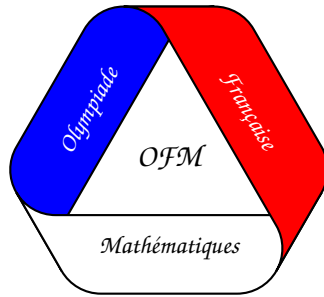


Olympiades Françaises de Mathématiques 2016-2017



Solutions à l'envoi Numéro 2 – Algèbre

Exercices du groupe B

Exercice 1.

Déterminer la valeur minimale de

$$\left\lfloor \frac{a+b+c}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c+d}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c+d+a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d+a+b}{c} \right\rfloor$$

lorsque a, b, c, d décrivent \mathbb{N}^* .

Solution de l'exercice 1

Le minimum cherché est 9.

En effet, si a, b, c, d sont des entiers naturels non nuls, on pose

$$f(a, b, c, d) = \left\lfloor \frac{a+b+c}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c+d}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c+d+a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d+a+b}{c} \right\rfloor.$$

On rappelle que, pour tout réel x , on a $\lfloor x \rfloor > x - 1$. Ainsi, pour tous entiers $a, b, c, d > 0$, on a

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) + 4 &> \frac{a+b+c}{d} + \frac{b+c+d}{a} + \frac{c+d+a}{b} + \frac{d+a+b}{c} \\ &> \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{b}{d} + \frac{d}{b} \right) + \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c} \right) \\ &> 6 \times 2 \text{ car } t + \frac{1}{t} \geq 2 \text{ pour tout réel } t > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(a, b, c, d) > 8$. Or, $f(a, b, c, d)$ étant clairement un entier, c'est donc que $f(a, b, c, d) \geq 9$. Il reste à vérifier que $f(5, 5, 5, 4) = 9$ pour conclure.

Exercice 2.

Soit m et n des entiers naturels non nuls. Prouver que

$$\frac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}} < \frac{m!}{m^m} \frac{n!}{n^n}.$$

Solution de l'exercice 2

D'après la formule du binôme, on a

$$(m+n)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} m^k n^{m+n-k}.$$

Le membre de droite étant une somme de $m+n+1$ nombres strictement positifs, elle est strictement plus grande que n'importe lequel de ces nombres. En particulier, pour $k=m$, on a donc

$$(m+n)^{m+n} > \binom{m+n}{m} m^m n^n.$$

Puisque $\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$, cela conclut.

Remarque L'inégalité demandée peut s'interpréter en termes probabilistes. En effet, considérons une urne contenant m boules blanches et n boules noires indiscernables au toucher, et de laquelle on tire successivement $m+n$ boules avec remise. Il est facile de vérifier que la probabilité p_m d'obtenir exactement m boules blanches au cours de ces $m+n$ tirages est

$$p_m = \binom{m+n}{m} \left(\frac{m}{m+n}\right)^m \left(\frac{n}{m+n}\right)^n.$$

Si on note q_m la probabilité de ne pas obtenir exactement m boules blanches, on a $q_m > 0$ et $p_m + q_m = 1$, d'où $p_m = 1 - q_m < 1$.

Exercice 3.

Soit $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs. Prouver qu'il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Solution de l'exercice 3

Pour $n \geq 1$, on pose $d_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n - na_n$.

Clairement, l'inégalité de gauche de l'encadrement souhaité est équivalente à $d_n > 0$. D'autre part, on a $d_{n+1} = a_0 + \dots + a_n - na_{n+1}$, donc l'inégalité de droite est équivalente à $d_{n+1} \leq 0$. Il s'agit donc de prouver qu'il existe un unique $n \geq 1$ tel que $d_{n+1} \leq 0 < d_n$, ce qui nous pousse naturellement à étudier les variations de la suite (d_i) .

Pour tout $n \geq 1$, on a $d_{n+1} - d_n = n(a_n - a_{n+1}) < 0$ car la suite (a_i) est strictement croissante. De plus, on a $d_1 = a_0 > 0$.

