Olympiades Françaises de Mathématiques 2016-2017

Envoi Numéro 3

À renvoyer au plus tard le 15 Janvier

Les consignes suivantes sont à lire attentivement:

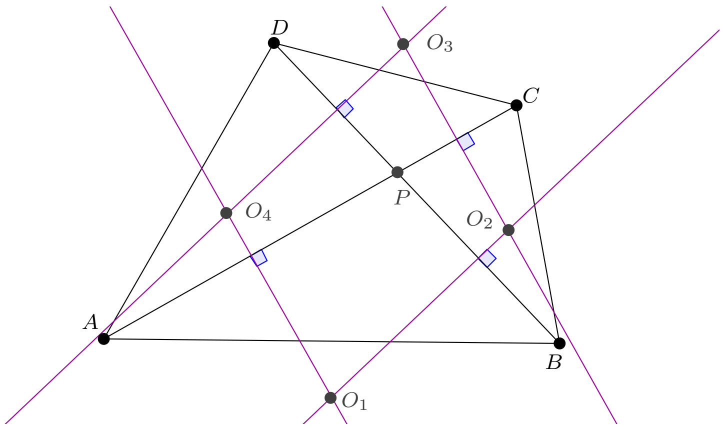
Le groupe B est constitué des élèves nés en 2002 ou après, avec les exceptions suivantes :
* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2015-2016 sont dans le groupe A.

Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés Groupe Bne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés communs sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés Groupe A ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

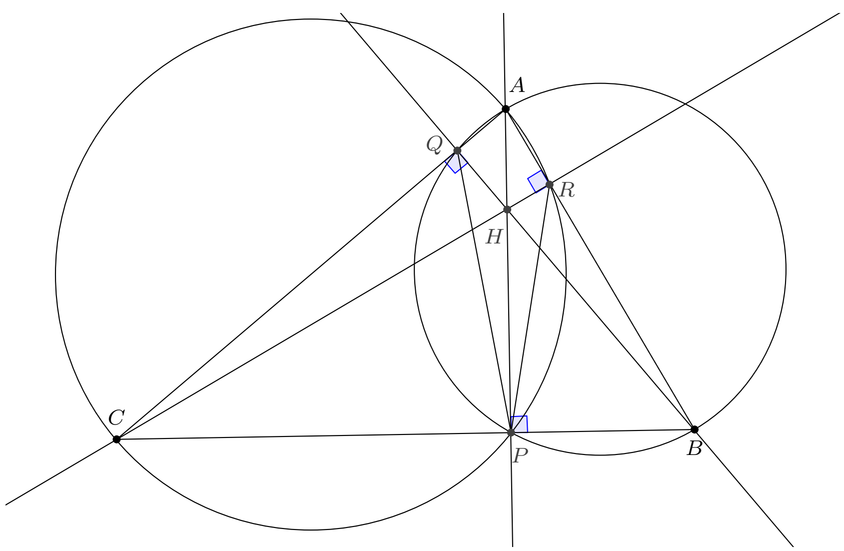
Exercices du groupe B

Exercice 1. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe (c'est-à-dire que ses diagonales sont à l'intérieur de $ABCD$), et P l'intersection de ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$. On note O_1, O_2, O_3 et O_4 les centres des cercles circonscrits à ABP, BCP, CDP et DAP.
Montrer que $O_1O_2O_3O_4$ est un parallélogramme.



Solution de l'exercice 1 O_1 et O_2 sont sur la médiatrice de $[PB]$, donc O_1O_2 est la médiatrice de $[PB]$. De même, (O_3O_4) est la médiatrice de $[PD]$, donc (O_1O_2) et (O_3O_4) sont toutes deux perpendiculaires à (BD), donc elles sont parallèles. De même, (O_2O_3) et (O_4O_1) sont toutes deux perpendiculaires à (AC), donc elles sont parallèles.
$ABCD$ a ses côtés opposés parallèles deux à deux, donc c'est un parallélogramme.

Exercice 2. Soit ABC un triangle. H son orthocentre et P, Q et R les pieds des hauteurs issues de A, B et C.
Montrer que H est le centre du cercle inscrit à PQR.



