OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE NOVEMBRE 2016 : CORRIGÉ

Exercice 1. Soit $n \geq 5$ un entier, et $E_1, E_2, ..., E_{2n-1}$ des parties distinctes à deux éléments de $\{1, 2, ..., n\}$.
Prouver que, parmi les $2n-1$ parties E_i, on peut en choisir n de sorte que la réunion de ces n parties ne contienne pas plus de $\dfrac{2}{3}n+1$ éléments.

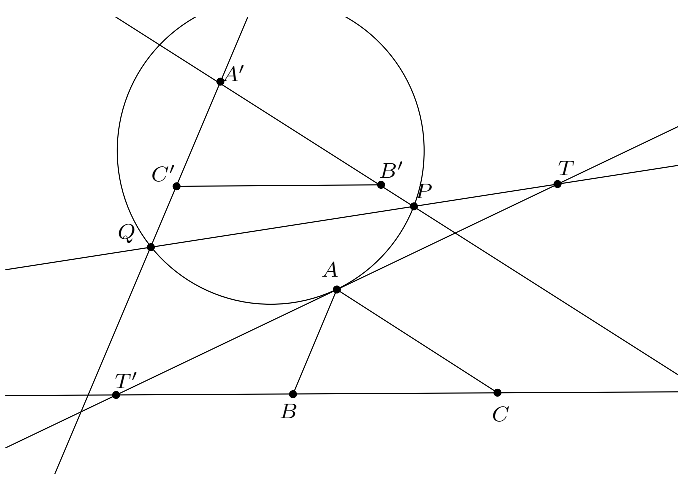
Solution de l'exercice 1 On va prouver par récurrence sur $k \leq \frac{2n-1}{3}$ que l'on peut toujours éliminer $3k$ des $2n-1$ parties de sorte que la réunion des $2n-1-3k$ restantes ne contienne pas plus de $n-k$ éléments.

Le cas $k=0$ est immédiat.
Soit maintenant $1 \leq k \leq \frac{2n-1}{3}$. On suppose que l'on a éliminé $3(k-1)$ des E_i de sorte que la réunion U_{k-1} des $2n-1-3(k-1)$ autres ne contienne pas plus de $n-k+1$ éléments.
Chacun des E_i contient deux éléments. De $2(2n-1-3(k-1)) < 4(n-k+1)$, on déduit alors qu'il existe un élément x de U_{k-1} qui n'appartient qu'à au plus trois de E_i qui forment U_{k-1}.
Ainsi, en éliminant encore trois des E_i non déà éliminés, dont tous ceux qui contiennent x, cela assure que la réunion des $n-3k$ restants ne contient pas plus de $n-k$ éléments.
Cela achève la récurrence.

Pour $k = \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor$, on a $n - \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor \leq n - \frac{n-1}{3} = \frac{2}{3}n+1$, ce qui conclut.

Exercice 2. Soit ABC un triangle. On note P le symétrique de B par rapport à (AC) et Q le symétrique de C par rapport à (AB).
Soit T l'intersection entre (PQ) et la tangente en A au cercle circonscrit à (APQ).
Montrer que le symétrique de T par rapport à A appartient à (BC).

Solution de l'exercice 2



Soient B' et C' les symétriques de B et C par rapport à A. Comme le triangle $AB'P$ est isocèle en A, on a $\widehat{AB'P} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{B'AP}) = \frac{1}{2}\widehat{PAB} = \widehat{BAC}$, donc $(B'P) \parallel (AC)$.
De même, $(C'Q) \parallel (AB)$, donc les droites $(B'P)$ et $(C'Q)$ sont sécantes. Notons A' leur point d'intersection.
Les triangles $A'B'C'$ et ACB sont semblables car leurs côtés sont deux à deux parallèles.
De plus, $AB'P$ et $AC'Q$ sont semblables car $\widehat{AB'P} = \widehat{AC'Q}$ et car ces deux triangles sont isocèles en A.
Montrons maintenant l'assertion demandée. Par symétrie par rapport à A, il revient au même de montrer que T, B', C' sont alignés. En appliquant le théorème de Ménélaüs dans $A'PQ$, cela équivaut à

$$\frac{B'P}{B'A'} \times \frac{C'A'}{C'Q} \times \frac{TQ}{TP} = 1 \qquad (E).$$

Comme TAQ et TPA sont semblables, on a $\frac{TA}{TP} = \frac{TQ}{TA} = \frac{AQ}{AP}$, donc $\frac{TQ}{TP} = \frac{AQ^2}{AP^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$.
Comme $A'B'C'$ et ACB sont semblables, on a $\frac{C'A'}{B'A'} = \frac{AB}{AC}$.
Comme $AB'P$ et $AC'Q$ sont semblables, on a $\frac{B'P}{C'Q} = \frac{AP}{AQ} = \frac{AB}{AC}$.
On en déduit que (E) est vraie.