Ainsi, la suite (d_i) est une suite strictement décroissante d'entiers, ce qui assure qu'elle ne prendra des valeurs négatives ou nulles qu'à partir d'un certain rang, et de premier terme strictement positif. Il existe donc bien un unique indice n pour lequel $d_{n+1} \leq 0 < d_n$, à savoir le plus grand entier tel que $d_n > 0$.

Remarque La conclusion n'est plus assurée sans l'hypothèse que les a_i sont tous des entiers. Un contre-exemple est donné par $a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \geq 0$.

Exercices communs

Exercice 4.

Déterminer tous les entiers $n \geq 3$ pour lesquels il existe n polynômes P_1, \dots, P_n à coefficients réels et tels que, pour tous i, j, k distincts : $P_i + P_j$ n'a aucune racine réelle et $P_i + P_j + P_k$ admet au moins une racine réelle.

Solution de l'exercice 4

Prouvons que seul $n = 3$ a la propriété désirée.

Tout d'abord, en posant $P_1(x) = 3x^2 + 3$ et $P_2(x) = P_3(x) = -x^2 - 2$, on vérifie aisément que les polynômes $P_1(x) + P_2(x) = P_1(x) + P_3(x) = 2x^2 + 1$ et $P_2(x) + P_3(x) = -2x^2 - 4$ n'ont aucune racine réelle, tandis que $P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) = x^2 - 1$ admet 1 et -1 comme racines. Ainsi, $n = 3$ est une solution du problème.

Remarquons maintenant que si $n \geq 4$ polynômes P_1, \dots, P_n vérifient les conditions requises, alors P_1, P_2, P_3 et P_4 vérifient déjà ces conditions. Pour conclure, il suffit donc de prouver que $n = 4$ n'est pas une solution.

La clé est alors de noter que si P et Q sont des polynômes tels que $P + Q$ n'a pas de racine réelle, alors $P + Q$ garde un signe constant sur \mathbb{R} .

On procède donc par l'absurde : supposons que P_1, P_2, P_3 et P_4 soient des polynômes tels que, pour tous i, j, k distincts, $P_i + P_j$ n'a aucune racine réelle et $P_i + P_j + P_k$ admet au moins une racine réelle.

Traçons alors le graphe complet dont les sommets sont les polynômes P_1, P_2, P_3, P_4 et colorons l'arête $P_i P_j$ en rouge si $P_i + P_j$ est strictement positif, et en vert si $P_i + P_j$ est strictement négatif. Chaque arête est nécessairement colorée. De plus, ce graphe ne peut contenir de triangles dont les trois arêtes sont de la même couleur, ce sans quoi la somme des trois polynômes qui sont les sommets de ce triangle n'aurait pas de racine réelle.

Quitte à changer chaque P_i en $-P_i$, on peut supposer que deux des trois arêtes issues de P_1 sont rouges et, quitte à renuméroter, on peut supposer que $P_1 P_2$ et $P_1 P_4$ sont rouges. Pour éviter le triangle rouge $P_1 P_2 P_4$, c'est donc que $P_2 P_4$ est verte. Puisque $P_2 P_3 P_4$ ne peut avoir ses trois arêtes vertes, c'est donc que $P_2 P_3$ ou $P_4 P_3$ est rouge. Par symétrie des rôles, on peut supposer que $P_2 P_3$ est rouge. Mais alors $P_1 P_3$ est verte.

Ainsi, pour tout réel x , on a simultanément

$$P_1(x) + P_4(x) > 0 \text{ et } P_2(x) + P_3(x) > 0, \text{ donc } P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) + P_4(x) > 0, \text{ et}$$

$$P_1(x) + P_3(x) < 0 \text{ et } P_2(x) + P_4(x) < 0, \text{ donc } P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) + P_4(x) < 0,$$

ce qui est absurde. Ainsi, $n = 4$ n'est pas une solution, ce qui conclut.