Solution de l'exercice 2 On sait que les points A, B, P et Q sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[AB]$, donc :

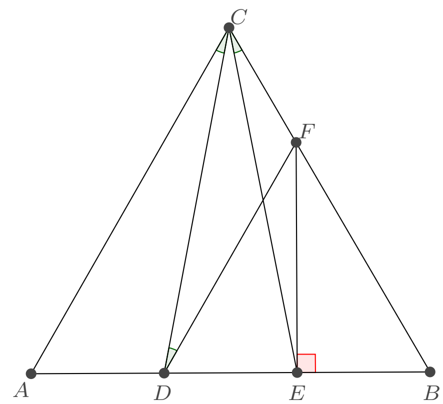
$$\widehat{HPQ} = \widehat{APQ} = \widehat{ABQ} = 90 - \widehat{BAQ} = 90 - \widehat{BAC}$$

De même, A, C, P et R sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[AC]$ donc :

$$\widehat{HPR} = \widehat{APR} = \widehat{ACR} = 90 - \widehat{CAR} = 90 - \widehat{BAC}$$

On a donc $\widehat{HPQ} = \widehat{HPR}$ donc (PH) est la bissectrice de $\widehat{QPR}$. On montre de même que (QH) et (RH) sont les bissectrices de $\widehat{PQR}$ et $\widehat{PRQ}$, donc H est le centre du cercle inscrit à PQR.

Exercice 3. Les points D et E divisent le côté $[AB]$ d'un triangle équilatéral en trois parties égales, de telle manière que D est situé entre A et E. Le point F est situé sur $[BC]$ de sorte que $CF = AD$.
Calculer la somme des angles $\widehat{CDF} + \widehat{CEF}$.



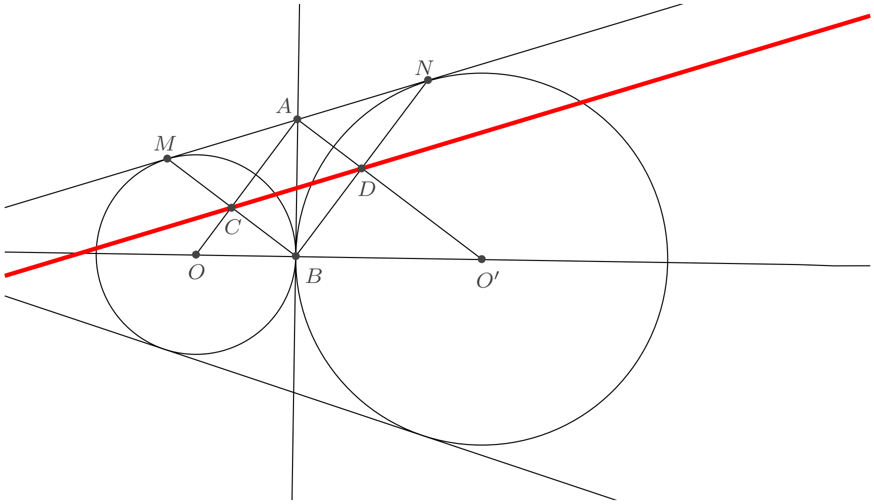
Solution de l'exercice 3 On a $BF = BD$ et $\widehat{DBF} = 60°$, donc le triangle DBF est équilatéral. On a donc $\widehat{BAC} = \widehat{BDF} = 60°$ donc $(DF) \parallel (AC)$, donc $\widehat{CDF} = \widehat{ACD}$.
D'autre part, $\widehat{ACD} = \widehat{BCE}$ par symétrie, donc $\widehat{CDF} = \widehat{BCE} = \widehat{FCE}$. La somme qui nous intéresse vaut donc $\widehat{FCE} + \widehat{CEF} = \widehat{BFE}$ d'après la somme des angles du triangle FCE. Comme (FE) est une médiane du triangle équilatéral DBF, c'est aussi une bissectrice, donc $\widehat{BFE} = \frac{1}{2}\widehat{BFD} = 30°$ et notre somme est égale à 30°.

