OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE JANVIER
MERCREDI 4 JANVIER 2017
DURÉE : 4 HEURES

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**

- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Les collégiens sont dans le groupe B. Les élèves en seconde ou en première, nés en 2002 ou après, qui n'étaient pas à l'OFM en 2015-2016, sont dans le groupe B. Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés Groupe B ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- L'exercice classé commun est à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés Groupe A ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Olympiades Françaises de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75005 Paris

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(a^2) - f(b^2) \leqslant (f(a) + b)(a - f(b)), \qquad \text{pour tous } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. Soit S l'ensemble des nombres à deux chiffres qui ne contiennent pas le chiffre 0. Deux nombres de S sont dits *amis* si leurs plus grands chiffres sont égaux, et si la différence entre leurs plus petits chiffres est égale à 1. Par exemple, 68 et 85 sont amis, 78 et 88 sont amis, mais 58 et 75 ne sont pas amis.
Déterminer le plus grand entier m tel qu'il existe une partie T de S possédant m éléments, telle que deux éléments quelconques de T ne soient pas amis.

Exercice 3. Soit $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 - x + 1$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $P(3^n)$ ne soit pas premier.

Exercice commun

Exercice 4. Soit ABC un triangle rectangle en C. Soient D le pied de la hauteur issue de C, et Z le point de $[AB]$ tel que $AC = AZ$. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe (CB) et (CZ) en X et Y respectivement. Montrer que les quatre points B, X, Y, D sont sur un même cercle.

Exercices du groupe A

Exercice 5. Soit $a \in [0; 1]$. On définit la suite (x_n) par
$x_0 = a$ et $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$, pour tout $n \geq 0$.
Prouver que la suite (x_n) est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si a est un nombre rationnel.
(Note : on dit que (x_n) est périodique à partir d'un certain rang s'il existe des entiers $T > 0$ et $n \geqslant 0$ tels que $x_{k+T} = x_k$ pour tout $k \geqslant n$.)

Exercice 6. Prouver qu'il existe un entier $n > 0$ tel que parmi les 2016 chiffres de droite dans l'écriture décimale de 2^n, il y a au moins 1008 chiffres 9.