Exercice 5.

a) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que

$$f(f(y) - x)^2 + f(x)^2 + f(y)^2 = f(y)(1 + 2f(f(y)))$$

pour tous réels x et y .

b) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(f(y) - x)^2 + f(x)^2 + f(y)^2 = f(y)(1 + 2f(f(y)))$$

pour tous réels x et y .

Solution de l'exercice 5

a) Soit f une éventuelle solution du problème. Notons $P(x, y)$ l'égalité de l'énoncé pour les valeurs x et y . On pose $c = f(0)$.

Pour tout x , de $P(0, x)$ on déduit que $f(f(x))^2 + c^2 + f(x)^2 = f(x) + 2f(f(x))f(x)$, d'où $f(x) = c^2 + (f(f(x)) - f(x))^2$. Il s'ensuit que $f(x) \geq c^2 \geq 0$.

Pour $x = 0$, cela donne $c = c^2 + (f(c) - c)^2$, d'où $c(1 - c) = (f(c) - c)^2 \geq 0$. Puisque c est un entier, il vient $c = 0$ ou $c = 1$. Dans les deux cas, cela montre que $f(c) - c = 0$. Ainsi, on sait que $f(c) = c$.

Enfin, pour tout x , de $P(x, 0)$ on déduit que

$$f(c - x)^2 + f(x)^2 + c^2 = c(1 + 2c).$$

— Si $c = 0$, l'égalité ci-dessus se réécrit comme $f(-x)^2 + f(x)^2 = 0$, donc $f(x) = 0$.

— Si $c = 1$, elle se réécrit comme $f(1 - x)^2 + f(x)^2 = 2$. Or, $f(1 - x)$ et $f(x)$ sont entiers naturels, donc $f(x) = f(1 - x) = 1$.

Réciproquement, les fonctions $f : x \mapsto 0$ et $f : x \mapsto 1$ sont clairement solutions du problème.

b) Soit f une éventuelle solution du problème. Notons $P(x, y)$ l'égalité de l'énoncé pour les valeurs x et y . On pose $c = f(0)$, $d = f(c)$ et $\mathcal{F} = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, de $P(0, x)$ on déduit que $f(f(x))^2 + c^2 + f(x)^2 = f(x) + 2f(f(x))f(x)$, d'où $f(x) = c^2 + (f(f(x)) - f(x))^2$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathcal{F}$, on a $x \geq c^2 \geq 0$ et $f(x) = x \pm \sqrt{x - c^2}$.

Il s'ensuit que $c \geq c^2$, c'est-à-dire que $c(1 - c) \geq 0$, donc que $0 \leq c \leq 1$. On procède alors par l'absurde, et on suppose que $0 < c < 1$.

Par inégalité arithmético-géométrique, il vient $0 < c(1 - c) \leq \left(\frac{c + 1 - c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

D'autre part, de manière générale, pour tout réel $x \in]0; 1[$, on sait que $x < \sqrt{x}$.

Or, on a prouvé ci-dessus que $d = c + \epsilon\sqrt{c - c^2}$, avec $\epsilon = \pm 1$. Si $\epsilon = -1$, alors $d - c^2 = (c - c^2) - \sqrt{c - c^2} < 0$, ce qui est impossible. Il vient donc $\epsilon = 1$, et $d = c + \sqrt{c - c^2}$.

Puis on trouve $f(d) = d + \epsilon\sqrt{d - c^2}$, avec $\epsilon = \pm 1$. Observons que

$$0 < c - c^2 \leq d - c^2 \leq (c - c^2) + \sqrt{c - c^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1.$$

Par conséquent, si $\epsilon = -1$, alors $f(d) - c^2 = (d - c^2) - \sqrt{d - c^2} < 0$, ce qui est encore une fois impossible. Il vient donc $\epsilon = 1$, et $f(d) = d + \sqrt{d - c^2}$.