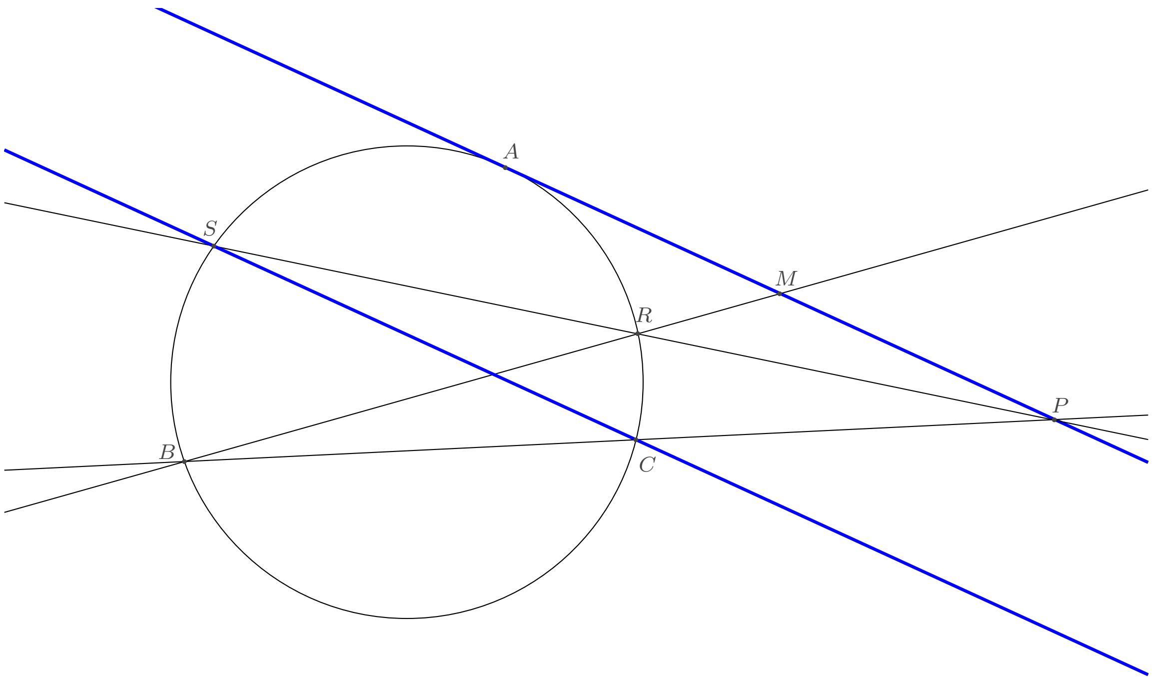
Exercices communs

Exercice 4. Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres O et O' sont tangents extérieurement en B. Une tangente commune extérieure touche $\mathcal{C}$ en M et $\mathcal{C}'$ en N. La tangente commune à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en B coupe (MN) en A. On note C l'intersection de (OA) et (BM), et D l'intersection de $(O'A)$ et (BN).
Montrer que (CD) est parallèle à (MN).

Solution de l'exercice 4 Comme (AM) et (AB) sont tangents au cercle de centre O, on a $AM = AB$. On a aussi $OM = OB$, donc (OA) est la médiatrice de $[MB]$, et donc C est le milieu de $[MB]$. De même, D est le milieu de $[BN]$, donc (CD) est parallèle à (MN).

Exercice 5. Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus et Γ son cercle circonscrit. La tangente à Γ en A recoupe (BC) en P. On note M le milieu de $[AP]$. La droite (BM) recoupe Γ en R et la droite (PR) recoupe Γ en S.
Montrer que (AP) et (CS) sont parallèles.





<u>*Solution de l'exercice 5*</u> En écrivant la puissance de M par rapport à Γ puis le fait que M est le milieu de $[AP]$, on obtient

