z| < 2|Z|$, donc finalement

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{j\in Z} \delta_j(\vec{r^k}) > 0.$$

Mais on sait que $\varepsilon(\vec{r^k}) \to 0$ quand $k \to +\infty$, donc $\delta_j(\vec{r^k}) \to 0$ pour tout j, donc $\sum_{j\in Z} \delta_j(\vec{r^k}) \to 0$, d'où la contradiction. On a donc bien $r_j^\infty > 0$ pour tout j, donc on a bien construit une suite de rayons qui marchent, d'où le théorème.

"Unicité" des rayons par le principe du maximum

On va maintenant montrer un résultat d'unicité. Remarquons tout d'abord que l'empilement de cercles qui représente un graphe planaire est loin d'être unique. En effet, l'image d'un empilement de cercles par n'importe quelle similitude ou inversion est un empilement de cercles, dont le graphe de tangence est le même. En particulier, si la face externe est f_{123}, on pourra toujours envoyer les trois points de tangence de C_1 et C_2, C_2 et C_3 et C_3 et C_1 sur les sommets d'un triangle équilatéral, ce qui aura pour conséquence que les trois cercles "extérieurs" ont le même rayon. Une question plus pertinente est donc la suivante : étant donné un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$, existe-t-il plusieurs empilements de cercles de graphe de tangence G, tels que les sommets 1, 2 et 3 sont envoyés sur A_1, A_2 et A_3 ?

ThéorÃ¨me 119. Soit G un graphe et f une face dont on appelle les sommets 1, 2 et 3. Soit $A_1A_2A_3$ un triangle équilatéral. Alors l'empilement de cercles de graphe de tangence G tel que les centres des cercles correspondant aux sommets 1, 2 et 3 sont les points A_1, A_2 et A_3 est unique.

Démonstration. On peut supposer que le triangle équilatéral est de côté 2. Supposons qu'il existe deux empilements de cercles qui marchent C et C'. Pour tout sommet j du graphe, soient r_j et r'_j les rayons des cercles correspondant à j dans C et C'. On pose $f(j) = \frac{r'_j}{r_j}$. Notons que $r_1 = r_2 = r_3 = r'_1 = r'_2 = r'_3 = 1$, donc $f(1) = f(2) = f(3) = 1$.

On va montrer que $f(j) = 1$ pour tout j. Si ce n'est pas le cas, supposons par exemple qu'il existe j tel que $f(j) > 1$. Considérons un tel j pour lequel $f(j)$ est maximal. Notons qu'on a

$$\sum_{f_{ijk}} \theta(r_i, r_j, r_k) = 2\pi$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}
2\pi &= \sum_{f_{ijk}} \theta(r'_i, r'_j, r'_k) \\
&= \sum_{f_{ijk}} \theta\left(f(i)r_i, f(j)r_j, f(k)r_k\right) \\
&\leq \sum_{f_{ijk}} \theta\left(f(j)r_i, f(j)r_j, f(j)r_k\right) \\
&= \sum_{f_{ijk}} \theta(r_i, r_j, r_k) \\
&= 2\pi,
\end{aligned}$$

en utilisant $f(j) \geq f(i), f(k)$ et la monotonie de la fonction θ. On doit donc avoir égalité partout, donc $f(i) = f(j) = f(k)$ dès que f_{ijk} est une face du graphe. Par conséquent, $f(i) = f(j)$ pour tout voisin i de j. On peut ensuite réitérer ce raisonnement sur les voisins de j, les voisins des voisins et ainsi de suite... Comme G est connexe, on a donc finalement $f(i) = f(j)$ pour tout sommet i. Mais comme $f(1) = 1$, on a donc $f(j) = 1$, d'où la contradiction.

On a donc $f(j) = 1$ pour tout j, donc $r'_j = r_j$. Comme on l'a vu dans la partie 3, une fois qu'on connaît les rayons, il n'y a qu'une manière de placer les centres des cercles, ce qui conclut. □

X. La muraille

1 Présentation

Tous les ans, une muraille d'exercices est proposée aux élèves dans une salle accessible en-dehors des heures de cours. C'est l'occasion de se confronter à des problèmes difficiles, originaux ou astucieux. Si les meilleurs élèves et les meilleures équipes de chaque groupe reçoivent un prix, le but est d'abattre la muraille avant la fin du stage.
Cette année, 143 exercices ont été proposés. Les exercices 1 à 42 étaient de NIVEAU 1, ceux 43 à 96 de NIVEAU 2, et ceux au-delà de 97 de NIVEAU 3. Un exercice est décoré de n étoiles lorsqu'il est resté sans solution à la muraille de n stages. Les élèves du groupe A cherchent les exercices de NIVEAU 1 (ou au-dessus). Les élèves du groupe B cherchent les exercices de NIVEAU 2 et les exercices étoilés de niveau NIVEAU 1 (ou au-dessus). Les élèves du groupe C cherchent les exercices de NIVEAU 3 et les exercices étoilés de niveau NIVEAU 2 (ou au-dessus). Les élèves du groupe D cherchent les exercices de NIVEAU 3.
Un exercice à x étoiles résolu rapporte $x + 1$ points (sauf pour les élèves du groupe B qui résolvent des exercices étoilés de NIVEAU 1 et les élèves du groupe C qui résolvent des exercices étoilés de NIVEAU 2, pour lesquels un exercice à x étoiles rapporte x points). Dans une équipe, on prend en compte le groupe de l'élève le plus avancé.

2 Palmarès

Cette année, six catégories ont été couronnées, car il n'y avait pas d'équipe dans les groupes A ou B.

Classement individuel

- ▷ **Groupe A :** 1. Robin Martin 8 pts.
- ▷ **Groupe B :** 1. Auguste de Lambilly 8 pts, 2. Rémy Défossez, Antoine Derimay, Théodore Radu, Thomas Soulignac 2 pts.
- ▷ **Groupe C :** 1. Andrei Barbu 5pts, 2. Aurélien Fourré, Vladimir Ivanov 4 pts, 4. Émile Averous 3 pts, 5. Malo Hillairet 2 pts.
- ▷ **Groupe D :** 1. Théodore Fougereux 14 pts, 2. Pierre-Alexandre Bazin 6 pts, 3. Timothée Rocquet, Étienne Rossignol, Xavier Pigé 1 pt.

Classement par équipes

- **Groupe C :** 1. Andrei Barbu et Vladimir Ivanov 5 pts, 2. Samuel Berrebi/Rémy Défossez/Théodore Radu/Thomas Soulignac 3 pts.

- **Groupe D :** 1. Pierre-Marie Esmenjaud/Baptiste Serraille et Théodore Fougereux/Tristan Humbert 4 pts, 3. Daniel Cortild/Théodore Fougereux 2 pts, 4. Aymeric Ducatez/Arthur Léonard et Théodore Fougereux/Arthur Léonard/Timothée Rocquet 1 pt.

3 Solutions des élèves

Exercice 7 * Dans la pièce du milieu, 2016 torches sont entreposées, toutes éteintes. C'est alors que Llawgad débarque, et décide de s'amuser avec. Alors, exubérant comme un gamin des rues, il commence par allumer toutes les torches. Puis il éteint les torches de numéro pair. Puis il change l'état de toutes les torches portant un numéro multiple de 3, puis de toutes celles au numéro multiple de 4, et ainsi de suite jusqu'à changer l'état de toutes les lampes de numéro multiple de 2016. À la fin de son massacre, quelles lampes seront encore allumées ?

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> (Résolu par Théodore Radu)
Lemme : Un entier est un carré parfait si et seulement si son nombre de diviseurs est impair. En effet, chaque diviseur d d'un nombre n peut être associé à un autre diviseur n/d. A moins que $n/d = d$ soit $n = d^2$ Donc les seules torches qui changent d'état un nombre impair de fois et qui restes allumées sont les torches avec des numéros qui sont des carrés parfaits.

Exercice 26 * Quel est le reste de la division euclidienne de $2016^{2017^{2018}}$ par 11 ?

