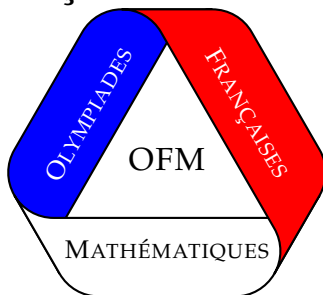


# OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 22 MARS 2017

DURÉE : 4 HEURES

NE PAS DIFFUSER SUR INTERNET

## Instructions

- ▷ Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Olympiades Françaises de Mathématiques  
Animath  
Institut Henri Poincaré  
11-13 rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05

## Exercices pour élèves nés en 2002 ou après

**Exercice 1.** Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$ , et  $M$  un point extérieur au cercle. Soit  $A$  un point de  $\mathcal{C}$  tel que  $(MA)$  soit tangente au cercle. Soient  $B$  et  $C$  deux points de  $\mathcal{C}$  tels que  $B$  appartienne au segment  $[AC]$ . Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $[MO]$ . Soit  $K$  le point d'intersection de  $[MO]$  avec  $\mathcal{C}$ . Montrer que  $(BK)$  est la bissectrice de  $\widehat{HBM}$ .

**Exercice 2.** Montrer que pour tous  $a, b, c$  réels strictement positifs on a

$$\frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ca} \geq 9 + 2 \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right).$$

**Exercice 3.**  $2n + 1$  points sont disposés sur un cercle. On en colorie  $n$  en bleu,  $n$  en rouge, et un dernier en noir. On dit qu'un segment est *amical* si ses extrémités sont un point rouge et un point bleu. Montrer qu'on peut tracer  $n$  segments ne se croisant pas et dont les extrémités sont deux des  $2n + 1$  points, de sorte qu'aucun ne soit amical.

## Exercice commun

**Exercice 4.** Déterminer tous les triplets  $(x, y, p)$  d'entiers naturels tels que  $p$  soit un nombre premier, et tels que

$$x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12p.$$

## Exercices pour élèves nés en 2001 ou avant

**Exercice 5.** Soit  $C$  le plus petit nombre réel tel que pour tous réels  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  (non nécessairement distincts), il existe des indices distincts  $i, j, k, \ell$  tels que

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_\ell} \right| \leq C.$$

Montrer que  $C = \frac{1}{2}$ .

**Exercice 6.** Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = AC \neq BC$ , et soit  $I$  le centre de son cercle inscrit. La droite  $(BI)$  coupe  $(AC)$  en  $D$ , et la droite passant par  $D$  perpendiculaire à  $(AC)$  rencontre  $(AI)$  en  $E$ . Montrer que le symétrique de  $I$  par rapport à  $(AC)$  appartient au cercle circonscrit au triangle  $BDE$ .