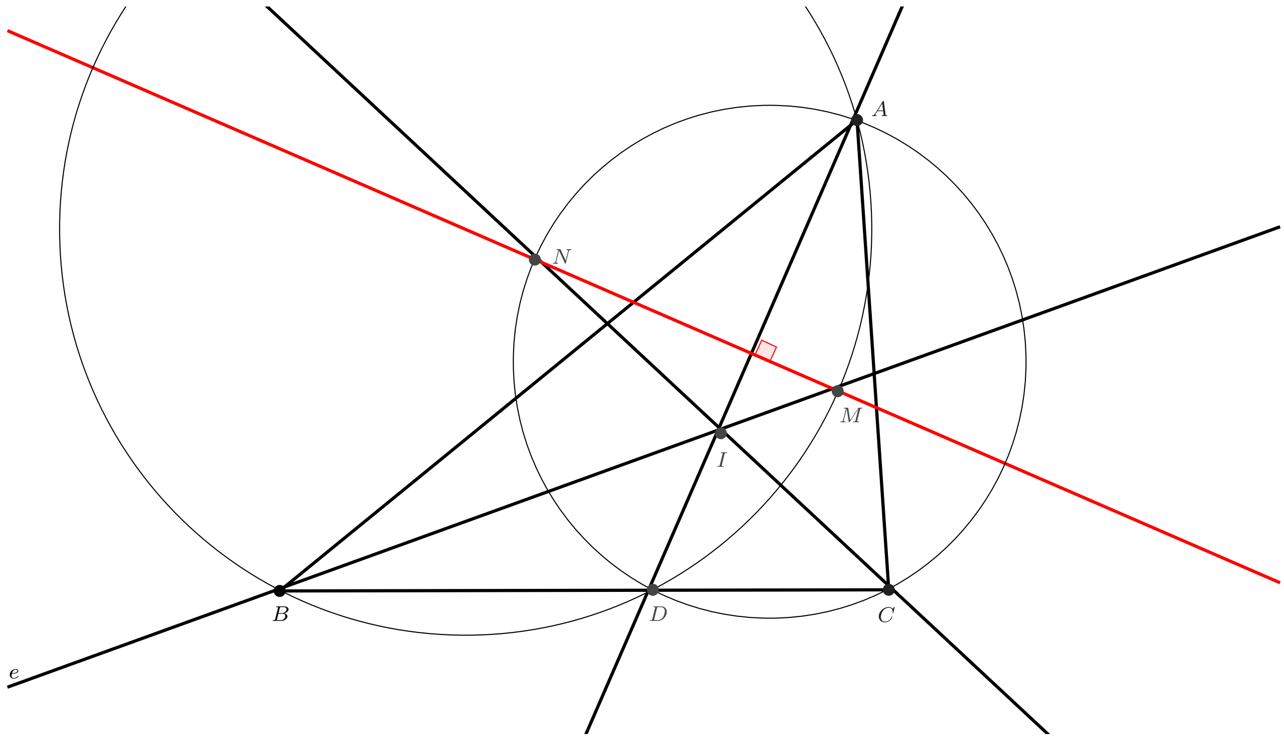
$$MR \times MB = MA^2 = MP^2.$$

Les triangles MRP et MPB sont donc indirectement semblables, donc $\widehat{RPM} = \widehat{PBM}$. On a donc

$$\begin{aligned} \widehat{CSP} &= \widehat{CSR} \\ &= \widehat{CBR} \\ &= \widehat{PBM} \\ &= \widehat{RPM} \\ &= \widehat{SPA}, \end{aligned}$$

où $\widehat{CSR} = \widehat{CBR}$ par le théorème de l'angle inscrit. Par angles alternes-internes, les droites (CS) et (AP) sont donc parallèles.

Exercice 6. Soit ABC un triangle et (I) le centre de son cercle inscrit. La droite (AI) recoupe $[BC]$ en D. La médiatrice de $[AD]$ recoupe (BI) en M et (CI) en N.
Montrer que A, M, N et I sont cocycliques.



Solution de l'exercice 6 On commence par rappeler le théorème du Pôle Sud :

Lemme 1 (Théorème du Pôle Sud)**.** Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit et I le centre de son cercle inscrit. Soit S le second point d'intersection de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ avec Γ. Alors $SB = SC$. Le point S est appelé *Pôle Sud* de A dans le triangle ABC.

Preuve du lemme. Le théorème de l'angle inscrit dans Γ donne $\widehat{SBC} = \widehat{SAC}$ et $\widehat{SCB} = \widehat{SAB}$. Or, comme S est sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$ on a $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$, d'où $\widehat{SBC} = \widehat{SCB}$, donc SCB est isocèle en S et $SB = SC$. $\square$