<u>*Solution de l'exercice 26*</u> (Résolu par Antoine Derimay)
On effectue la division euclidienne de 2017^{2018} par 10 : $2017^{2018} = 10q + r$. D'après le petit théorème de Fermat, $2016^{2017^{2018}} \equiv 2016^r \pmod{11}$. r correspond au dernier chiffre de 2017^{2018}, donc au dernier chiffre de 7^{2018}. On remarque que les puissances de 7 sont périodiques modulo 10, de période 4. Or $2018 \equiv 2 \pmod 4$ donc $7^{2018} \equiv 7^2 \equiv 9 \pmod{10}$.
Donc $2016^{2017^{2018}} \equiv 2016^9 \equiv 3^9 \equiv 27^3 \equiv 5^3 \equiv 125 \equiv 4 \pmod{11}$.
Donc le reste cherché vaut 4.

Exercice 33 * On écrit dans l'ordre croissant l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture en base 10 ne comprend que les chiffres 2, 0, 1 et 6. Par exemple, cette suite commence par $0, 1, 2, 6, 10, 11, 12, \ldots$. En quelle position se trouve l'entier 2016 ? Quel entier se trouve en 2016$^{\text{ème}}$ position ?

<u>*Solution de l'exercice 33*</u> (Résolu indépendamment par Thomas Soulignac et Auguste de Lambilly)

On peut raisonner en base 4 en utilisant les symboles $0, 1, 2$ et 6 à la place de 3.

Dans la suite on notera $\overline{2016}_4$ le nombre qui s'écrit 2013 en base 4. Lorsqu'on ne précise pas la base dans laquelle sont écrits les nombres, ils seront écrits en 20 par défaut. On considère que le premier liste écrit dans la liste est 0.

En décomposant $\overline{2016}_4$ en base 10 on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{2016}_4 &= 2\times 4^3 + 0\times 4^2 + 1\times 4^1 + 3\times 4^3\\ &= 128+4+3\\ &= 135\end{aligned}$$

Dans notre liste, 2016 se trouve donc en 136-ème position.

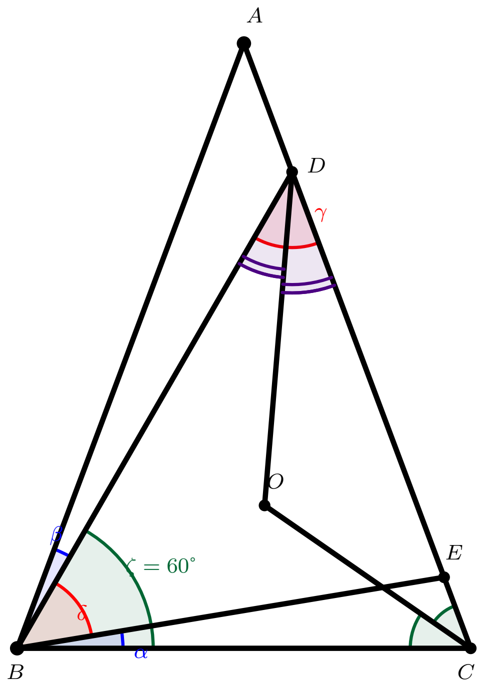
Pour répondre à la deuxième question, décomposons 2015 (puisqu'on ne prend pas en compte le 0) en base 4 :

$$\begin{aligned}2015 &= 1\times 4^5 + 3\times 4^4 + 3\times 4^3 + 1\times 4^2 + 3\times 4^0\\ &= \overline{166166}_4.\end{aligned}$$

Ainsi, le 2016-ème nombre de la liste est 166166.

Exercice 37 ***** Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $\widehat{BAC} < 60°$. Les points D et E sont des points du côté $[AC]$ tels que $EB = ED$ et $\widehat{ABD} = \widehat{CBE}$. Soit O le point d'intersection des bissectrices des angles $\widehat{BDC}$ and $\widehat{ACB}$. Trouver la valeur de l'angle $\widehat{COD}$.

Solution de l'exercice 37 (Résolu par Auguste de Lambilly)



Soit $\alpha = \widehat{EBC}$ et $\beta = \widehat{DBE}$.

ABC est isocèle en A. Donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 2\alpha + \beta$.

$EB = ED$ et $B \notin (ED)$ car $[ED] \subset (AC)$ et ABC est un triangle non plat. Donc EBD est isocèle en E. Donc $\widehat{EBD} = \widehat{EDB} = \beta$.

$E \in [CD]$ donc $\widehat{EBD} = \widehat{CDB} = \beta$ et $D \in [AE]$ donc $\widehat{DCB} = \widehat{ACB} = 2\alpha + \beta$.

Or, comme BCD est un triangle, $\widehat{CDB}+\widehat{CBD}+\widehat{BCD} = 180°$, donc $\beta+(\beta+\alpha)+(2\alpha+\beta) = 3\beta + 3\alpha = 180°$. Donc $\alpha + \beta = 60°$.

O appartient aux bissectrices de $\widehat{BDC}$ et de $\widehat{BCD}$ (car $\widehat{BCD} = \widehat{ACB}$).

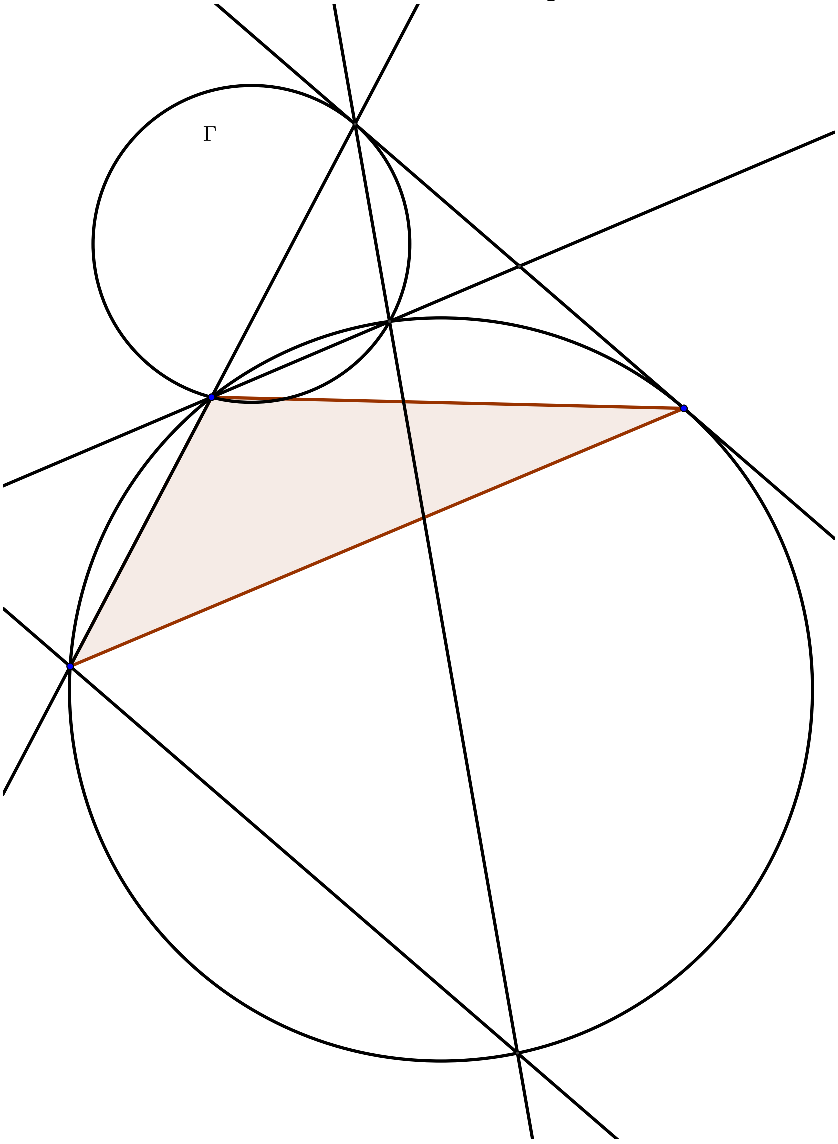
Donc $\widehat{ODC} = \frac{\widehat{BDC}}{2}$ et $\widehat{OCD} = \frac{\widehat{BCD}}{2}$.

