OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 15 FÉVRIER 2017

CORRIGÉ

Exercice 1. Résoudre en nombres réels le système d'équations

$$\begin{aligned} x_1(x_1-1) &= x_2-1 \\ x_2(x_2-1) &= x_3-1 \\ &\cdots \\ x_{2016}(x_{2016}-1) &= x_{2017}-1 \\ x_{2017}(x_{2017}-1) &= x_1-1. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 1 Posons par convention $x_{2018} = x_1$. Pour tout $i = 1, \ldots, 2017$, on a $x_{i+1} - x_i = x_i(x_i - 1) + 1 - x_i = (x_i - 1)^2 \geqslant 0$, donc $x_1 = x_{2018} \geqslant x_{2017} \geqslant \cdots \geqslant x_1$. On en déduit que les x_i sont tous égaux, donc $0 = x_{i+1} - x_i = (x_i - 1)^2 = 0$. Par conséquent, $x_i = 1$ pour tout i. Réciproquement, il est clair que $x_i = 1$ est solution.

Exercice 2. Soit a et b des entiers strictement positifs. Prouver que si

$$a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$$

est un entier alors c'est un carré.

Solution de l'exercice 2 En multipliant par a, on obtient que $a^2 + b - \frac{a}{b}$ est un entier, donc $k = \frac{a}{b}$ est un entier.
De même, en multipliant par b on voit que $\frac{b^2}{a}$ est un entier. Comme $\frac{b^2}{a} = \frac{b}{k}$, on a $b = kc$ où c est un entier.
Comme $\frac{b}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{k} - \frac{1}{kc}$ est un entier, en multipliant par k on voit que $\frac{1}{c}$ est un entier, donc $c = 1$, $b = k$ et $a = k^2$. Finalement, $a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b} = k^2$ est un carré.

Exercice 3. On considère 2017 droites du plan, qui se rencontrent deux à deux en des points distincts. On appelle E l'ensemble de ces points d'intersection.
On veut attribuer une couleur à chacun des points de E de sorte que deux quelconques de ces points qui appartiennent à une même droite et dont le segment qui les relient ne contient aucun autre point de E, soient de couleurs différentes.
Combien faut-il au minimum de couleurs pour pouvoir réaliser une telle coloration?

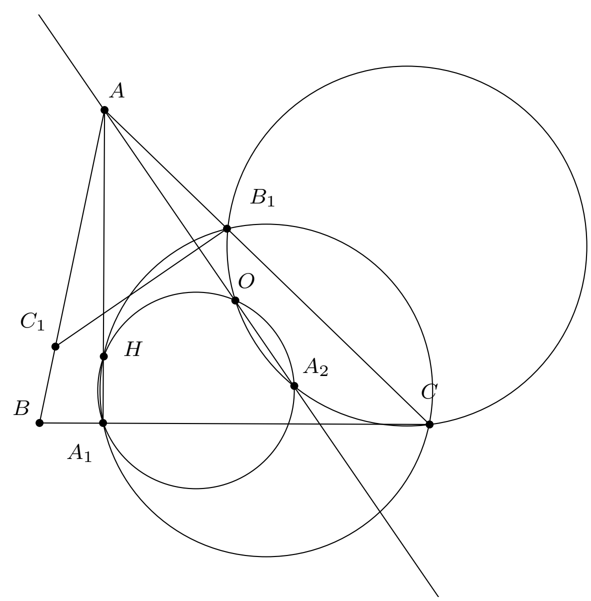
Solution de l'exercice 3 Le minimum m cherché est $m = 3$ et, avec ce qui suit, il sera assez évident que le résultat reste vrai pour $n \geq 3$ droites.

Tout d'abord, on note que, dans la configuration obtenue, il y a au moins une région non subdivisée qui est un triangle. En effet, trois droites non concourantes et deux jamais parallèles forment un triangle. Or, toute droite qui traverse un triangle, le partage en deux polygones dont au moins un est un triangle et donc, en partant de trois des droites données et en "ajoutant" une par une les 2014 autres, on est assuré de l'existence d'une telle région triangulaire dans la configuration finale. Les trois sommets d'un tel triangle doivent être de couleurs distinctes, ce qui implique que $m \geq 3$.