Enfin, $P(d, 0)$ indique que

$$\begin{aligned} 0 &= f(c - d)^2 + f(d)^2 + c^2 - c(1 + 2d) = f(c - d)^2 + \left(d + \sqrt{d - c^2}\right)^2 + c^2 - c(1 + 2d) \\ &\geq c^4 + d^2 + d - c^2 + c^2 - c(1 + 2d) = c^4 + (d - c)^2 + (d - c) - c^2 \\ &\geq c^4 + c - c^2 + \sqrt{c - c^2} - c^2 \geq c^4 + c - c^2 + c - c^2 - c^2 = c(c - 1)^2(c + 2), \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Il s'ensuit que $c = 0$ ou $c = 1$, donc que $c = c^2$ et que $f(c) = c \pm \sqrt{c - c^2} = c$. Par conséquent, pour tout x , $P(x, 0)$ indique que

$$f(c - x)^2 + f(x)^2 + c^2 = c(1 + 2c).$$

- Si $c = 0$, l'égalité ci-dessus se réécrit comme $f(-x)^2 + f(x)^2 = 0$, donc $f(x) = 0$.
- Si $c = 1$, elle se réécrit comme $f(1 - x)^2 + f(x)^2 = 2$. Or, on a vu plus haut que $f(1 - x) \geq c^2 = 1$ et que $f(x) \geq c^2 = 1$, ce qui montre que $f(x) = f(1 - x) = 1$.

Réciproquement, les fonctions $f : x \mapsto 0$ et $f : x \mapsto 1$ sont clairement solutions du problème.

Exercice 6.

a) Soit $x_1 \geq x_2 > 0$ et $y_1 \geq y_2 > 0$ des réels tels que

$$x_1 \geq y_1 \text{ et } x_1 x_2 \geq y_1 y_2.$$

Prouver que

$$x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2.$$

b) Soit $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n > 0$ et $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n > 0$ des réels tels que

$$x_1 x_2 \cdots x_i \geq y_1 y_2 \cdots y_i \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

Prouver que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

Solution de l'exercice 6

a) Procédons par l'absurde : supposons que $y_1 + y_2 > x_1 + x_2$. Alors $y_2 > x_1 + x_2 - y_1$ et on a

$$0 \geq y_1 y_2 - x_1 x_2 > y_1(x_1 + x_2 - y_1) - x_1 x_2 = (x_1 - y_1)(y_1 - x_2).$$

Puisque $x_1 \geq y_1$, alors $y_1 < x_2$. Mais alors $x_1 + x_2 \geq 2y_1 \geq y_1 + y_2$, ce qui contredit notre hypothèse. On a donc bien $y_1 + y_2 \leq x_1 + x_2$.

b) Procédons par récurrence forte sur n . Tout d'abord, le résultat est évident pour $n = 1$, et on vient de le prouver pour $n = 2$. On suppose donc $n \geq 3$.

Soit $\lambda = \min_{1 \leq k < n} \frac{x_1 + \dots + x_k}{y_1 + \dots + y_k}$, et soit ℓ un entier tel que $1 \leq \ell < n$ et tel que

$$x_1 + \dots + x_\ell = \lambda(y_1 + \dots + y_\ell).$$

On pose alors $y'_1 = \lambda y_1$, $y'_n = \frac{y_n}{\lambda}$ et $y'_k = y_k$ pour $k = 2, \dots, n-1$. Par construction, on a bien $y'_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y'_n$ et, pour $k = 1, \dots, n$, on a également $x_1 \dots x_k \geq y'_1 \dots y'_k$, avec égalité quand $k = \ell < n$. Par hypothèse de récurrence, on sait que $x_1 + \dots + x_\ell \geq y'_1 + \dots + y'_\ell$.