Exercice 39 ***** Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. On note Γ son cercle circonscrit. On suppose que La tangente en A à Γ coupe la droite (BC) en un point P. Soit M le milieu de $[AP]$ et soit R le deuxième point d'intersection de la droite (BM) avec le cercle Γ. La droite (PR) recoupe le cercle Γ en S.

Prouver que les droites (AP) et (CS) sont parallèles.

Solution de l'exercice 39 (Résolu par Robin Martin)

On note Γ' le cercle circonscrit au triangle RPB.



On calcule la puissance du point M par rapport au cercle Γ :

$$\begin{aligned} P_\Gamma(M) &= MA^2 \\ &= MR \times MB. \end{aligned}$$

Or M est le milieu de $[AP]$ donc $MR \times MB = MA^2 = PM^2$.

Avec la réciproque de la puissance d'un point par rapport à un cercle, on trouve que la droite (PM) est tangente au cercle Γ'.

En appliquant le théorème de la tangente sur Γ', on a $\widehat{SPA} = \widehat{PBM}$.

Le théorème de l'angle inscrit appliqué à Γ donne $\widehat{PBM} = \widehat{PSC}$, d'où $\widehat{SPA} = \widehat{PSC}$.

Or lorsque deux angles alternes-internes sont de même mesure, les droites qui les déterminent sont parallèles, d'où $(AP) \parallel (CS)$.

Exercice 40 * À Mathland, deux villes sont toujours reliées soit par avion soit par bateau. Montrer qu'il est possible de choisir un moyen de transport qui permette d'aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre (éventuellement avec des escales).

Solution de l'exercice 40 (Résolu par Robin Martin)

On va montrer par récurrence que le résultat est vrai quel que soit n le nombre de villes à Mathland. Nommons P_n la proposition "Pour toute configuration dans un pays tel que Mathland à n villes, il est possible d'aller d'une ville à toutes les autres par un unique moyen de transport."

Initialisation : Pour $n = 2$, deux villes sont toujours reliées par un moyen de transport donc P_2 est vraie.

Hérédité : Supposons P_n vraie et montrons P_{n+1}. Supposons qu'il y ait $n + 1$ villes à Mathland. On considère une ville particulière, que l'on note A. Pour les n villes restantes à part A, la propriété de récurrence est vraie, on peut supposer qu'elles sont toutes reliées entre elles par bateau. On regarde les n trajets reliant A aux autres villes. Si l'une de ces villes, notons-la B, est reliée par bateau, alors pour aller de A à n'importe quelle autre ville par bateau, il suffit de passer par B. On peut donc relier toutes les villes par bateau. Si toutes les villes sont reliées à A par avion, alors on peut toujours relier deux villes par avion : il suffit de passer par A. On en conclut que P_{n+1} est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tous les entiers n.

Exercice 41 * On considère un damier carré de côté $2n + 1$. Montrer qu'il est impossible de trouver un chemin passant une unique fois sur chaque case (qui emprunte les côtés des petits carrés) et finissant sur la case initiale.

Solution de l'exercice 41 (Résolu par Rémy Défossez)

Le damier possède un nombre impair de case, celui-ci dispose donc d'une case noire de plus que de cases blanches. (Coloriage habituel)

A chaque déplacement d'une case, on arrive sur une case de couleur opposée à celle de départ. Il y a un nombre pair de déplacement pour visiter toutes les cases. Donc la dernière case visitée est donc de la même couleur que celle de départ. Or l'énoncé demande de pouvoir passer de la dernière case visitée à la première en 1 coup ce qui est impossible.

Exercice 43 ** Existe-t-il un triangle rectangle ayant des côtés de longueur rationnelle et dont l'aire vaut 1 ?

Solution de l'exercice 43 (Résolu par Emile Averous)
La réponse est non. Supposons par l'absurde qu'un tel triangle existe, alors en multipliant (=homothétie) chaque longueur par le produit des 3 dénominateurs, alors on dispose d'un triangle rectangle dont chaque coté est entier et dont l'aire est un carré parfait.

Prenons un triangle de cotés a, b, c qui a cette propriété avec la plus petite aire. a, b, c est un triplet pythagoricien primitif (sinon en les divisent par leurs PGCD on obtiens un triangle vérifiant la même propriété mais avec une aire plus petite). Par caractérisation des triplets pythagoriciens, soient m et n premiers entre-eux et de parité différente tels que $a = m^2 - n^2$ $b = 2mn$ $c = m^2 + n^2$.

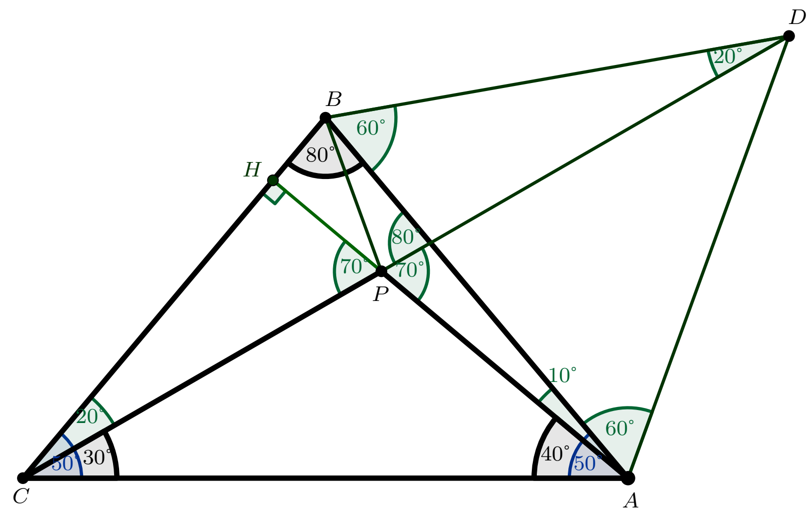
$\frac{ab}{2}$ est un carré donc $mn(m^2 - n^2)$ est un carré. Ses facteurs sont $m, n, m+n, m-n$ qui sont premiers entre-eux deux à deux. Ce sont donc tous des carrés parfaits.

Soient $r^2 = m + n$ et $s^2 = m - n$ puis $t = \frac{r-s}{2}$ ainsi que $u = \frac{r+s}{2}$. On a donc par le calcul $t^2 + u^2 = m$ Or m est un carré. Donc $t, u, \sqrt{m}$ est un triplet pythagoricien d'aire $\frac{tu}{2} = \frac{r^2-s^2}{8} = \frac{n}{4}$ qui est un carré inférieur à $mn(m^2 - n^2)$. Ce qui contredit la minimalité du triangle précédent.

Il n'y a donc pas de tel triangle.

Exercice 46 **** Considérons un triangle ABC tel que $AB = BC$ et $\widehat{ABC} = 80°$. Soit P le point de l'intérieur de ABC tel que $\widehat{PAC} = 40°$ et $\widehat{PCA} = 30°$. Calculer l'angle $\widehat{BPC}$.

<u>*Solution de l'exercice 46*</u> (Résolu par Andrei Barbu)



On sait que CBA est isocèle donc $\widehat{BCA} = \widehat{BAC} = 50^o$ d'où on déduit que $\widehat{BCP} = 20^o$ et $\widehat{BAH} = 10^o$.

On place D tel qu'il soit du côté opposé à C de (AB) et tel que BDA soit équilatéral. On nomme H le point d'intersection de (PA) et (BC). Il se trouve que l'angle $\widehat{CHA}$ est droit (en regardant dans le triangle HAC). On en déduit $\widehat{HPC} = 70°$.

On veut prouver que C, P et D sont alignés. On trace (CD). Le triangle CBD est isocèle, en effet $BD = BA = BC$. Comme $\widehat{CBD} = 80 + 60 = 140°$, on a $\widehat{BCD} = 20° = \widehat{BCP}$ donc les droites (CD) et (CD) sont confondues.

On sait que $\widehat{DPA} = 70° = \widehat{DAD}$ donc le triangle PDA est isocèle.

Donc le triangle BDP est isocèle car $DP = DA = DB$ et $\widehat{BPD} = \frac{180-20}{2} = 80°$.