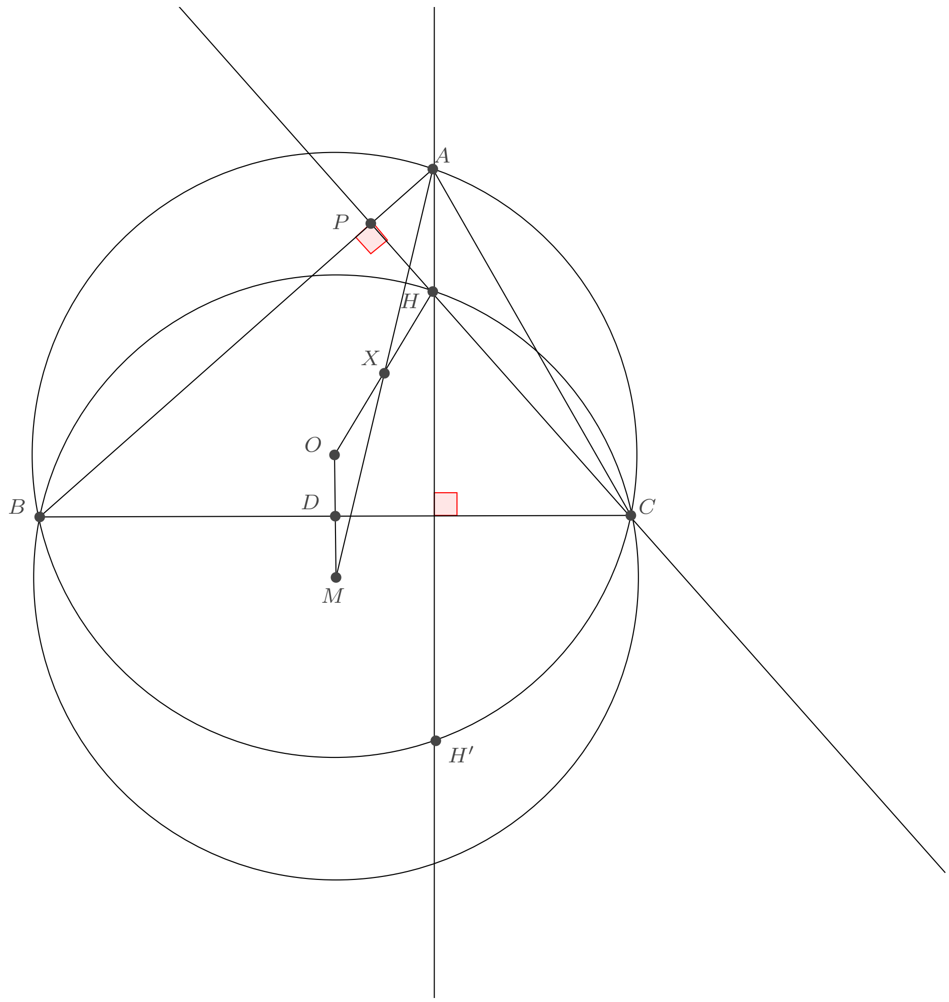
Revenons à notre exercice. Notons que le pôle Sud de A dans un triangle ABC est sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et sur la médiatrice de $[BC]$, donc il peut être défini comme l'intersection de ces deux droites. On commence par montrer que A, B, D et M sont cocycliques. Le point M est sur la médiatrice de $[AD]$ et sur la bissectrice de $\widehat{ABD}$. C'est donc le pôle Sud de B dans ABD, donc il est sur le cercle circonscrit à ABD. De même, les points A, C, D et N sont cocycliques. On peut maintenant faire une chasse aux angles :

$$\widehat{AMI} = \widehat{AMB} = \widehat{ADB} = 180° - \widehat{ADC} = 180° - \widehat{ANC} = 180° - \widehat{ANI}.$$

Les points A, I, M et N sont donc cocycliques.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit ABC un triangle dont l'orthocentre H est distinct des sommets ainsi que du centre du cercle circonscrit O. On désigne par M, N, P les centres des cercles circonscrits aux triangles HBC, HCA et HAB.
Montrer que les droites $(AM), (BN), (CP)$ et (OH) sont concourantes.



