# *Olympiades Françaises de Mathématiques 2016-2017*

# *Envoi Numéro 4 – Combinatoire*

## *À renvoyer au plus tard le mercredi 15 février*

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2002 ou après, avec les exceptions suivantes :

∗ les élèves de Terminale sont dans le groupe A,

∗ les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2015-2016 sont dans le groupe A.

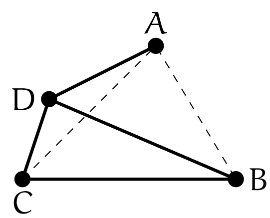
Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

# Exercices du groupe B

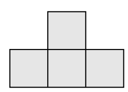
*Exercice 1.*

On place quatre points dans le plan, trois jamais alignés, et on les relie tous deux à deux. On colorie chacun des six segments obtenus soit en bleu soit en rouge. Montrer qu'il existe deux triangles différents coloriés de la même façon. Par exemple, dans l'exemple suivant (où l'on a remplacé rouge par épais et bleu par pointillé), $ABD$ et $ACD$ sont coloriés de la même façon.




*Exercice 2.*

Pour quel $n \geqslant 1$ peut-on remplir un échiquier $n \times n$ avec des pièces de la forme



sans qu'elles se recouvrent ? (Les rotations sont autorisées).

*Exercice 3.*

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$ des sous-ensembles distincts de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant m$ on a $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Montrer que $m \leqslant 2^{n-1}$.

# Exercices communs

*Exercice 4.*

Combien de tableaux $3 \times 3$ peut-on construire en les remplissant avec les nombres de $1$ à $3$ tels qu'il n'y ait pas deux fois le même nombre dans une ligne ni dans une colonne. Et de tableaux $4 \times 4$ avec les nombres de $1$ à $4$ ?

*Exercice 5.*

Peut-on arranger les nombres $1, 1, 2, 2, \ldots, 50, 50$ tels que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant 50$, entre les deux nombres $k$ il y ait exactement $k$ éléments.

*Exercice 6.*

Soient $n \geqslant 2$ un entier et $X$ un ensemble à $n$ éléments. Montrer que le nombre de fonctions $f : X \to X$ telles que $f \circ f$ soit une fonction constante est égale à

$$n \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} i^{n-i-1}.$$

*Exercice 7.*
Un constructeur de jouets crée au moins un jouet par jour. Il n'est pas capable de créer plus de $725$ jouets par an. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe des jours consécutifs pendant lesquels il a créé exactement $n$ jouets.

## Exercices du groupe A

*Exercice 8.*
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ des ensembles de $k$ éléments. Montrer que si $n < 2^{k-1}$ alors il existe des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ tels que :

$$a_i \in A_i, b_j \in B_j, a_i \neq b_j$$

pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

*Exercice 9.*
Soit $n$ un entier positif. Montrer que dans un ensemble $A$ de $2^n$ nombres strictement positifs, on peut choisir un sous-ensemble $B$ de taille $n+1$ tel que la somme de deux nombres différents dans $B$ ne soit jamais dans $A$.

*Exercice 10.*
On possède une liste infinie de cases, les cases étant numérotées par $1, 2, \ldots$. Au départ, toutes les cases contiennent le nombre $1$. À chaque étape, on choisit un nombre $a \in \mathbb{N}^*$ tel que :

— soit toutes les cases numérotées par un multiple de $a$ contiennent $1$, auquel cas on remplace ces $1$ par des $0$ ;
— soit toutes les cases numérotées par un multiple de $a$ contiennent $0$, auquel cas on remplace ces $0$ par des $1$.

Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on peut faire en sorte que toutes les cases de numéro au plus $n$ contiennent un 0 sauf la première case qui contient un 1.