Donc sur la droite (CD) on a $\widehat{CPH} + \widehat{HPB} + \widehat{BPD} = 180°$. Donc $\widehat{HPB} = 180 - \widehat{CPH} - \widehat{BPD} = 180 - 70 - 80 = 30°$.

Comme $\widehat{CPB} = \widehat{CPH} + \widehat{CPB} = 100^o$, on a trouvé la solution.

Exercice 57 ** Alice et Bob sont complices et opposés à Eve. Dans une salle est disposé un échiquier avec sur chaque case une pièce de monnaie en position pile ou face. Au départ, seuls Eve et Bob sont dans la pièce ; ce dernier observe Eve retourner l'une des pièces. Ensuite, Eve s'en va et Bob a le droit de retourner au plus une pièce avant de partir lui aussi. Finalement, Alice entre dans la salle. Elle observe l'échiquier et doit déterminer la pièce retournée par Eve. Expliquer comment Alice et Bob peuvent se concerter à l'avance pour qu'Alice retrouve à coup sûr la pièce retournée par Eve.

Solution de l'exercice 57 (Résolu par Thomas Soulignac, Rémi Défossez, Théodore Radu et Samuel Berrebi)

Il faut que Alice et Bob associent à chaque case un nombre binaire différent. Ils devront donc utiliser 6 chiffres pour exprimer chaque case de manière différente. Maintenant, Bob doit transmettre ce code grâce à l'échiquier en n'inversant qu'une seule pièce. Pour cela, Alice et Bob vont créer des zones sur l'échiquier. On convient qu'une pièce Face vaut 1 et une pièce Pile 0. On peut maintenant donner un indice à une zone qui est la somme des pièces Face contenues dans cette zone. Si cette somme est paire, la zone vaut 1, si elle est impaire la zone vaut 0. Il suffit maintenant de créer 6 zones sur l'échiquier de telle sorte que les ensembles de zones auxquelles appartiennent chaque case soient tous différents. Par exemple, la case $A1$ est la seule à appartenir à toutes les zones. Un tel choix de zones est possible car le nombre de sous ensembles des six zones est $\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} = 2^6 = 64$ et il y a bien 64 cases sur l'échiquier. Donc si Bob veut modifier la parité de certaines zones, il pourra retourner retourner une pièce sur la case qui est seulement dans ces zones. Ainsi, Bob peut contrôler la parité des six zones en ne retournant qu'une seule pièce, et donc transmettre un code à 6 chiffres à Alice. Il leur suffit donc d'associer au préalable chaque zone à un chiffre du code.

Déroulement :

- ▷ Eve retourne une pièce
- ▷ Bob associe chaque case à son code binaire
- ▷ Bob regarde la parité de chaque zone et détermine les zones à modifier
- ▷ Bob modifie la seule case qui correspond exactement à ces zones
- ▷ Alice regarde la parité des zones et trouve le code en binaire
- ▷ Alice regarde quelle case est associée à ce code et elle a retrouvé la pièce de Eve.

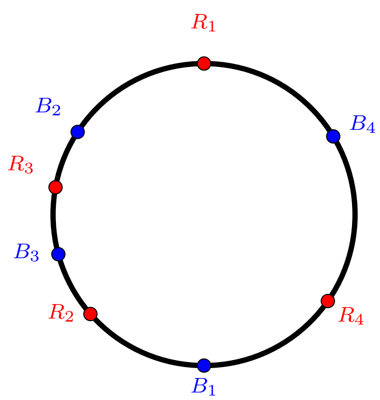
Exercice 63 *** On se donne un nombre entier $n > 1$. Deux joueurs R et B colorient tour à tour des points sur un cercle, R coloriant en rouge et B en bleu. Une fois que chacun a placé n points, le jeu s'arrête, et chaque joueur cherche sur le cercle l'arc de cercle le plus long ayant pour extrémités des points de sa couleur, et ne contenant aucun autre point coloré. Le joueur dont l'arc de cercle sélectionné est le plus long gagne (s'ils sont de même longueur, ou bien s'il n'y a aucun tel arc, on dit que la partie est nulle). L'un des deux joueurs a-t-il une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 63 (Résolu par Vladimir Ivanov)

On définit un arc blanc comme un arc ne contenant que deux points coloriés, ses extrémités, avec les deux extrémités de couleurs différentes. De même, un arc rouge a ses deux extrémités rouges, et un arc bleu a ses deux extrémités bleues.

B peut faire en sorte que R ne gagne pas :

Preuve par Récurrence :
Initialisation :
Au début R place un point quelque part. B peut ensuite placer son point à l'opposé de celui de R sur le cercle. On a donc deux arcs blancs.
Hérédité :
Supposons, pour k un entier naturel non nul et strictement inférieur à n, que après que chacun R et B ont colorié k points, il y a k arcs blancs. C'est donc à R de jouer. Puisque tous les arcs sont blancs, quelque soit le point qu'il colorie, il y aura ensuite k arcs blancs, et 1 arc rouge. B n'a donc qu'à colorier un point dans cet arc rouge pour obtenir $k+2$ arcs blancs.
Conclusion :
B peut faire en sorte qu'après chacun de ses tours, tous les arcs soient blancs. Donc, comme B est le dernier à colorier un point, il peut faire en sorte que R ne gagne pas.
R peut faire en sorte que B ne gagne pas : divisons le cercle en n parties égales. À chaque tour, R colorie un point le plus proche possible de ces limites (soit dessus, si B ne l'a pas déjà colorié, et sinon infiniment proche).
Si il y a un arc bleu à la fin, alors il est dans un seul n-ième de cercle. Donc l'arc bleu le plus long est au maximum de longueur $\frac{2\pi r}{n}$. De plus, par comme il y a deux points bleu dans le même n-ième de cercle, alors il y en a sans point bleu. Celui-là est de longueur $\frac{2\pi r}{n}$. Donc le plus long arc bleu est de longeur inférieur ou égale à celle du plus long arc rouge.
Si il n'y a pas d'arc bleu à la fin, B ne peut gagner. Donc R a fait en sorte que B ne gagne pas.
Aucun des deux joueurs ne peut donc avoir une stratégie gagnante, puisque l'autre peut l'empêcher de gagner.



Exercice 84 **** Trouver tous les couples (p, n), où p est un nombre premier et n un entier strictement positif, tels que $p^n = (p-1)! + 1$.

<u>*Solution de l'exercice 84*</u> (Résolu par Andrei Barbu et Vladimir Ivanov)
Réponse : $p = 2, 3, 5$

Il est facile de montrer que ce sont bien des solutions au problème. Montrons que ce sont les seules.

Soit $p > 5$

Alors $p^n - 1 = (p-1)!$ soit en factorisant : $p^{n-1} + ... + p + 1 = (p-2)!$

On regarde modulo $p-1$. Les puissances de p vallent chacune 1 modulo $p-1$. Donc $(p-2)! = n[p-1]$.

Montrons que $p-1|(p-2)!$ Si $p-1$ n'est pas le carré d'un nombre premier, alors il existe deux facteurs $2 < f_1, f_2 < p-2$ distincts tels que $p-1 = f_1 f_2$. et donc $p-1|(p-2)!$

Sinon $p-1$ est le carré d'un nombre premier q plus grand que 5. On prend $f_1 = 2q$ et $f_2 = 3q$ et on a donc bien aussi $p-1|(p-2)!$

Bilan : $n = 0[p-1]$ donc $n \geq p-1$, ce qui implique que $(p-1)! + 1 < (p-1)^{p-1} + 1 \leq (p-1)^n + 1 \leq p^n$

Donc il n'y a pas d'autres solutions que celles anoncées au départ.