<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC). On sait que H' est sur le cercle circonscrit à ABC (il est facile de vérifier $\widehat{BH'C} = \widehat{BHC} = 180° - \widehat{BAC}$). Le centre du cercle circonscrit à $H'BC$ est donc 0. Par symétrie par rapport à (BC), le centre du cercle circonscrit à BHC est donc le symétrique de 0 par rapport à (BC), donc M est le symétrique de O par rapport à (BC).
On va maintenant montrer que $AHMO$ est un parallélogramme. Si c'est bien vrai, alors $[AM]$ et $[OH]$ se coupent en leur milieu, donc le milieu de $[OH]$ est sur (AM) et, par le même raisonnement, il est aussi sur (BN) et (CP). Si on note D le milieu de $[BC]$, alors $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$, donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AH}$. En utilisant la relation $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$, qui est équivalente à $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (droite d'Euler).
On donne également une autre manière, moins rapide mais nécessitant moins de connaissances, de montrer que $AHMO$ est un parallélogramme. Les droites (AH) et (OM) sont parallèles, donc il suffit de montrer que $AH = OM$. Pour cela, on peut utiliser la trigonométrie. D'une part, en notant R le rayon

du cercle circonscrit à ABC et α, β, γ ses angles, on a

$$OM = 2OD = 2OB \sin \widehat{OBC} = 2R \sin (90° - \alpha) = 2R \cos \alpha.$$

D'autre part, en notant P le pied de la hauteur issue de C, on a

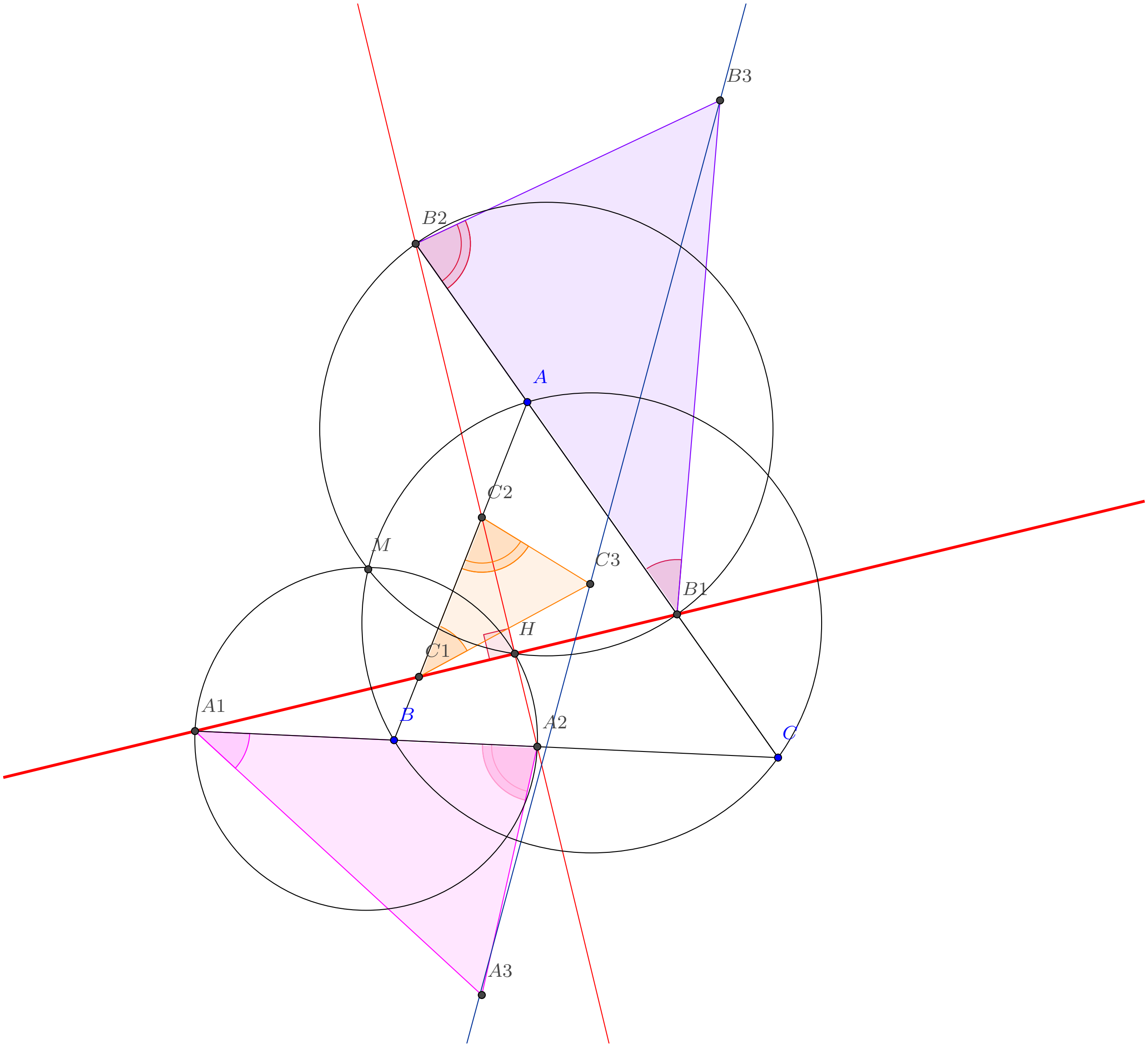
$$AH = \frac{AP}{\cos \widehat{PAH}} = \frac{AP}{\sin \beta} = \frac{AC \sin \widehat{ACP}}{\sin \beta} = 2R \sin \widehat{ACP} = 2R \sin (90° - \alpha) = 2R \cos \alpha$$

