Olympiades Françaises de Mathématiques 2016-2017

Envoi Numéro 5

À renvoyer au plus tard le 15 mars

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2002 ou après, avec les exceptions suivantes :

* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,

* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2015-2016 sont dans le groupe A.

Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B »ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. On considère un échiquier 3×3. Au début, on écrit le chiffre 0 dans chacune des 9 cases. Ensuite, à chaque étape, on effectue l'opération suivante : on choisit deux cases ayant un côté commun, puis on rajoute 1 au nombre écrit dans ces deux cases, ou bien on retranche 1 au nombre écrit dans ces deux cases. Est-il possible d'obtenir une configuration où le nombre 2017 est écrit dans les 9 cases ?

Exercice 2. Soit ABC un triangle acutangle. On note O le centre de son cercle circonscrit. On considère le cercle Γ_B passant par A et B et qui est tangent à (AC), ainsi que le cercle Γ_C passant par A et C qui est tangent à (AB). Une droite Δ passant par A recoupe Γ_B en X et Γ_C en Y. Montrer que $OX = OY$.

Exercice 3. Trouver tous les entiers strictement positifs a, b et c tels que $\text{PGCD}(a, b, c) = 1$,

$$a \mid (b-c)^2, \quad b \mid (a-c)^2, \quad c \mid (a-b)^2.$$

et tels qu'il est possible de construire un triangle non aplati dont les côtés ont pour longueurs a, b et c.

Exercices communs

Exercice 4. Soient a, b et c trois nombres strictement positifs tels que $a + b + c + abc = 4$. Montrer que

$$\left(1 + \frac{a}{b} + ca\right)\left(1 + \frac{b}{c} + ab\right)\left(1 + \frac{c}{a} + bc\right) \geqslant 27.$$

Exercice 5. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous nombres réels $x, y \in \mathbb{R}$ on ait

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y).$$

Exercice 6. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en E. Soit $P \in [AD]$ un point tel que $P \neq A$ et $PE = EC$. On suppose que le cercle circonscrit du triangle BCD coupe $[AD]$ en un point Q différent de A. On note R le point d'intersection de $[AC]$ avec le cercle passant par A et tangent à (EP) en P. On suppose que les points B, R, Q sont alignés. Montrer que $\widehat{BCD} = 90°$.

Exercice 7. Trouver tous les entiers strictement positifs a, b et c tels que $(a^3 + b)(b^3 + a) = 2^c$.

Exercices du groupe A

Exercice 8. Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers tels que $P(P(n)+n)$ est un nombre premier pour une infinité d'entiers n.

Exercice 9. Soient $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle. On note Δ_1 la droite parallèle à (BC) par A et Δ_2 la droite parallèle à (AD) passant par B. On note E le point d'intersection de Δ_1 avec (CD) et F le point d'intersection de Δ_2 avec (CD). La droite perpendiculaire à Δ_1 passant A coupe (BC) en P, et la droite perpendiculaire à Δ_2 passant par B coupe (AD) en Q. On note Γ_1 le cercle circonscrit du triangle ADE et Γ_2 le cercle circonscrit du triangle BFC. Montrer que Γ_1 et Γ_2 sont tangents si et seulement si (DP) et (CQ) sont perpendiculaires.

Exercice 10. Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier. On dispose les n^2 nombres entiers $1, 2, \ldots, n^2$ dans les n^2 cases d'un échiquier $n \times n$ comme suit : la première ligne contient les nombres $1, 2, \ldots, n$ (de gauche à droite), la deuxième ligne contient les nombres $n+1, n+2, \ldots, 2n$ et ainsi de suite. À chaque étape, on peut choisir deux cases ayant un côté commun, et ajouter ou soustraire un même entier aux deux nombres dans ces deux cases.

Trouver toutes les valeurs de n pour lesquelles il est possible d'obtenir la configuration où il n'y a que des 0, et dans ce cas trouver le nombre minimal d'étapes nécessaires pour y parvenir.