Exercice 88 * Soit n un entier. Calculer la somme

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{8} \right\rfloor + \dots$$

<u>*Solution de l'exercice 88*</u> (Résolu par Malo Hillairet)
Soit $S(n)$ la quantité cherchée, on prouve par récurrence sur n que $S(n) = n$. L'initialisation à $n = 1$ est facile. Pour l'hérédité, on remarque par un bref calcul que

$$\lfloor 0.5 + (n+1)/2^k \rfloor = \lfloor 0.5 + n/2^k \rfloor + 1$$

si et seulement si $n + 1 \equiv 2^{k-1} \pmod 2)^k$. On prouve ensuite qu'il existe un et un seul entier k tel que cette dernière propriété soit vraie (cela correspond à la valuation 2-adique de $n+1$: 2^{k-1} est la plus grande puissance de 2 divisant $n+1$).

Exercice 91 ***Al et Xandre communiquent via un réseau peu fiable : lorsqu'Al envoie un message de n caractères, Xandre reçoit k d'entre eux (dans le même ordre). Sachant que tant que certaines sous-suites du message original ne sont pas sorties, le réseau ne renvoie pas une sous-suite déjà obtenue par Xandre, combien de fois Al doit-il envoyer son message (dont tous les caractères sont distincts) pour être sûr que Xandre puisse le décoder ?

<u>*Solution de l'exercice 91*</u> (Résolu par Aurélien Fourré)
Xandre peut décoder un message si et seulement s'il reçoit toutes les paires de caractères consécutifs, pour être capable de les ordonner. S'il ne reçoit pas de message comportant une certaine paire de caractère consécutifs, il ne saura pas dire lequel est avant l'autre.

Pour deux caractères donnés, si Al envoie strictement plus du nombre total de suites recevables ($\binom{n}{k}$) moins le nombre de suites comportant ces deux caractères simultanément, on est sûr qu'il y aura au moins un message les contenant.

Or il y a $\binom{n}{k}$ suites recevables et $\binom{n-2}{k-2}$ sous-suites contenant deux caractères fixés à l'avance, ce qui correspond à :

$$1 + \binom{n}{k} - \binom{n-2}{k-2}.$$

Exercice 97 Chaque case d'une grille $n \times n$ contient une lampe, qui peut être allumée ou éteinte, avec un interrupteur. Si on appuie sur l'interrupteur d'une lampe, on change l'état de cette lampe, des lampes sur la même ligne et des lampes sur la même colonne. Pour quels entiers n est-il possible d'arriver à la configuration où toutes les lampes sont allumées, quelle que soit la configuration de départ ?

<u>*Solution de l'exercice 97*</u> (Résolu par Etienne Rossignol)

Réponse : Que pour les n pairs.

Si n est pair, on peut changer l'état d'une lampe toute seule en appuyant sur toutes les lampes de sa ligne et de sa colonne. Il est donc facile de passer de n'importe quel état à un autre.

Si n est impair, appuyer sur une lampe ne change pas la parité du nombre de lampe allumées. Il est donc impossible d'obtenir la configuration $n^2 - 1$ lampes sont allumées en même temps.

Exercice 99 Raoul a colorié chaque case d'une grille 2017×2017, et a pour ce faire utilisé N couleurs. Il a réussi à faire en sorte que pour tous $1 \leq i < j \leq 2017$ et $1 \leq k < l \leq 2017$, les cases $C_{i,k}$, $C_{j,k}$ et $C_{j,l}$ ne soient pas toutes de la même couleur ($C_{a,b}$ désigne la case de la a-ème ligne et b-ème colonne). Quelle est la plus petite valeur possible de N ?

<u>*Solution de l'exercice 99*</u> (Résolu par Théodore Fougereux, Arthur Léonard et Timothée Rocquet)

Montrons que Raoul peut utiliser 1009 couleurs (représentées par les nombres $1, 2, \ldots, 1009$). On peut par exemple utiliser le coloriage suivant, qui convient :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 1007 & 1008 & 1008 & 1009 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 3 & & & & 1008 & 1009 & 1 \\
2 & 2 & 3 & 3 & & & & & & 1009 & 1 \\
2 & 3 & 3 & & & & & & & & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
1008 & & & & & & & & & & 1007 \\
1008 & 1009 & & & & & & & & 1007 & 1007 \\
1009 & 1009 & 1 & \cdots & & & & & 1007 & 1007 & 1008
\end{array}
$$

Réciproquement, supposons que 1008 couleurs suffisent. Par le principe des tiroirs, au moins 4036 cases sont coloriées de la même couleur (car $4035 \times 1008 < 2017^2$), disons bleu.

De plus, au plus 2017 cases sont les cases bleues les plus à droite de leur ligne. Il y a donc au moins $4036 - 2017 = 2019$ cases bleues qui possèdent une case bleue à leur droite dans la même ligne.

De même, au plus 2017 cases sont les cases bleues les plus en haut de leur colonne. Il y a donc au moins $4036 - 2017 = 2019$ cases bleues qui possèdent une case bleue au-dessus d'elle dans la même colonne.

D'après le principe des tiroirs, il existe donc une case bleue qui a une case bleue à sa droite et au-dessus d'elle, ce qui contredit la validité du coloriage.

Exercice 100 Étant données 1000 personnes numérotées de 1 à 1000 assises sur des sièges numérotés de 1 à 1000, peut-on les rassoir en conservant leur ordre circulaire de façon qu'aucune personne n'ait le même numéro que la chaise qu'elle occupe ?

Solution de l'exercice 100 (Résolu par Xavier Pigé)
Supposons que ce soit impossible. Cela signifie que pour chaque valeur de décalage, comprise entre 0 et 999, il y a une personne à sa place (et une seule car une personne ne peut pas être à sa place pour deux valeurs de décalage différentes). (Une permutation circulaire peut être vue comme un décalage de k chaises vers la droite, et seule la congruence de k modulo 1000 importe).

On considère une personne A_1 et une suite de personnes formée de la manière suivante : le numéro du siège initial de A_{k+1} correspond au numéro de la personne A_k, i.e. lorsque A_k est décalé d'un bon nombre b_k pour se retrouver en face de son numéro, elle se retrouve à la place occupée initialement par A_{k+1}. Cette suite suite finit par boucler ($A_{n+1} = A_1$ pour une certaine valeur de n) car :

1. il y a un nombre fini de personnes
2. A_n ne peut pas avoir le numéro du siège de l'un des A_i pour $i < n$ car c'est déjà le cas de A_{i-1}.

Alors, si on effectue un décalage de $b_1 + \ldots + b_n$, alors on retombe sur la position initiale puisque A_1 passe successivement par les sièges initialement occupés par $A_2, A_3, \ldots, A_n$ puis $A_{n+1} = A_1$. On en déduit que 1000 divise la somme des b_i.

Or chaque personne est dans un tel cycle, donc en sommant les décalages associés à chaque personne, ce qui fait $0+1+\ldots+999$, on obtient encore un multiple de 1000. Or $0+1+\ldots+999 = \frac{999\times 998}{2}$ est un nombre impair, qui n'est donc pas divisible par 1000.

On en conclut que la réponse est positive : on peut toujours trouver une permutation circulaire adéquate.

Remarque 120. Cette solution reste vraie pour tout nombre pair de personnes mais c'est faux pour un nombre impair de personnes.

Exercice 104 **** Soient a, b, c des réels strictement positifs tels que

$$a + b + c = a^{1/7} + b^{1/7} + c^{1/7}.$$

Prouver que

$$a^a b^b c^c \geq 1.$$

Solution de l'exercice 104 Résolu par Théodore Fougereux

Par une IAG généralisée et pondérée,

$$\begin{aligned} a^a b^b c^c &= (a^{\frac{a}{a+b+c}} b^{\frac{b}{a+b+c}} c^{\frac{c}{a+b+c}})^{a+b+c} \\ &\geq (\frac{aa^{-\frac{6}{7}} + bb^{-\frac{6}{7}} cc^{-\frac{6}{7}}}{a+b+c})^{\frac{-7}{6}(a+b+c)} \\ &= (\frac{a^{\frac{1}{7}} + b^{\frac{1}{7}} + c^{\frac{1}{7}}}{a+b+c})^{\frac{-7}{6}(a+b+c)} = 1, \end{aligned}$$

ce qui est vrai car $0 \geq \frac{-6}{7}$ et donc $M_0 \geq M_{-6/7}$

Exercice 105 Soit a, b, c des réels strictement positifs tels que $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{a}{ab+1} + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{ca+1} \geq \frac{3}{2}.$$

<u>*Solution de l'exercice 105*</u> (Résolu par Théodore Fougereux et Daniel Cortild)

Posons $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$ et $c = \frac{z}{x}$.