Exercice 3. Déterminer tous les entiers $a > 0$ pour lesquels il existe des entiers strictement positifs $n, s, m_1, \cdots, m_n, k_1, \cdots, k_s$ tels que

$$(a^{m_1} - 1) \cdots (a^{m_n} - 1) = (a^{k_1} + 1) \cdots (a^{k_s} + 1).$$

Solution de l'exercice 3 On va prouver que les entiers a cherchés sont $a = 2$ et $a = 3$.
Tout d'abord, on constate que $2^2 - 1 = 2 + 1$ et que $(3-1)(3-1) = 3+1$, ce qui assure que $a = 2$ et $a = 3$ sont effectivement des solutions du problème.

Réciproquement, soit $a, n, s, m_1, \cdots, m_n, k_1, \cdots, k_s$ des entiers strictement positifs tels que

$$(a^{m_1} - 1) \cdots (a^{m_n} - 1) = (a^{k_1} + 1) \cdots (a^{k_s} + 1).$$

Clairement, on a $a \neq 1$, puisque si $a = 1$ le membre de droite vaut 0 mais pas celui de gauche.

Par l'absurde : supposons que $a > 3$.
On pose $A = (a^{m_1} - 1) \cdots (a^{m_n} - 1) = (a^{k_1} + 1) \cdots (a^{k_s} + 1)$.

Lemme 1. Chacun des nombres $m_1, \cdots, m_n$ et $a - 1$ est une puissance de 2.

Preuve du lemme 1. Soit $i \in \{1, \cdots, n\}$ et γ un diviseur impair de m_i (éventuellement $\gamma = 1$), disons $m_i = \gamma \times b$. Soit p un diviseur premier de $a^\gamma - 1$.
Puisque $a^\gamma \equiv 1 \pmod p$, on a $a^{m_i} \equiv (a^\gamma)^b \equiv 1 \pmod p$.
Ainsi A est divisible par p, ce qui assure qu'il existe j tel que $a^{k_j} + 1$ soit divisible par p. Comme ci-dessus, on a alors $(a^\gamma)^{k_j} - 1 \equiv 0 \pmod p$ et, puisque γ est impair, on a aussi $(a^{k_j})^\gamma \equiv -1 \pmod p$.
Par suite p divise $((a^{k_j})^\gamma + 1) - ((a^\gamma)^{k_j} - 1) = 2$, d'où $p = 2$.
Ainsi, le seul diviseur premier de $a^\gamma - 1$ est $p = 2$, ce qui prouve que $a^\gamma - 1$ est une puissance de 2. Il existe donc un entier c tel que

$$2^c = a^\gamma - 1 = (a-1)(a^{\gamma-1} + \cdots + a + 1).$$

En particulier, $a-1$ est donc une puissance de 2 et a est impair. Mais, puisque γ est impair, $a^{\gamma-1}+\cdots+a+1$ est impair et doit aussi être une puissance de 2. Cela implique que $\gamma=1$ et donc que le seul diviseur impair de m_i est 1, ce qui conclut la preuve du lemme 1.

D'après le lemme, on a $a-1=2^c$ et $a-1>2$, donc $a-1$ est divisible par 4. Pour tout entier $k\geq 0$, on a alors $a^k+1\equiv 2 \pmod 4$.
Pour tout i, on pose $a_i=\frac{1}{2}(a^{2^i}+1)$. On sait donc que a_i est un entier impair.
On vérifie facilement par récurrence que, pour tout entier $d\geq 0$:

$$a^{2^d}-1=(a-1)(a+1)(a^2+1)\cdots(a^{2^{d-1}}+1)=2^c\cdot 2^d\cdot a_0a_1\cdots a_{d-1}. \qquad (1)$$

Lemme 2. Les nombres $a_0,a_1,a_2,\cdots$ sont deux à deux premiers entre eux.

Preuve du lemme 2. Soit $0\leq i<j$. On note que a_i et a_j sont impairs donc leur pgcd d est impair. D'après (1), le nombre $a^{2^j}-1$ est divisible par a_i. Puisque $a^{2^j}+1=2a_j$, on en déduit que tout diviseur commun à a_i et a_j divise aussi $(a^{2^j}+1)-(a^{2^j}-1)=2$. Ainsi d est impair et divise 2, donc $d=1$. On a donc a_i et a_j premiers entre eux, et cela achève la preuve du lemme 2.

D'après le lemme 1, on sait que chaque m_i est une puissance de 2. En utilisant (1) pour chaque m_i, on déduit que A peut s'écrire sous la forme

$$A=2^N(a_0)^{N_0}\cdots(a_q)^{N_q} \text{ (2)},$$

avec $N>N_0+\cdots N_q$. Puisque chaque $a^{k_j}+1$ est congru à 2 modulo 4, on doit donc avoir $s=N$. Or, pour tout j, si l'on pose $k_j=2^rt$ avec t impair, alors $a^{k_j}+1=(a^{2^r})^t+1\equiv(-1)^t+1\equiv 0 \pmod 2)^r+1$. Ainsi $a^{k_j}+1$ est divisible par a_r.
Ainsi, chacun des nombres $a^{k_j}+1$ est divisible par un des a_i. Puisque $s>N_0+\cdots N_q$, il existe i pour lequel a_i divise plus de N_i des $a^{k_j}+1$. Par suite, A est divisible par $(a_i)^{N_i+1}$, ce qui est impossible d'après (2), puisque a_i est impair et premier avec chacun des autres a_j d'après le lemme 2.