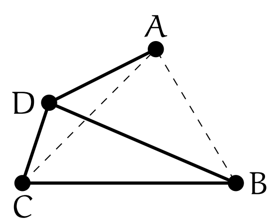
Olympiades Françaises de Mathématiques 2016-2017

Solutions à l'envoi Numéro 4 – Combinatoire

Exercices du groupe B

Exercice 1.

On place quatre points dans le plan, trois jamais alignés, et on les relie tous deux à deux. On colorie chacun des six segments obtenus soit en bleu soit en rouge. Montrer qu'il existe deux triangles différents coloriés de la même façon. Par exemple, dans l'exemple suivant (où l'on a remplacé rouge par épais et bleu par pointillé), ABD et ACD sont coloriés de la même façon.

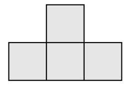


Solution de l'exercice 1

Il y a quatre façons différentes de colorier un triangle (avec zéro, un, deux ou trois segments rouges) et il y a quatre triangles dessinés. Donc, soit deux triangles sont coloriés de la même façon, soit tous les triangles sont différents. Montrons que le deuxième cas n'est pas possible. En effet, deux triangles différents partagent toujours deux sommets en commun, donc un côté en commun. Or, si tous les triangles sont différents, il y a un triangle entièrement bleu, et un autre entièrement rouge. Leur côté commun serait alors à la fois rouge et bleu, impossible. Finalement, on a bien deux triangles coloriés de la même façon.

Exercice 2.

Pour quel $n \geqslant 1$ peut-on remplir un échiquier $n \times n$ avec des pièces de la forme

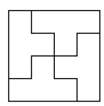


sans qu'elles se recouvrent ? (Les rotations sont autorisées).

Solution de l'exercice 2

Supposons que nous avons réussi à recouvrir un échiquier $n \times n$. Une pièce recouvre 4 cases. Donc clairement 4 divise n^2 donc n est pair. Maintenant, chaque pièce recouvre soit trois cases noires et une case blanche de l'échiquier, soit l'inverse. Or, comme n est pair, il y a autant de cases noires que de cases blanches. Il faut donc autant de pièces recouvrant trois cases noires que de pièces recouvrant trois cases blanches. Par conséquent, il y a un nombre pair de pièces, d'où 8 divise n^2. Donc, si l'on parvient à couvrir un échiquier $n \times n$, alors 4 divise n.

Réciproquement, si 4 divise n, on peut facilement recouvrir l'échiquier avec des blocs 4×4.



Exercice 3.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$ des sous-ensembles distincts de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$ on a $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Montrer $m \leqslant 2^{n-1}$.

Solution de l'exercice 3

Considérons toutes les paires d'ensembles $\{A, A^c\}$ pour tout $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Puisqu'il y a 2^{n-1} telles paires, si $m > 2^{n-1}$ on aurait $1 \leqslant i < j \leqslant m$ tels que $A_i, A_j \in \{A, A^c\}$ pour un $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Donc $A_i \cap A_j = \emptyset$ ce qui contredit notre hypothèse.

Exercices communs

Exercice 4.

Combien de tableaux 3×3 peut-on construire en les remplissant avec les nombres de 1 à 3 tels qu'il n'y ait pas deux fois le même nombre dans une ligne ni dans une colonne. Et de tableaux 4×4 avec les nombres de 1 à 4 ?

Solution de l'exercice 4

Nous présentons ci-dessous une preuve complète de l'exercice. Il n'était pas nécessaire d'être aussi précis pour avoir tous les points mais il est bon, lorsque que l'on compte des objets, d'avoir une idée de la preuve pour démontrer que nous n'avons rien oublié ni compté en double.

Nous avons six façons de remplir la première rangée (trois façons de placer le 1 puis deux de placer le 2 puis une seule possibilité pour placer le 3). Ensuite, il nous reste deux façons de remplir la colonne contenant déjà un 1 (ce qui fait douze en tout). On se retrouve avec, par exemple, le tableau

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & 2 & A \\ & 3 & \end{bmatrix}.$$

On se rend compte qu'il n'y a qu'une seule façon de remplir la case A, c'est-à-dire celle qui est dans la rangée contenant un 2 et dans la colonne contenant un 3. Puis on complète le tableau de la seule manière possible.
On a donc douze façons de remplir un tableau 3×3 comme dans l'énoncé.