en utilisant la loi des sinus.

Exercice 8. Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus. Soit $D \in [BC]$ tel que $\widehat{BAC} = \widehat{ADB}$. Soit H le pied de la hauteur issue de B dans ABC. La perpendiculaire à (BC) passant par H coupe (AD) en K. On suppose que K est à l'intérieur du triangle ABC. Soit M le milieu de $[AC]$.
Montrer que $MH = MK$.

Solution de l'exercice 8 Notons que $\widehat{ABH} = 90° - \widehat{BAC} = 90° - \widehat{ADB} = \widehat{AKH}$. Les points A, B, K, H sont donc cocycliques. Soit T le pied de la hauteur issue de A dans ABC. Alors $\widehat{BTA} = \widehat{BHA} = 90°$ donc A, B, H et T sont cocyliques et le cercle qui passe par ces points passe aussi par K. On en déduit $\widehat{ATK} = 180° - \widehat{AHK} = \widehat{KHC}$.
On va maintenant montrer que M, K et T sont alignés. On a $(AT) \parallel (HK)$ car ces deux droites sont perpendiculaires à (BC), donc $\widehat{ATK} = \widehat{KHC} = \widehat{TAC}$. Mais le triangle ATC est rectangle en T donc $MA = MC = MT$ et $\widehat{TAM} = \widehat{ATM}$. On en déduit $\widehat{ATM} = \widehat{ATK}$ donc T, K et M sont alignés. Enfin, $MH = MK$ parce que $AT \parallel HK$ et $MA = MT$.

Exercice 9. Soit ABC un triangle d'orthocentre H. Soient (d_1) et (d_2) deux droites perpendiculaires se coupant en H. Soit A_1 (respectivement B_1, C_1) l'intersection de (d_1) avec (BC) (respectivement (CA), (AB)). Soit A_2 (respectivement B_2, C_2) l'intersection de (d_2) avec (BC) (respectivement (CA), (AB)). Soient A_3, B_3, C_3 des points dans le plan tels que $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ soient des triangles directement semblables.
Montrer que A_3, B_3, C_3 sont alignés.



Solution de l'exercice 9 Nous donnons une preuve avec des similitudes directes. Il existe d'autres preuves, un peu plus courtes, qui utilisent des nombres complexes.
Rappelons tout d'abord le résultat suivant :

Lemme 2. Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit et H son orthocentre. Alors les symétriques H_A, H_B et H_C de H par rapport à (BC), (CA) et (AB) appartiennent à Γ.

Proof. Soit H'_A l'intersection de AH et Γ. Par le théorème de l'angle inscrit, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{H'_ABC} &= \widehat{H'_AAC} \\ &= 90 - \widehat{BCA} \\ &= \widehat{HBC}\end{aligned}$$

Ainsi, (H'_AB) et (HB) sont symétriques par rapport à (BC). On en déduit que $H'_A = H_A \in \Gamma$. De même $H_B, H_C \in \Gamma$. □

Reprenons les notations de l'exercice et introduisons H_A, H_B et H_C comme dans le lemme précédent.

Lemme 3. Soit S l'intersection de (A_1H_A) et de (B_1H_B). Alors $S \in \Gamma$.