Pour conclure, nous allons construire une coloration adéquate à trois couleurs. On commence par remarquer que, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de points d'intersection, on peut choisir un repère orthogonal dans lequel ces points ont des abscisses deux à deux distinctes. On numérote alors les points $M_1, M_2 ..., M_k$ selon les abscisses croissantes (et où $k = \frac{2017 \times 2016}{2}$). Pour tout i, le point M_i possède au plus quatre voisins et, s'il appartient à un segment qui joint deux de ses voisins, un seul de ces deux voisins a une abscisse inférieure à celle de M_i. Cela assure que, pour tout $i \leq k$, parmi les voisins de M_i, il y en a au plus deux qui ont des indices inférieurs à i. On peut alors colorier les M_i dans l'ordre de la numérotation selon la procédure suivante : on colorie M_1 en vert et M_2 en rouge. Et, pour tout i tel que $2 \leq i \leq k-1$, si l'on suppose que les points $M_1, M_2 ..., M_i$ ont été colorés chacun soit en vert, soit en rouge, soit en bleu de sorte que deux points voisins ne soient pas (encore) de la même couleur alors, d'après la remarque précédente, au plus deux voisins de M_{i+1} ont déjà été colorés, ce qui laisse une couleur libre pour M_{i+1}.

Exercice 4. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus.
Les hauteurs $[AA_1]$, $[BB_1]$ et $[CC_1]$ se coupent au point H. Soit A_2 le symétrique de A par rapport à (B_1C_1), et soit O le centre du cercle circonscrit à ABC.
a) Prouver que les points O, A_2, B_1, C sont cocycliques.
b) Prouver que O, H, A_1, A_2 sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4



a) A, H, B_1, C_1 sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[AH]$, donc $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{AHC_1} = 90° - \widehat{C_1AH}$. Or, $(AA_2) \perp (B_1C_1)$ donc $\widehat{A_2AB_1} = \widehat{C_1AH}$, i.e. les demi-droites $[AH)$ et $[AA_2)$ sont symétriques par rapport à la bissectrice de $\widehat{BAC}$. On en déduit que $A_2 \in [AO)$. Comme $AO = CO$, on a $\widehat{ACO} = \widehat{OAC} = \widehat{AA_2B_1}$, donc O, A_2, B_1, C sont cocycliques.
b) En utilisant la puissance de A par rapport aux cercles O, A_2, B_1, C et H, A_1, C, B_1, on a $AB_1 \cdot AC = AO \cdot AA_2$ et $AB_1 \cdot AC = AH \cdot AA_1$. Par conséquent, $AO \cdot AA_2 = AH \cdot AA_1$. D'après la puissance d'un point par rapport à un cercle, on en déduit que OA_2, H, A_1 sont cocycliques.

Remarque. L'hypothèse que ABC est acutangle est superflue.

Exercice 5. Soit $a_0, a_1, .., a_{99}, b_0, b_1, ..., b_{99}$ des réels strictement positifs.

Pour $k = 0, 1, ..., 198$, on pose $S_k = \sum_{i=0}^{198} a_i b_{k-i}$, avec $a_j = 0$ et $b_j = 0$ si $j < 0$ ou $j > 99$.

Est-il possible que les nombres $S_0, S_1, ..., S_{198}$ soient tous égaux ?

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Non. Raisonnons par l'absurde. En effet, comme $a_0b_0 = a_0b_{99} + \cdots + a_{99}b_0$ où les $\cdots$ représentent des termes strictement positifs, on a $a_0b_0 > a_0b_{99}$ donc $b_0 > b_{99}$, et de même $a_0 > a_{99}$. Par conséquent, $S_0 = a_0b_0 > a_{99}b_{99} = S_{198}$, ce qui est contradictoire.

Autre démonstration qui ne nécessite pas l'hypothèse de positivité (mais seulement le fait que $a_{99} \neq 0$ et $b_{99} \neq 0$:
supposons que $S_0 = S_1 = ... = S_{198} = \alpha$.
Notons que $\alpha \neq 0$.
On pose $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{99}x^{99}$ et $Q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_{99}x^{99}$. Comme
$P(x)Q(x) = S_0 + S_1x + ... + S_{198}x^{198} = \alpha(1 + x + ... + x^{198})$

$= \alpha\dfrac{1 - x^{199}}{1 - x}$ pour $x \neq 1$, on constate que $P(x)Q(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 1$. D'autre part, on a $\alpha \neq 0$ puisque P et Q sont des polynômes non nuls, donc $P(1)Q(1) = 199\alpha \neq 0$.
Par conséquent, $P(x)Q(x) \neq 0$ pour tout réel x, et donc P n'admet pas de racine réelle. Ceci contredit le fait que P est de degré impair.