Pour les tableaux 4×4, c'est à peu près la même idée. Nous avons vingt-quatre façons de remplir la première rangée et six façons de remplir la colonne contenant un 1. Nous obtenons un tableau ressemblant à

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ & 4 & & \\ A_{3,2} & 3 & & \\ & 2 & & \end{bmatrix}.$$

Maintenant, notons $A_{k,l}$, $k, l \in \{2, 3, 4\}$, la case dans la rangée contenant k et la colonne contenant l. Nous voyons qu'il y a deux possibilités pour remplir $A_{3,2}$:

— si l'on remplit $A_{3,2}$ avec 1, nous n'aurons plus qu'une seule possibilité pour $A_{4,2}$ puis, dans l'ordre, $A_{2,2}$, $A_{3,4}$, $A_{3,3}$, $A_{4,4}$, $A_{4,3}$, $A_{2,4}$ et $A_{2,3}$. On obtient l'unique tableau

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

— si l'on remplit $A_{3,2}$ avec 4 nous avons de nouveau deux possibilités :
  * on remplit $A_{4,2}$ avec 1 puis on remplit les autres cases de la seule façon possible.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

  * on remplit $A_{4,2}$ avec 3 puis on remplit $A_{2,2}$, $A_{2,4}$ et $A_{2,3}$ de la seule façon possible. Il reste deux façons de remplir le tableau obtenu.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & & \\ 4 & 3 & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Remarque que toutes les affirmations sont toujours vraies, pas seulement dans l'exemple. Donc, quelque soit la façon de remplir la première rangée et la colonne contenant un 1, il reste toujours quatre façons de remplir le tableau. Il y a donc en tout $24 \cdot 6 \cdot 4 = 576$ façons de remplir un tableau 4×4 selon l'énoncé.

Exercice 5.

Peut-on arranger les nombres $1, 1, 2, 2, \ldots, 50, 50$ tels que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant 50$, entre les deux nombres k il y ait exactement k éléments.

Solution de l'exercice 5

La réponse est non. Supposons, par l'absurde, qu'on le peut. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant 50$, soit a_k un entier tel que a_k et $a_k + k + 1$ sont les positions des deux k. Évidemment, on a

$$\sum_{k=1}^{50} (a_k + a_k + k + 1) = 1 + 2 + \ldots + 100.$$

En regardant l'égalité précédente modulos 2, on doit avoir $51 \times 26 - 1 \equiv 50 \times 101 \pmod 2$ ce qui est faux.

Exercice 6.

Soient $n \geqslant 2$ un entier et X un ensemble à n éléments. Montrer que le nombre de fonctions $f : X \to X$ telles que $f \circ f$ soit une fonction constante est égale à

$$n \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} i^{n-i-1}.$$

Solution de l'exercice 6

Soit $f : X \to X$ telle que $f \circ f = c$ pour un $c \in X$. D'abord on a $f(c) = c$ parce que

$$f \circ f(c) = c \ \Rightarrow \ f \circ f \circ f(c) = f(c),$$

et selon la définition $f \circ f \circ f(c) = f \circ f(f(c)) = c$, ce qui nous donne $f(c) = c$. Posons l'ensemble

$$A = \{x \in X \mid f(x) = c\}.$$

On a montré qu'il contient c. Selon la définition, on a $f(x) \in A \setminus \{c\}$ pour tout $x \in A^c$ où A^c est le complémentaire de A.

Donc, pour déterminer toutes les fonctions $f : X \to X$ telles que $f \circ f$ est constante, on doit d'abord choisir un $c \in X$ (n manières de faire) puis un $A \subset X$ contenant c ($\binom{n-1}{i}$ manières de faire si $|A| = i + 1$) et ensuite choisir les valeurs $f(x)$ pour chaque $x \in A^c$ dans $A \setminus \{c\}$ (i^{n-i-1} manières de faire). Alors le nombre de telles fonctions sera

$$n \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} i^{n-i-1}.$$

Exercice 7.

Un constructeur de jouets crée au moins un jouet par jour. Il n'est pas capable de créer plus de 725 jouets par an. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe des jours consécutifs pendant lesquels il a créé exactement n jouets.

Solution de l'exercice 7

Soit $x_i \in \mathbb{N}$ le nombre de jouets qu'il a crée pendant le $i-$ème jour. Si

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n < 2n,$$

étudions les nombres suivants :

$$1 \leqslant x_1 < x_1 + x_2 < \ldots < x_1 + x_2 + \ldots + x_n < 2n.$$

On a deux cas. Soit ils représentent tous les résidus modulo n, soit il existe $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_i \equiv x_1 + x_2 + \ldots + x_j \pmod{n}.$$

Ce dernier cas nous donne

$$n \mid x_{i+1} + \ldots + x_j,$$

puis

$$x_{i+1} + \ldots + x_j = n.$$

Dans le premier cas, il existe $1 \leqslant j \leqslant n$ tel que

$$n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_j,$$

donc

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_j = n.$$

Dans les deux cas, le problème est résolu. Étudions maintenant ce qui se passe si, pour tous n jours consécutifs, le nombre total de jouets est plus grand que $2n$. Alors

$$2n \times 365 \leqslant \sum_{i=1}^{365n} x_i \leqslant 725n,$$

on aboutit à une contradiction.