Alors on veut montrer :

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{xz}{y(x+z)} \geq \frac{3}{2}.$$

Par l'inégalité des mauvais élèves on a :

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2z^2}{xyz(x+z)} \geq \frac{(xy+yz+zx)^2}{2xyz(x+y+z)}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z),$$

ce qui équivaut après développement et simplification à

$$x^2y^2 + y^2z^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2,$$

ce qui est vrai d'après l'inégalité de Muirhead car $[2,2,0] \succ [2,1,1]$.

Exercice 107 *** Soit n un nombre parfait, c'est-à-dire un entier tel que

$$\sum_{d|n} d = 2n.$$

On factorise n sous la forme d'un produit de nombres premiers :

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i},$$

avec $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Montrer que α_1 est pair.

<u>*Solution de l'exercice 107*</u> (Résolu par Théodore Fougereux et Tristan Humbert)

Soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n (n compris).

1) Si n est impair, on a

$$2n = \sigma(n) = \Pi_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p-1}$$

donc si α_1 est impair, en posant $a = \frac{\alpha_1+1}{2}$, on voit que $\frac{p_1^{2a}-1}{p-1} | 2n$, or $p+1 | \frac{p^{2a}-1}{p-1}$ donc $p+1 | 2n$. Par minimalité de p, les facteurs premiers de $p+1$ ne sont pas présents dans n, donc $p+1 | 2$ donc $p+1 = 2$ et $p = 1$, absurde.

2) Si n est pair, le travail est un peu plus long. On montre que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ avec p et $2^p - 1$ premiers impairs, ce qui permet de conclure.

Exercice 110 *** Soit P un point à l'intérieur d'un polygone régulier à n côtés tel que quel que soit un côté du polygone, P se projette orthogonalement sur l'intérieur du côté. Ces n projections orthogonales partagent les n côtés du polygone en $2n$ segments. On numérote ces segments de 1 à $2n$, en commençant par un segment arbitraire, puis en tournant dans le sens direct le long du polygone. Prouver que la somme des longueurs des segments de numéros pairs est égale à la somme des longueurs des segments de numéros impairs.

Solution de l'exercice 110 (Résolu par Pierre-Marie Esmenjaud et Baptiste Serraille)

Pour commencer, une homothétie de rapport $\frac{1}{A_1A_2}$ permet de supposer que le côté du polygone mesure 1. On a (en prenant les indices modulo n)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} A_iB_i^2 &= \sum_{i=1}^{n}(A_iP^2 - B_iP^2) = \sum(A_{i+1}P^2 - B_iP^2)\\ &= \sum_{i=1}^{n} A_{i+1}B_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(1 - A_iB_i)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(1 - 2A_iB_i + A_iB_i^2),\end{aligned}$$

ce qui équivaut à $\sum_{i=1}^{n} A_iB_i = \frac{n}{2}$. Or, le périmètre du polygone est n, donc $\sum_{i=1}^{n} A_{i+1}B_i = n - \sum_{i=1}^{n} A_iB_i = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} = \sum_{i=1}^{n} A_iB_i$.

Exercice 116 Soit x, y, z des réels dans $[0,1]$. Trouver la plus grande valeur que puisse prendre l'expression

$$x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - z^2y - y^2x.$$

Solution de l'exercice 116 (Résolu par Théodore Fougereux et Daniel Cortild)

On commence par remarquer l'identité suivante :

$$P(x,y,z) = (z-y)(y-x)(x-z).$$

De plus, le maximum est clairement positif car on a $P(0,0,0) = 0$. On sait donc qu'on doit avoir 1 ou 3 facteurs positifs.

Si les trois facteurs sont positifs on a $z \geq y \geq x \geq z$ donc $x = y = z$, qui donne 0 comme maximum.

On peut en déduire que le maximum sera atteint pour un seul facteur positif. On peut supposer que c'est $z - y$. On a alors :

$$\begin{aligned} z-y &\geq 0\\ y-x &< 0\\ x-z &< 0.\end{aligned}$$

On a donc

$$P(x,y,z) = (z-y)(y-x)(x-z) = (z-y)(x-y)(z-x).$$

Maintenant, tous les facteurs sont positifs donc on peut utiliser l'IAG en posant $a = x - y$ et $b = z - x$:

$$P(x,y,z) = (a+b)ab \leq (a+b)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^3}{4} \leq \frac{1}{4},$$

car $a+b=z-y \leq 1$ par hypothèse.

On vérifie que cette borne est atteinte, par exemple en $x=1$, $y=\frac{1}{2}$ et $z=0$.

Exercice 120 * Soit $P(x)$ le polynôme ax^2+bx+c. On suppose qu'il existe un entier $z \in \mathbb{Z}$ tel que

$$P(z) \equiv 0 \mod p \quad \text{et} \quad 2az+b \not\equiv 0 \mod p.$$

Montrez que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un entier $z_n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$z_n \equiv z \mod p \quad \text{et} \quad P(z_n) \equiv 0 \mod p^n.$$

<u>*Solution de l'exercice 120*</u> (Résolu par Pierre-Marie Esmenjaud et Baptiste Serraille)
Il s'agit d'un cas particulier du lemme de Hensel : nous allons construire une suite (z_n) telle que $z_1 = z$ et $P(z_n) \equiv 0[p^n]$.

Supposons que la propriété "Il existe un entier z_n tel que $z_n \equiv z_{n-1}[p^{n-1}]$ et $P(z_n) \equiv 0[p^n]$", qui est vraie pour $n=1$, soit vraie au rang n et prouvons qu'elle le reste au rang $n+1$.

Soit $x \equiv z_n[p^n]$. Alors $x = kp^n + z_n$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{rcl}
P(x) \equiv & ax^2+bx+c & [p^{n+1}] \\
\equiv & a(kp^n+z_n)^2 + b(kp^n+z_n)+c & [p^{n+1}] \\
\equiv & ak^2p^{2n} + 2akp^nz_n + az_n^2 + bkp^n + bz_n + c & [p^{n+1}] \\
\equiv & kp^n(2az_n+b) + P(z_n) & [p^{n+1}].
\end{array}$$

On sait que $P(z_n) = p^n t$, avec $t \in \mathbb{Z}$.

Donc $P(x) \equiv p^n(k(2az_n+b)+t)[p^{n+1}]$.

Comme z_n et t ainsi que a et b sont déjà fixés, on cherche k tel que $k(2az_n+b)+t \equiv 0[p^{n+1}]$.
Comme z_n et t ainsi que a et b sont déjà fixés, on cherche k tel que

$$\begin{array}{rcl}
k(2az_n+b)+t & \equiv & 0[p] \\
\leftrightarrow k(2az+b)+t & \equiv & 0[p] \\
\leftrightarrow k(2az+b) & \equiv & -t[p]
\end{array}$$

Or on sait que $2az+b$ et p sont premiers entre eux, donc $2az+b$ est inversible modulo p et

$$k \equiv -t(2az+b)^{-1}[p]$$

donc il existe une valeur de k qui correspond à notre énoncé,et en posant

$$z_{n+1} = -t(2az+b) \overbrace{-1[p]}^{\text{inverse modulo } p} p^n + z_n,$$

on a prouvé la propriété pour $n+1$, donc elle est vraie pour tout entier naturel.

Exercice 126 Soit ABC un triangle et P un point à l'intérieur de celui-ci. Soit D, E, F les projetés orthogonaux de P sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. On suppose que

$$AP^2 + PD^2 = BP^2 + PE^2 = CP^2 + PF^2.$$

Soit de plus I_A, I_B, I_C les centres des cercles exinscrits au triangle ABC. Montrer que P est le centre du cercle circonscrit de $I_AI_BI_C$.