Proof. On note $\mathcal{S}_{\mathcal{YZ}}$ la symétrie d'axe (YZ). Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mathcal{AC}}(\mathcal{S}_{\mathcal{BC}}(H_A A_1)) &= \mathcal{S}_{\mathcal{AC}}(A_1 H) \text{ car } H_A \text{ et } H \text{ sont symétriques par rapport à } (BC)\\
&= \mathcal{S}_{\mathcal{AC}}(B_1 H)\\
&= (H_B B_1) \text{ car } H \text{ et } H_B \text{ sont symétriques par rapport à } (AC).
\end{aligned}$$

Notons (XY,ZW) l'angle de droite formé par les droites XY et ZW. De la proposition 1, on déduit que $(H_A A_1)$ et $(H_B B_1)$ sont images l'une de l'autre par la rotation d'angle $2\cdot(CB, CA)$ de centre C : $(SH_A, SH_B) = 2\cdot(CB, CA)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(SH_A, SH_B) &\equiv 2\cdot(CB, CA)\\
&\equiv (CB, CA) + (CB, CH) + (CH, CA)\\
&\equiv (CB, CA) + (CH_A, CB) + \frac{\pi}{2} - (AC, AB)\\
&\equiv (CH_A, CA) + (BA, BH)\\
&\equiv (BH_A, BA) + (BA, BH_B)\\
&\equiv (BH_A, BH_B)[\pi].
\end{aligned}$$

Ainsi, $S \in \Gamma$. □

Lemme 4. Les cercles de diamètre $[A_1A_2], [B_1B_2], [C_1C_2]$ sont concourants en un point M appartenant à Γ.

Proof. Soit M' le point d'intersection des cercles de diamètre $[A_1A_2]$ (passant donc par H et H_A) et $[B_1B_2]$ (passant donc par H et H_B) différent de H. On a :

$$\begin{aligned}
(M'H_A, M'H_B) &\equiv (M'H_A, M'H) + (M'H, M'H_B)\\
&\equiv (A_1H_A, A_1H) + (B_1H, B_1H_B)\\
&\equiv 2\cdot(A_1B, A_1H) + 2\cdot(B_1H, B_1A)\\
&\equiv 2\cdot\left(\frac{\pi}{2} + (HH_A, HA_1)\right) + 2\cdot(HB_2, HH_B)\\
&\equiv 2\cdot(HH_A, HA_1) + 2\cdot\frac{\pi}{2} + 2\cdot(HB_2, HH_B)\\
&\equiv 2\cdot(HH_A, HH_B)\\
&\equiv 2\cdot(CB, CA)\\
&\equiv (SH_A, SH_B)\ [\pi].
\end{aligned}$$

Ainsi, $M' \in \Gamma$ par le théorème de l'angle inscrit. De la même façon, on montre que l'intersection des cercles de diamètre $[B_1B_2]$ et $[C_1C_2]$ est un point $M'' \in \Gamma$. Comme l'intersection du cercle de diamètre $[B_1B_2]$ et de Γ est unique, on en déduit que $M' = M'' = M$, c'est-à-dire que les quatre cercles sont concourants en M. □

Nous pouvouns maintenant terminer l'exercice :

$$\begin{aligned}
(C_1M, C_1C_2) &\equiv (HM, HC_2) \quad \text{car } M, C_1, H, C_2 \text{ sont cocycliques}\\
&\equiv (HM, HB_2)\\
&\equiv (B_1M, B_1B_2)\ [\pi] \quad \text{car } M, B_1, H, B_2 \text{ cocycliques.}
\end{aligned}$$

De la même façon, on prouve que $(B_1M, B_1B_2) \equiv (C_1M, C_1C_2)$. Donc, comme $(MA_1, MA_2) \equiv (MB_1, MC_2) \equiv (MC_1, MC_2) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on obtient que MA_1A_2, MB_1B_2 et MC_1C_2 sont directement semblables, ce que l'on notera désormais $MA_1A_2 \sim MB_1B_2 \sim MC_1C_2$. En outre, $A_1A_2A_3 \sim B_1B_2B_3 \sim C_1C_2C_3$ par hypothèse. Donc $MA_1A_2A_3 \sim MB_1B_2B_3 \sim MC_1C_2C_3$.

L'utilisation de similitudes directes permet alors de conclure directement : une similitude directe $\mathcal{S}$ de centre M envoie A_1 sur A_3, et également B_1 sur B_3 et C_1 sur C_3. Comme A_1, B_1 et C_1 sont alignés, on en déduit que A_3, B_3 et C_3 le sont également.

Fin