En outre, remarquons que $y'_1 \geq y'_n$, $y_1 \geq y_n$, $y'_1 \geq y_1$ et $y'_1 y'_n = y_1 y_n$. En appliquant l'hypothèse de récurrence (pour $n = 2$), on obtient donc $y'_1 + y'_n \geq y_1 + y_n$, et même $y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n \geq y_1 + y_2 + \dots + y_n$.

Enfin, posons $\bar{x}_i = x_{\ell+i}$ et $\bar{y}_i = y'_{\ell+i}$, pour $i = 1, \dots, n - \ell$. Alors $\bar{x}_1 \geq \dots \geq \bar{x}_{n-\ell} > 0$ et $\bar{y}_1 \geq \dots \geq \bar{y}_{n-\ell} > 0$. En outre, pour $i = 1, \dots, n - \ell$, on a

$$(x_1 \dots x_\ell)(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_i) = x_1 \dots x_{\ell+i} \geq y'_1 \dots y'_{\ell+i} = (y'_1 \dots y'_\ell)(\bar{y}_1 \dots \bar{y}_i).$$

Puisque $x_1 \dots x_\ell = y'_1 \dots y'_\ell > 0$, cela montre que $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_i \geq \bar{y}_1 \dots \bar{y}_i$. On a $n - \ell < n$, et l'hypothèse de récurrence montre donc que $\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{n-\ell} \geq \bar{y}_1 + \dots + \bar{y}_{n-\ell}$.

Mises bout à bout, ces inégalités montrent que

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_n &= (x_1 + \dots + x_\ell) + (\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{n-\ell}) \\ &\geq y'_1 + \dots + y'_\ell + \bar{y}_1 + \dots + \bar{y}_{n-\ell} = y'_1 + \dots + y'_n \\ &\geq y_1 + \dots + y_n. \end{aligned}$$

Solution alternative

On pose

$$x_{n+1} = \min(x_n, y_n) \frac{y_1 \cdots y_n}{x_1 \cdots x_n} \text{ et } y_{n+1} = \min(x_n, y_n).$$

On a alors $0 < x_{n+1} \leq x_n$, $0 < y_{n+1} \leq y_n$, $x_{n+1} \leq y_{n+1}$ et $x_1 \cdots x_n x_{n+1} = y_1 \cdots y_n y_{n+1}$.
 Tout étant homogène, quitte à multiplier les x_i et les y_i par une même constante, on peut supposer que $x_i, y_i > 1$ pour tout i . On pose ensuite $\alpha_i = \ln(x_i)$ et $\beta_i = \ln(y_i)$, pour tout i . On a alors :

- $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_{n+1} > 0$ et $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_{n+1} > 0$;
- $\beta_1 + \dots + \beta_i \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_i$, pour $i = 1, \dots, n$;
- $\beta_1 + \dots + \beta_{n+1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1}$.

On peut donc utiliser l'inégalité de Muirhead, qui assure que, pour tous réels x_1, \dots, x_{n+1} strictement positifs, on a

$$\sum_{\text{sym.}} x_1^{\beta_1} \cdots x_{n+1}^{\beta_{n+1}} \leq \sum_{\text{sym.}} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}.$$

En particulier, si $x_1 = e$ et $x_i = 1$ pour $i \geq 2$, il vient $\sum_{i=1}^{n+1} y_i \leq \sum_{i=1}^{n+1} x_i$. Puisque $x_{n+1} \leq y_{n+1}$,

il s'ensuit en fait $\sum_{i=1}^n y_i \leq \sum_{i=1}^n x_i$.

Remarque Une fois introduits les nombres α_i et β_i , au lieu d'utiliser l'inégalité de Muirhead, on aurait pu directement utiliser l'inégalité de Karamata à la fonction exponentielle (qui est convexe sur \mathbb{R}).

Exercices du groupe A

Exercice 7.

Soit a_0 et b_0 des entiers strictement positifs. Pour tout $i \geq 0$, on pose

$$a_{i+1} = a_i + \lfloor \sqrt{b_i} \rfloor \text{ et } b_{i+1} = b_i + \lfloor \sqrt{a_i} \rfloor.$$

Prouver qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $a_n = b_n$.