Exercice 6. 1) Pierre répartit les entiers $1, 2, ..., 2012$ en deux groupes disjoints dont les sommes respectives des éléments sont égales.
Sans même regarder la répartion choisie par Pierre, Clara affirme alors que l'on peut éliminer deux nombres de chaque groupe de sorte que, dans chaque groupe, les sommes respectives des éléments restants soient égales.
Prouver que Clara a raison.

2) Pierre répartit les entiers $1, 2, ..., 20$ en deux groupes disjoints dont les sommes respectives des éléments sont égales.
Sans même regarder la répartion choisie par Pierre, Clara affirme alors que l'on peut éliminer deux nombres de chaque groupe de sorte que, dans chaque groupe, les sommes respectives des éléments restants soient égales.
Prouver que, cette fois, Clara aurait peut-être mieux fait de regarder avant de parler.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On colorie les éléments du groupe G_1 en rouge, et ceux de G_2 en bleu. Sans perte de généralité, on peut supposer que 1 est rouge. Lorsque deux entiers consécutifs ne sont pas dans le même groupe, on dit que l'on a *une alternance*.

- Si l'on a au moins quatre alternances, on peut trouver la configuration $...rb...br...rb...br...$, où les pointillés indiquent toujours que l'on reste sur la même couleur, sauf peut-être pour le dernier paquet. Dans la situation décrite, la conclusion est assurée en éliminant les entiers responsables des première et quatrième alternances (on ne peut utiliser les deux premières alternances car c'est peut-être le même nombre bleu qui est concerné).

- Si l'on a exactement trois alternances $...rb...br...rb...$ avec au moins deux bleus successifs dans le premier paquet de bleus, on peut effacer les nombres impliqués dans les deux premières alternances. De même, s'il y a au moins deux rouges successifs dans le second paquet de rouges, on peut effacer les nombres impliqués dans les seconde et troisième alternances.

Si l'on n'est pas dans un de ces deux cas, c'est que l'on a $...rbrb....$, où le premier groupe de pointillés ne désigne que des rouges, et le second groupe de pointillés ne désigne que des bleus. On appelle k le nombre de rouges dans ce premier paquet. La somme des nombres rouges est alors $\frac{k(k+1)}{2} + (k+2)$, alors que la somme de tous les entiers de 1 à 2012 vaut $2012 \times 2013/2$. Puisque la somme des nombres dans chaque groupe est la même, on doit avoir $\frac{k(k+1)}{2} + (k+2) = 2012 \times 2012/4$, autrement dit, $k(k+3)+4 = 2012 \times 2013/2$. Or, cette équation n'a pas de solution modulo 3, ce qui assure que cette configuration n'est finalement pas possible.

- Si l'on a exactement deux alternances, on est forcément dans la configuration $....rb...br....$, où les pointillés indiquent qu'il n'y a pas de changements de couleurs. S'il y a au moins deux bleus, on peut effacer les nombres impliqués dans les deux alternances. Sinon, c'est qu'il n'y a qu'un bleu, mais alors il doit être égal à 1012539, ce qui est impossible.

- S'il n'y a qu'une alternance, c'est que l'on est dans la configuration $....rb...$ Si, comme ci-dessus, on note k le nombre de rouges, on doit avoir $\frac{k(k+1)}{2} = 1012539$, soit $k(k+1) = 2025078$ qui n'a pas non plus de solution entière (on peut le voir modulo 10).

Finalement, dans tous les cas, on peut éliminer deux nombres de chaque groupe de sorte que, dans chaque groupe, les sommes respectives des éléments restants soient égales.

2) Par exemple, pour $n = 20$, on colorie en rouge les entiers de 1 à 14, et les autres en bleu. Les sommes des deux groupes sont égales, mais si l'on élimine deux rouges, la somme des rouges diminuera d'au plus $14 + 13 = 27$, alors que si on élimine deux bleus, la somme des bleus diminuera d'au moins $15 + 16 = 31$. Il est alors impossible qu'après élimination, les deux groupes aient encore des sommes égales.