Olympiades Françaises de Mathématiques 2016-2017

Envoi Numéro 2 – Algèbre

À renvoyer au plus tard le jeudi 15 décembre

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2002 ou après, avec les exceptions suivantes :

- les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
- les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2015-2016 sont dans le groupe A.

Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1.

Déterminer la valeur minimale de

$$\left\lfloor \frac{a+b+c}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c+d}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c+d+a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d+a+b}{c} \right\rfloor$$

lorsque a, b, c, d décrivent $\mathbb{N}^*$.

Exercice 2.

Soit m et n des entiers naturels non nuls. Prouver que

$$\frac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}} < \frac{m!}{m^m} \frac{n!}{n^n}.$$

Exercice 3.

Soit $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs. Prouver qu'il existe un unique entier $n \geqslant 1$ tel que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

Exercices communs

Exercice 4.

Déterminer tous les entiers $n \geqslant 3$ pour lesquels il existe n polynômes $P_1, \ldots, P_n$ à coefficients réels et tels que, pour tous i, j, k distincts : $P_i + P_j$ n'a aucune racine réelle et $P_i + P_j + P_k$ admet au moins une racine réelle.

Exercice 5.

a) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ telles que

$$f(f(y)-x)^2 + f(x)^2 + f(y)^2 = f(y)(1 + 2f(f(y)))$$

pour tous réels x et y.

b) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(f(y)-x)^2 + f(x)^2 + f(y)^2 = f(y)(1 + 2f(f(y)))$$

pour tous réels x et y.

Exercice 6.

a) Soit $x_1 \geqslant x_2 > 0$ et $y_1 \geqslant y_2 > 0$ des réels tels que

$$x_1 \geqslant y_1 \text{ et } x_1x_2 \geqslant y_1y_2.$$

Prouver que

$$x_1 + x_2 \geqslant y_1 + y_2.$$

b) Soit $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n > 0$ et $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n > 0$ des réels tels que

$$x_1x_2\cdots x_i \geqslant y_1y_2\cdots y_i \text{ pour } i = 1, \ldots, n.$$

Prouver que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

Exercices du groupe A

Exercice 7.

Soit a_0 et b_0 des entiers strictement positifs. Pour tout $i \geqslant 0$, on pose

$$a_{i+1} = a_i + \lfloor \sqrt{b_i} \rfloor \text{ et } b_{i+1} = b_i + \lfloor \sqrt{a_i} \rfloor.$$

Prouver qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $a_n = b_n$.

Exercice 8.

Un polynôme est dit « unitaire » si le coefficient de son monôme de plus haut de degré vaut 1. Soit $a < b$ des réels, et soit P un polynôme unitaire non constant tel que $\max_{x\in[a,b]} |P(x)| < 2$.

Prouver qu'il existe un polynôme Q, unitaire et non constant, tel que $\max_{x\in[a,b]} |Q(x)| < \frac{1}{2017}$.

Exercice 9.

a) Prouver qu'il existe des entiers a, b, c tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $|a|, |b|, |c| < 10^6$ pour lesquels

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}.$$

b) Soit a, b, c des entiers tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $|a|, |b|, |c| < 10^6$. Prouver que

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| > 10^{-21}.$$