*Préparation Olympique Française de Mathématiques 2017-2018*

*Envoi Numéro 1*

*À renvoyer au plus tard le 15 novembre*

Les consignes suivantes sont à lire attentivement:

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2003 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés “Groupe B” ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés “communs” sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés “Groupe A” ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques, 11-13 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris.
`olymp@animath.fr`

## Exercices du groupe B

*Exercice 1.* Une cellule peut se diviser en 42 ou en 44 petites cellules. Combien de divisions faut-il pour obtenir, à partir d'une cellule, exactement 2017 cellules ?

*Exercice 2.* On a $n$ lampes, chacune avec un interrupteur. Chaque lampe fonctionne normalement, appuyer sur son interrupteur l'éteint si elle est allumée, et l'allume si elle est éteinte. Toutes les minutes on touche aux interrupteurs.
À la première minute : on appuie sur tous les interrupteurs $(1, 2, 3, ..., n)$.
À la deuxième minute : on appuie sur tous les interrupteurs dont la lampe a un numéro pair $(2, 4, 6, ...)$.
À la troisième minute : on appuie sur tous les interrupteurs dont la lampe a un numéro divisible par 3 $(3, 6, 9, ...)$.
Et ainsi de suite, à la $k$-ième minute, on appuie sur les interrupteurs avec un numéro divisible par $k$.
Quelles sont les lampes qui sont allumées après $n$ minutes sachant qu'au début toutes les lampes sont éteintes ?

*Exercice 3.* On considère 5 nombres entiers positifs. En les ajoutant deux à deux de toutes les façons possibles, on génère 10 entiers. Montrer que ces 10 entiers ne peuvent pas être 10 entiers consécutifs.

## Exercices communs

*Exercice 4.* Dans la région reculée de Torturie, le vizir dispose en cercle $n$ condamnés, numérotés dans l'ordre entre 1 et $n$. Implacablement, il envoie au bourreau un condamné sur deux : les condamnés 2, 4,... et ainsi de suite en tournant autour du cercle, en sautant une personne entre deux supplices, jusqu'au moment où il n'en reste plus qu'un. Calculer en fonction de $n$ le numéro du dernier condamné restant.

*Exercice 5.* Trouver tous les entiers m, n $\geq$ 0 tels que $n^3 - 3n^2 + n + 2 = 5^m$.

*Exercice 6.* Montrer que $n!$ est divisible par $2^{n-1}$ si et seulement si $n$ est une puissance de 2.

## Exercices du groupe A

*Exercice 7.* Trouver les couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}$ solutions de l'équation $y^2 = x^5 - 4$.

*Exercice 8.* Existe-t-il un sous-ensemble infini $A$ de $\mathbb{N}$ qui vérifie la propriété suivante : toute somme finie d'éléments distincts de $A$ n'est jamais une puissance d'un entier (c'est-à-dire un entier de la forme $a^b$ avec $a$ et $b$ entiers supérieurs ou égaux à 2) ?

*Exercice 9.* On note $P(n)$ le plus grand diviseur premier de $n$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n$ tels que $P(n-1) < P(n) < P(n+1)$.