<u>*Solution de l'exercice 126*</u> (Résolu par Timothée Rocquet) On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $x = AE = BD$, $y = AF = CD$, $z = BF = CE$. Alors si x, y, z est la solution du système $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$ et les points de tangence des cercles exinscrits vérifient la même équation, qui a une unique solution. Par conséquent, D, E, F sont les points de tangence des cercles exinscrits, dont les centres sont notés I_A, I_B, I_C respectivement. Donc P, D, I_A sont alignés, tout comme P, E, I_B et P, F, I_C. Et (I_AI_B), (I_AI_B) et (I_AI_B) sont les bissectrices extérieures des angles de ABC. Donc $\widehat{AI_CP} = 90^o - \widehat{I_CAF} = 90^o - \widehat{I_BAE} = \widehat{AI_BP}$ donc PI_BI_C est isocèle, et de même pour PI_AI_B et PI_AI_C.

Exercice 130 Le terrible Thomas a capturé n stagiaires dans sa salle de cours. Comme il aime bien les probabilités, il leur laisse une chance de retrouver la liberté : il va mettre sur la tête de chacun un chapeau coloré, parmi n coloris possibles (chacun en nombre illimité). Chaque stagiaire peut voir les chapeaux des autres (mais pas le sien), puis chuchote à Thomas ce qu'il pense être la couleur de son chapeau, sans que les autres ne l'entendent. Si un stagiaire au moins a vu juste, tous sont libérés. Thomas leur laisse gracieusement quelques minutes pour décider d'une stratégie préalable. Peut-on en trouver une qui permette de s'en sortir à coup sûr (si oui, la donner) ?

<u>*Solution de l'exercice 130*</u> (Résolu par Aymeric Ducatez et Arthur Léonard)

Numérotons les couleurs $0, 1, \ldots, n-1$.

Le premier joueur voit les couleurs de tous les autres joueurs. Il chuchote à Thomas la couleur telle que la somme de toutes les couleurs soit congrue à 1 modulo n. Si la somme était effectivement congrue à 1 modulo n, alors les stagiaires sont libérés. Sinon c'est au deuxième joueur de parler.

On recommence ainsi le processus : l i-ième joueur propose une couleur telle que la somme des couleurs soit congrue à i modulo n. Ainsi, toutes les combinaisons sont testées et les élèves sont sûrs de s'en sortir.

Exercice 134 * On considère trois nombres réels x, y, z qui ne sont pas tous égaux. On suppose que

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = k.$$

Trouver toutes les valeurs possible de k.

<u>*Solution de l'exercice 134*</u> (Résolu par Théodore Fougereux)

$$x = k - \frac{1}{y} = k - \frac{1}{k - \frac{1}{z}} = k - \frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{x}}}$$

En simplifiant et en éliminant les dénominateurs dans cette équation on arrive à :

$$(k^2 - 1)x^2 + (k - k^3)x + (k^2 - 1) = 0$$

Cas 1 $k^2 - 1 = 0$: alors $k = \pm 1$ et on a bien des solutions comme par exemples les triplets $(x = 2/3, y = 3, z = -1/2)$

Cas 2 : On est face à une équation de degré 2 en x qui admet $0, 1$ ou 2 solutions en x (par symétrie idem en y et en z). On a donc deux variable égales (disons $x = y$). Ce qui conduit à $\frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ soit $y = z$. Il n'y a donc pas d'autres solutions.

Exercice 139 ***** Soient P et Q deux polynômes à coefficients entiers, premiers entre eux. Pour tout entier n, posons $u_n = PGCD(P(n), Q(n))$. Montrer que la suite (u_n) est périodique.

Solution de l'exercice 139 (Résolu par Pierre-Alexandre Bazin)

D'après le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $PU + QV = k$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}.U(X)$ s'écrit $R(X)/u$ et $V(X)$ s'écrit $S(X)/v$, où $u, v \in \mathbb{Z}$ et $R, S \in \mathbb{Z}[X]$. On a alors : $PR + QS = kuv$. Soit $M = ppcm(u_n, n \in \mathbb{Z})$. On sait que $M|kuv$. Et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n+M) \equiv P(n) \pmod M$ et $Q(n+M) \equiv Q(n) \pmod M$, donc $u_n = u_{n+M}$. Donc (u_n) est périodique de période M.

Exercice 140 ****** On veut colorier certains des points de l'ensemble $E_n = \{(a, b)/a, b$ entiers et $0 \leq a, b \leq n\}$ de sorte que tout carré $k \times k$ dont les sommets sont dans E_n contienne au moins un point colorié sur son bord. On note $m(n)$ le nombre minimum de points à colorier pour que la condition désirée soit satisfaite.

Prouver que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{m(n)}{n^2} = \frac{2}{7}.$$

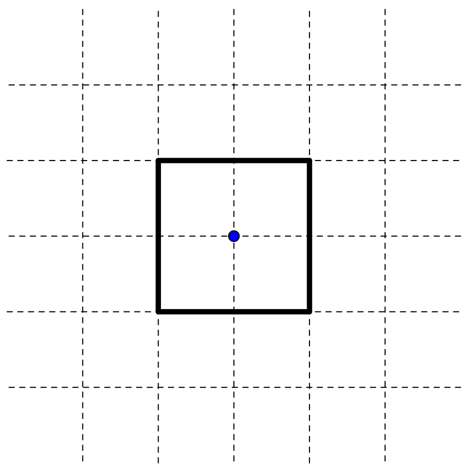
Solution de l'exercice 140 (Résolu par Théodore Fougereux)

On veut colorier certains points de l'ensemble $E_n = \{(a, b)|a, b \in \{0, \ldots, n\}\}$ de sorte que tout carré $k \times k$ dont les sommets sont dans E_n contienne au moins un point coloré sur son bord. Soit $m(n)$ le nombre minimal de points vérifiant cette propriété. Montrons que

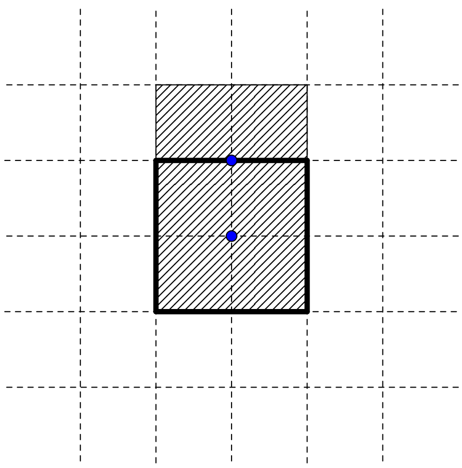
$$\lim_{n \to \infty} \frac{m(n)}{n^2} = \frac{2}{7}.$$

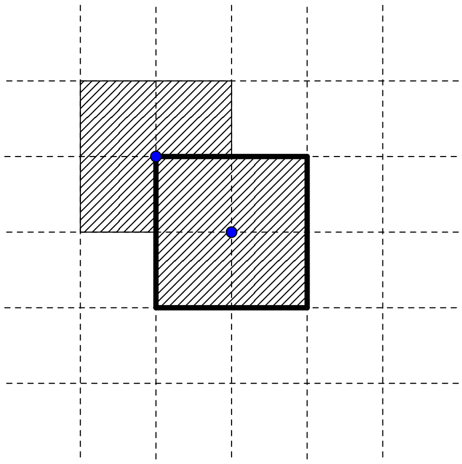
On suppose que les côtés des carrés sont parallèles aux axes des abscisses et ordonnées. De plus, on peut négliger les carrés 1×1 et 2×2 constitués d'éléments sur le "bord" de E_n car ils sont négligeables (croissance linéaire) par rapport au nombre de carrés 1×1 et 2×2 au total (croissance quadratique.

Considérons un point colorié :



On sait que l'un des points sur le carré en gras est colorié par hypothèse. À rotation près, on doit colorier d'une de ces deux manières :





On constate que deux points sont sur le bord d'au plus sept carrés 1×1. Montrons par récurrence qu'il existe $2n$ points sur le bord d'au plus $7n$ carrés.

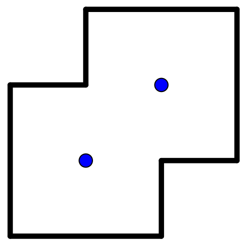
Initialisation : D'après ce qui précède, deux points sont sur le bord d'au plus sept carrés s'il existe au moins un point colorié.

