OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 22 MARS 2017

DURÉE : 4 HEURES

NE PAS DIFFUSER SUR INTERNET

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**

- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Olympiades Françaises de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Exercices pour élèves nés en 2002 ou après

Exercice 1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, et M un point extérieur au cercle. Soit A un point de $\mathcal{C}$ tel que (MA) soit tangente au cercle. Soient B et C deux points de $\mathcal{C}$ tels que B appartienne au segment $[AC]$. Soit H le projeté orthogonal de A sur $[MO]$. Soit K le point d'intersection de $[MO]$ avec $\mathcal{C}$. Montrer que (BK) est la bissectrice de $\widehat{HBM}$.

Exercice 2. Montrer que pour tous a, b, c réels strictement positifs on a

$$\frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ca} \geqslant 9 + 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right).$$

Exercice 3. $2n+1$ points sont disposés sur un cercle. On en colorie n en bleu, n en rouge, et un dernier en noir. On dit qu'un segment est *amical* si ses extrémités sont un point rouge et un point bleu. Montrer qu'on peut tracer n segments ne se croisant pas et dont les extrémités sont deux des $2n+1$ points, de sorte qu'aucun ne soit amical.

Exercice commun

Exercice 4. Déterminer tous les triplets (x, y, p) d'entiers naturels tels que p soit un nombre premier, et tels que

$$x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12p.$$

Exercices pour élèves nés en 2001 ou avant

Exercice 5. Soit C le plus petit nombre réel tel que pour tous réels a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (non nécessairement distincts), il existe des indices distincts i, j, k, ℓ tels que

$$\left|\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_\ell}\right| \leqslant C.$$

Montrer que $C = \frac{1}{2}$.

Exercice 6. Soit ABC un triangle tel que $AB = AC \neq BC$, et soit I le centre de son cercle inscrit. La droite (BI) coupe (AC) en D, et la droite passant par D perpendiculaire à (AC) rencontre (AI) en E. Montrer que le symétrique de I par rapport à (AC) appartient au cercle circonscrit au triangle BDE.