Solution de l'exercice 7

Pour tout $i \geq 0$, posons $c_i = b_i - a_i$, $\alpha_i = \lfloor \sqrt{a_i} \rfloor$ et $\beta_i = \lfloor \sqrt{b_i} \rfloor$. Sans perte de généralité, on suppose que $c_0 \geq 0$. On montre tout d'abord par récurrence que $c_i \geq 0$ pour tout $i \geq 0$. En effet, pour tout $n \geq 0$, on a $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$. La fonction $f : n \mapsto n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ est donc croissante sur \mathbb{N} , car

$$f(n+1) - f(n) = n+1 - \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor \geq n+1 - \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1 - n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 0$$

pour tout $n \geq 0$. Par conséquent, si $c_i \geq 0$, alors $b_i \geq a_i$, donc

$$c_{i+1} = \left(b_i - \lfloor \sqrt{b_i} \rfloor \right) - \left(a_i - \lfloor \sqrt{a_i} \rfloor \right) = f(b_i) - f(a_i) \geq 0.$$

Ceci conclut la récurrence, et montre bien que $c_i \geq 0$ pour tout $i \geq 0$.

D'autre part, si $c_i \geq 0$, et toujours puisque $b_i \geq a_i$, on a aussi $c_{i+1} = c_i + \lfloor \sqrt{a_i} \rfloor - \lfloor \sqrt{b_i} \rfloor \leq c_i$. La suite $(c_i)_{i \geq 0}$ est donc décroissante, à valeurs dans les entiers naturels. Il existe donc un entier $n \geq 0$ tel que $c_i = c_n$ pour tout $i \geq n$. Il suffit donc de prouver que $c_n = 0$.

Procédons par l'absurde : supposons que $c_n \geq 1$. Pour tout $i \geq n$, on sait que $c_i = c_{i+1} = c_i + \alpha_i - \beta_i$, donc que $\alpha_i = \beta_i$. La suite $(b_i - \beta_i^2)_{i \geq n}$ est à valeurs entières positives ; il existe donc un entier $m \geq n$ tel que $b_i - \beta_i^2 \geq b_m - \beta_m^2$ pour tout $i \geq n$. Quitte à augmenter la valeur de n , on suppose en outre que $m = n$.

Notons enfin que les suites $(a_i)_{i \geq 0}$ et $(\alpha_i)_{i \geq 0}$ sont clairement croissantes. Deux cas sont alors possibles :

— Si $\alpha_n = \alpha_{n+1}$, alors

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= b_n + \alpha_n + \alpha_{n+1} \geq a_n + c_n + 2\beta_n \geq \beta_n^2 + 2\beta_n + 1 = (\beta_n + 1)^2 \text{ et} \\ b_{n+2} &= b_n + \alpha_n + \alpha_{n+1} < (\beta_n + 1)^2 + 2\beta_n < (\beta_n + 2)^2 \end{aligned}$$

donc $\beta_{n+2} = \beta_n + 1$. Ceci montre que

$$b_{n+2} - \beta_{n+2}^2 = b_n + 2\beta_n - (\beta_n + 1)^2 = (b_n - \beta_n^2) - 1 < b_n - \beta_n^2,$$

ce qui contredit notre hypothèse.

— Si $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, alors

$$\begin{aligned}b_{n+1} &\geq \beta_{n+1}^2 = \alpha_{n+1}^2 \geq (\alpha_n + 1)^2 = (\beta_n + 1)^2 \text{ et} \\b_{n+1} &= b_n + \alpha_n < (\beta_n + 1)^2 + \beta_n < (\beta_n + 2)^2\end{aligned}$$

donc $\beta_{n+1} = \beta_n + 1$. Ceci montre que

$$b_{n+1} - \beta_{n+1}^2 = b_n + \beta_n - (\beta_n + 1)^2 = (b_n - \beta_n^2) - \beta_n - 1 < b_n - \beta_n^2,$$

ce qui contredit une fois encore notre hypothèse.

