OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE NOVEMBRE

MERCREDI 30 NOVEMBRE 2016

DURÉE : 4 HEURES

Instructions

▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**

▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Olympiades Françaises de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75005 Paris

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Exercice 1. Soit $n \geq 5$ un entier, et $E_1, E_2, ..., E_{2n-1}$ des parties distinctes à deux éléments de $\{1, 2, ..., n\}$.
Prouver que, parmi les $2n-1$ parties E_i, on peut en choisir n de sorte que la réunion de ces n parties ne contienne pas plus de $\dfrac{2}{3}n + 1$ éméments.

Exercice 2. Soit ABC un triangle. On note P le symétrique de B par rapport à (AC) et Q le symétrique de C par rapport à (AB).
Soit T l'intersection entre (PQ) et la tangente en A au cercle circonscrit à (APQ).
Montrer que le symétrique de T par rapport à A appartient à (BC).

Exercice 3. Déterminer tous les entiers $a > 0$ pour lesquels il existe des entiers strictement positifs $n, s, m_1, \cdots, m_n, k_1, \cdots, k_s$ tels que

$$(a^{m_1} - 1) \cdots (a^{m_n} - 1) = (a^{k_1} + 1) \cdots (a^{k_s} + 1).$$