Hérédité : On suppose qu'il existe $2(n-1)$ points tels que au plus $7(n-1)$ carrés 1×1 distincts ont ces points sur leur bord. S'il existe un point sur le bord d'aucun de ces carrés 1×1, on peut recommencer la construction ci-dessus. On ajoute ainsi au plus 7 carrés dans l'ensemble des carrés qui ont des points sur leur bord. Si aucun des points non coloriés n'est sur aucun carré 1×1 déjà considéré, alors on peut prendre un point au hasard. Il y aura au plus 3 carrés 1×1 de plus ayant des points non déjà coloriés sur leur bord.

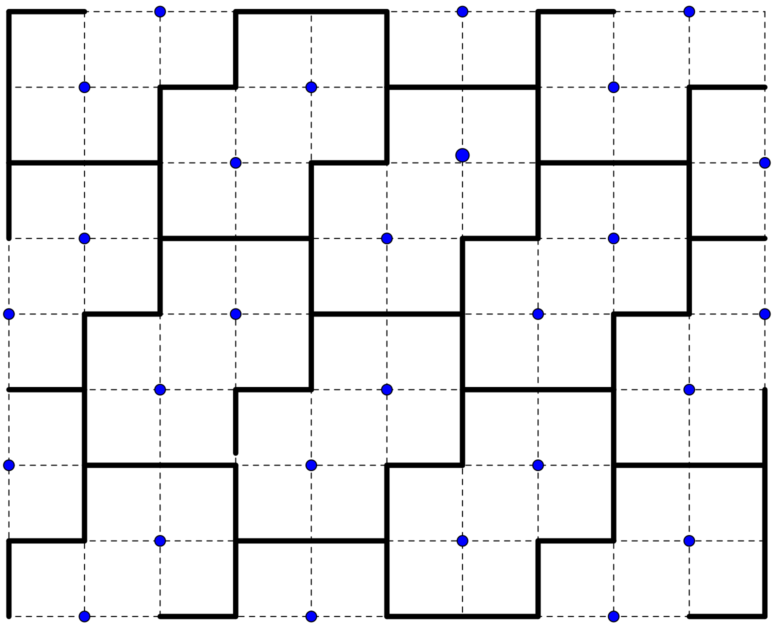
Ainsi, au maximum six carrés 1×1 de plus ont des carrés sur leur bord, et on a bien $7(n-1) + 6 \leq 7n$, ce qui conclut l'hérédité et la récurrence.

De plus, on sait qu'il y a déjà n^2 carrés 1×1, on en déduit que si $\frac{m(n)}{n^2} < \frac{2}{7}$, alors $m(n) < \frac{2n^2}{7}$, ce qui est absurde d'après ce qui précède.

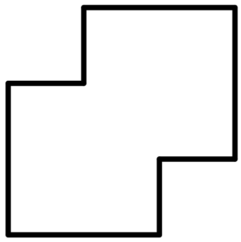
Réciproquement, on peut considérer le pavage suivant, obtenu par translation d'une pièce de la forme suivante :



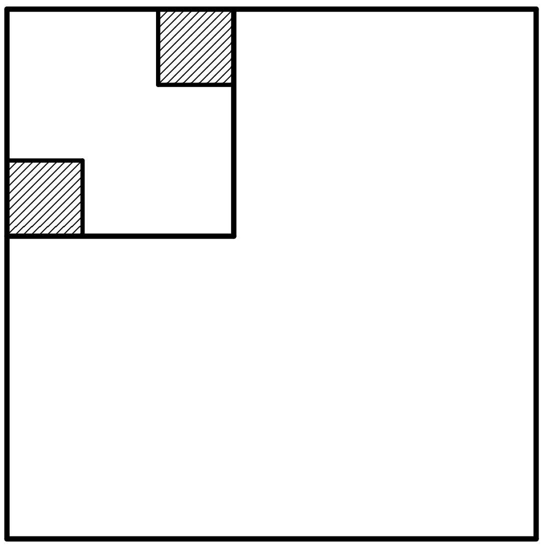
selon un vecteur de coordonnées $(2a+b, -a+3b)$ pour tous entiers a, b.



Supposons qu'il existe un carré $k \times k$ dont le bord ne contient aucun point. Cela signifie que ce carré peut être pavé avec des pièces



La seule manière de paver un coin du carré est la suivante, or dans ce cas les zones hachurées ne sont clairement pas pavables.



XI. Citations mémorables

- Juraj, étonné : "Ah ! Martin Rakovsky est animatheur ?"
- J-L Tu, dévoilant le palmarès de la Coupe Animath : "Pour les quatrièmes, le premier est... François Lo Jac'"
- Un animatheur : "Bon, il va être tard..."
  Juraj : "Mais ça veut dire qu'il est pas encore tard, donc on continue !"
- Le gardien : "Vous pouvez parler un peu moins fort ?"
  Guillaume : "Oui, merci !"
- Guillaume : "Le rythme de la main laisse à désirer..."
- Guillaume : "Qui se prend la logique dans la g... ?"
  Antoine : "Moi !"
  Guillaume : "Non, mais quel groupe ?"
- Juraj : "C'est impair donc probablement premier."
- Félix (après qu'un élève se rapproche du tableau pour lire) : "Ah c'est mal écrit ?... Enfin plus mal écrit que le reste."
- Antoine M. : "Y'a pas beaucoup de citations mémorables, je suis déçu, pourtant j'en lâche une toute les 10 minutes."
- Anonyme : "Au XIX-ème siècle, le nombre de pirates diminue et la Terre se réchauffe. Donc le réchauffement climatique est causé par la disparition des pirates ! CQFD..."
- Guillaume : "Et donc on a... Euh... Non... Bref, je vous laisse le démontrer."
- Guillaume : "Et donc ce lemme est vrai mais je le démontre pas."
- Tristan : "Du coup les résolutions de problèmes de combinatoire en chinois c'est moche. Enfin à moitié beau."
- Baptiste : "C'est pas simple de penser simple."
- Théodore : "C'est une arnaque mais c'est beau."
- Victor : "Tu sais retrouver ta chambre ?"
  Rémi : "Je sais qu'il faut passer par les chambres des filles, c'est tout ce que j'ai retenu..."
- Guillaume : "On ne peut pas travailler avec une constante qui change !"
- Guillaume : "Supposons que vous ayez 2017 polatouches chez vous, mais comme ça prend de la place, vous en avez des rectangulaires pour pouvoir les empiler..."
- Guillaume : "Par symétrie, on peut supposer que les polatouches vont toujours à gauche."
  Etienne : "Des polatouches communistes !"
- Martin : "Pour regarder les racines, il faut une pelle."
- Tristan : "Ils sont tous riches en Suisse ?"
  Iman : "Non !"
  Tristan : "Alors pourquoi tu vis là-bas ?"
  Iman : "Ma mère est banquière..."
- Matthieu : "Félix ! J'ai besoin de toi."

- Henry : "Arthur est un fort homme."
- Félix (à un·e élève) : "Il y a plus de 'j' dans ton prénom que de points sur ta copie."
- Exercice proposé par Félix : "n mathématiciens ont k amis, montrer que $k = 0$."
- Baptiste écrit "Salle Rosinsky" sur le tableau de la muraille. Pourquoi ? "Parce que Muraille Rosinsky !"
- Pendant la conférence de Raphaël : Raphaël : "Quelqu'un a-t-il un exemple de martingale simple ?"
  Quelqu'un : "Un pile ou face."
  Raphaël : "Encore plus simple !"
  Olivine : "Avec une pièce à une face alors !"
- Tristan : "Le niveau en mathématiques est inversement proportionnel à la vie sociale."
- Iman : "Il est où Mathieu ?"
  Colin : "Bah... là-bas..."
  Iman : "Ah, je croyais qu'il s'était Barré"
- Tristan : "En portant le T-shirt Animath à la rentrée, je serai encore plus sûr de ne jamais pouvoir séduire une fille."
- Dans une copie d'élève : "Soit J' le point d'intersection des droites (JB) et (JC)."