OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 15 FÉVRIER 2017
DURÉE : 4 HEURES

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**

- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Olympiades Françaises de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Exercices pour élèves nés en 2002 ou après

Exercice 1. Résoudre en nombres réels le système d'équations

$$\begin{gathered} x_1(x_1-1)=x_2-1 \\ x_2(x_2-1)=x_3-1 \\ \cdots \\ x_{2016}(x_{2016}-1)=x_{2017}-1 \\ x_{2017}(x_{2017}-1)=x_1-1. \end{gathered}$$

Exercice 2. Soit a et b des entiers strictement positifs. Prouver que si

$$a+\frac{b}{a}-\frac{1}{b}$$

est un entier alors c'est un carré.

Exercice 3. On considère 2017 droites du plan, qui se rencontrent deux à deux en des points distincts. On appelle E l'ensemble de ces points d'intersection.
On veut attribuer une couleur à chacun des points de E de sorte que deux quelconques de ces points qui appartiennent à une même droite et dont le segment qui les relient ne contient aucun autre point de E, soient de couleurs différentes.
Combien faut-il au minimum de couleurs pour pouvoir réaliser une telle coloration?

Exercice commun

Exercice 4.
Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus.
Les hauteurs $[AA_1]$, $[BB_1]$ et $[CC_1]$ se coupent au point H. Soit A_2 le symétrique de A par rapport à (B_1C_1), et soit O le centre du cercle circonscrit à ABC.
a) Prouver que les points O, A_2, B_1, C sont cocycliques.
b) Prouver que O, H, A_1, A_2 sont cocycliques.

Exercices pour élèves nés en 2001 ou avant

Exercice 5. Soit $a_0, a_1, .., a_{99}, b_0, b_1, ..., b_{99}$ des réels strictement positifs.
Pour $k = 0, 1, ..., 198$, on pose $S_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{198} a_i b_{k-i}$, avec $a_j = 0$ et $b_j = 0$ si $j < 0$ ou $j > 99$.
Est-il possible que les nombres $S_0, S_1, ..., S_{198}$ soient tous égaux ?

Exercice 6. 1) Pierre répartit les entiers $1, 2, ..., 2012$ en deux groupes disjoints dont les sommes respectives des éléments sont égales.
Sans même regarder la répartion choisie par Pierre, Clara affirme alors que l'on peut éliminer deux nombres de chaque groupe de sorte que, dans chaque groupe, les sommes respectives des éléments restants soient égales.
Prouver que Clara a raison.

2) Pierre répartit les entiers $1, 2, ..., 20$ en deux groupes disjoints dont les sommes respectives des éléments sont égales.
Sans même regarder la répartion choisie par Pierre, Clara affirme alors que l'on peut éliminer deux nombres de chaque groupe de sorte que, dans chaque groupe, les sommes respectives des éléments restants soient égales.
Prouver que, cette fois, Clara aurait peut-être mieux fait de regarder avant de parler.