Exercices du groupe A

Exercice 8.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ des ensembles de k éléments. Montrer que si $n < 2^{k-1}$ alors il existe des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ tels que :

$$a_i \in A_i, b_j \in B_j, a_i \neq b_j$$

pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Solution de l'exercice 8

Soit X l'union de tous les A_i et B_j pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et soit $m = |X|$. On veut montrer qu'il y a un coloriage des éléments de X en rouge et bleu telle que

— Aucun des $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ne soit totalement rouge,

— Aucun des $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ne soit totalement bleu.

Pour chaque A_i, le nombre de coloriages tels que A_i soit tout en rouge est égal 2^{m-k}. Donc, puisque $2n(2^{m-k}) < 2^m$, on aura un coloriage avec la propriété précédente. Avec un tel coloriage, on choisit chaque a_i parmi les éléments bleus de A_i et chaque b_j parmi les éléments rouges de B_j. Ce qui convient.

Exercice 9.

Soit n un entier positif. Montrer que dans un ensemble A de 2^n nombres strictement positifs, on peut choisir un sous-ensemble B de taille $n+1$ tel que la somme de deux nombres différents dans B ne soit jamais dans A.

Solution de l'exercice 9

Soient n et A comme dans l'énoncé. Nous allons montrer, par récurrence sur $m \leqslant n+1$, que l'algorithme glouton consistant à toujours prendre le plus grand nombre qui ne pose pas de problème convient.

Posons $A_0 = A$, et $B_0 = B$. Supposons que, pour $m < n+1$, on a construit A_m et B_m des sous-ensembles de A tels que :

1. la somme de deux éléments différents de B_m ne soit jamais dans A,
2. la somme d'un élément de A_m et d'un élément de B_m ne soit jamais dans A,
3. A_m et B_m sont disjoints,
4. $\operatorname{card}(A_m) \geqslant 2^n - 2^m + 1$ et
5. $\operatorname{card}(B_m) = m$.

Dans ce cas, A_m est non vide car $m \leqslant n$ donc $2^n - 2^m + 1 \geqslant 1$. Soit b_{m+1} le plus grand élément de A_m. On pose $B_{m+1} = B_m \cup \{b_{m+1}\}$. Par l'hypothèse 3 pour l'ordre m, on obtient 5 pour l'ordre $m+1$. De même, les hypothèses 1 et 2 nous donne 1 pour l'ordre supérieur. Maintenant, on pose

$$A_{m+1} = \{a \in A_m | a \neq b_{m+1} \text{ et } a + b_{m+1} \notin A\}.$$

Par définition, et par l'hypothèse 2, A_{m+1} vérifie 2 et 3. Le seul point moins évident est 4. Nous voulons montrer que $\operatorname{card}(A_m) - \operatorname{card}(A_{m+1}) \leqslant 2^m$. Or,

$$\begin{aligned} A_m \setminus A_{m+1} &= \{b_{m+1}\} \cup \{a \in A_m | a + b_{m+1} \in A\} \\ &\subset \{b_{m+1}\} \cup \{a \in A | a > b_{m+1}\} \\ &\subset \{b_{m+1}\} \cup (A \setminus A_m). \end{aligned}$$

Or ce dernier ensemble est de taille au plus $1 + (2^n - (2^n - 2^m + 1)) = 2^m$. Donc, $\operatorname{card}(A_m) - \operatorname{card}(A_{m+1}) \leqslant 2^m$, puis on obtient 4 à l'ordre $m+1$. Ce qui conclut la récurrence.

Maintenant, on applique la récurrence jusqu'à $m = n+1$ et on obtient un ensemble B_{n+1} de taille $n+1$ qui vérifie l'hypothèse 1, donc qui est bien solution de l'exercice.

Exercice 10.

On possède une liste infinie de cases, les cases étant numérotées par $1, 2, \ldots$. Au départ, toutes les cases contiennent le nombre 1. À chaque étape, on choisit un nombre $a \in \mathbb{N}^*$ tel que :

— soit toutes les cases numérotées par un multiple de a contiennent 1 auquel cas on remplace ces 1 par des 0,

— soit toutes les cases numérotées par un multiple de a contiennent 0 auquel cas on remplace ces 0 par des 1.

Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on peut faire en sorte que toutes les cases de numéro au plus n contiennent un 0 sauf la première case qui contient un 1.

Solution de l'exercice 10

Nous allons d'abord reformuler le problème. On se place dans $\mathbb{N}^*$. Si A, B sont deux ensembles (dans $\mathbb{N}^*$), on note

— $A \oplus B := A \cup B$ si $A \cap B = \emptyset$, sinon l'opération est interdite, et

— $A \ominus B := A \setminus B$ si $B \subset A$, sinon l'opération est interdite.

On ajoute la convention que $\oplus$ et $\ominus$ sont associatives à gauche, c'est-à-dire que les opérations sont effectuées de la gauche vers la droite. Par exemple, $\{1\} \oplus \{2\} \ominus \{1, 2\} = (\{1\} \oplus \{2\}) \ominus \{1, 2\} = \emptyset$, par contre $\{1\} \oplus \{1, 2\} \ominus \{1\}$ est interdit.

Le problème se reformule donc par : montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une formule commençant par $\mathbb{N}^*$, contenant que des ensembles de multiples d'entiers et utilisant les opérations $\oplus$ et $\ominus$ aboutissant à un ensemble E tel que $E \cap \{1, \ldots, n\} = \{1\}$. Pour montrer cela, nous allons utiliser un lemme, que nous démontrerons plus tard, et qui n'est rien d'autre qu'une variante améliorée du principe d'inclusion-exclusion.

Lemme : Si $m \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_m$ sont des ensembles, alors il existe une formule utilisant les opérations $\oplus$ et $\ominus$ et constituée uniquement d'intersections quelconques des ensembles $A_1, \ldots, A_m$ dont la valeur est $A_1 \cup \cdots \cup A_m$.

Par exemple, dans le cas $m = 2$, $A_1 \cup A_2 = A_1 \ominus (A_1 \cap A_2) \oplus A_2$.

Maintenant, notons $p_1, p_2, \ldots$ les nombres premiers dans l'ordre. Notons A_i l'ensemble des multiples (strictement positifs) de p_i, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Prenons $n \geqslant 2$ et soit m le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. D'après le lemme, il existe une formule dont la valeur est $A_1 \cup \cdots \cup A_m$. Or cette union est l'ensemble des nombres qui sont multiples d'au moins un nombre parmi $p_1, p_2, \ldots$ et p_m. Il contient donc tous les nombres inférieurs ou égaux à n sauf 1. En remplaçant les $\oplus$ par des $\ominus$ et vice-versa dans la formule et en ajoutant $\mathbb{N}^* \ominus$ devant, nous obtenons donc une formule autorisée dont la valeur vérifie ce que nous voulons. Il reste à ajouter pour conclure que, si $1 \leqslant l \leqslant m$ et si $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leqslant m$, alors $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_l}$ n'est rien d'autre que l'ensemble des multiples de $p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_l}$. Donc la formule que l'on a obtenue n'est constituée que d'ensembles de multiples d'entier et donc convient.

Montrons maintenant le lemme par récurrence sur m. Le cas $m = 1$ est trivial. De plus, nous avons traité le cas $m = 2$, pour l'exemple, ci-dessus. Soit $m \geqslant 2$ et supposons le théorème vrai pour m ensembles. Soient $A_1, \ldots, A_{m+1}$ $m+1$ ensembles. On a

$$A_1 \cup \cdots \cup A_{m+1} = A_1 \cup \cdots \cup A_m \ominus ((A_1 \cup \cdots \cup A_m) \cap A_{m+1}) \oplus A_{m+1}$$
$$A_1 \cup \cdots \cup A_{m+1} = A_1 \cup \cdots \cup A_m \ominus ((A_1 \cap A_{m+1}) \cup \cdots \cup (A_m \cap A_{m+1})) \oplus A_{m+1}$$

Par hypothèse de récurrence, il existe une formule pour le deuxième terme constituée uniquement d'intersections quelconques de $A_1 \cap A_{m+1}, \ldots, A_m \cap A_{m+1}$; donc uniquement d'intersections quelconques de $A_1, \ldots, A_{m+1}$. Maintenant, on peut insérer la formule du deuxième terme dans la grosse formule en remplaçant, dans la formule du deuxième terme, les $\oplus$ par des $\ominus$ et vice-versa. En remplaçant directement le premier terme par la formule obtenue par l'hypothèse de récurrence, on obtient la formule voulue.
On conclut la preuve du lemme par récurrence.