Notre hypothèse selon laquelle $c_n \geq 1$ était donc fautive, ce qui montre que $c_n = 0$, concluant donc l'exercice.

Exercice 8.

Un polynôme est dit « unitaire » si le coefficient de son monôme de plus haut de degré vaut 1. Soit $a < b$ des réels, et soit P un polynôme unitaire non constant tel que $\max_{x \in [a, b]} |P(x)| < 2$.

Prouver qu'il existe un polynôme Q , unitaire et non constant, tel que $\max_{x \in [a, b]} |Q(x)| < \frac{1}{2017}$.

Solution de l'exercice 8

Si Q désigne un polynôme, on pose

$$\|Q\| = \frac{1}{2} \max_{x \in [a, b]} |Q(x)| \text{ et } T(Q)(x) = Q(x)^2 - 2\|Q\|^2.$$

Il est clair que si Q est un polynôme unitaire non constant, alors $T(Q)$ l'est également. De plus, on a $\|T(Q)\| = \|Q\|^2$. Si l'on note T^n la n -ième itérée de T , alors une récurrence immédiate assure que pour tout entier $n \geq 0$, $T^n(Q)$ est un polynôme non constant dont le coefficient du monôme de plus haut de degré vaut 1 et que $\|T^n(Q)\| = \|Q\|^{2^n}$.

Soit donc P un polynôme unitaire non constant, tel que $\max_{x \in [a, b]} |P(x)| < 2$. Puisque $0 < \|P\| < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n(P)\| = 0$. En particulier, il existe $n \geq 0$ suffisamment grand pour que $\|T^n(P)\| < \frac{1}{2 \times 2017}$, et le polynôme $Q = T^n(P)$ répond alors à la question.

Exercice 9.

- a) Prouver qu'il existe des entiers a, b, c tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $|a|, |b|, |c| < 10^6$ pour lesquels

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}.$$

- b) Soit a, b, c des entiers tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $|a|, |b|, |c| < 10^6$. Prouver que

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| > 10^{-21}.$$

Solution de l'exercice 9

- a) Soit E l'ensemble des 10^{18} nombres de la forme $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, avec a, b, c entiers naturels et $a, b, c < 10^6$. On pose $d = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})10^6$.

Pour tout $x \in E$, on a $0 \leq x < d$. De plus $0 < d < (1 + 2 + 3) \times 10^6 < 10^7 - 10^{-11}$. On divise alors l'intervalle $[0; d[$ en $10^{18} - 1$ intervalles

$$\left[\frac{(k-1)d}{10^{18}-1}, \frac{kd}{10^{18}-1} \right],$$

pour $k = 1, \dots, 10^{18}-1$. D'après le principe des tiroirs, au moins deux des 10^{18} éléments de E , disons x et y , appartiennent à un même de ces intervalles. Leur différence $z = x - y$ est bien de la forme $z = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ avec a, b, c entiers et $|a|, |b|, |c| < 10^6$. De plus, $|z| = |x - y| < \frac{d}{10^{18}-1} < 10^{-11}$.

- b) Soit a, b, c des entiers tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $|a|, |b|, |c| < 10^6$. Pour $\epsilon = \pm 1$ et $\epsilon = \pm 1$, on pose

$$F_{\epsilon, \epsilon} = a + \epsilon b\sqrt{2} + \epsilon c\sqrt{3}.$$

Comme ci-dessus, on a $|F_{\epsilon, \epsilon}| < 10^7$.

On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} F_{1,1}F_{1,-1}F_{-1,1}F_{-1,-1} &= \left((a + b\sqrt{2})^2 - 3c^2 \right) \left((a - b\sqrt{2})^2 - 3c^2 \right) \\ &= \left(a^2 + 2b^2 - 3c^2 + 2ab\sqrt{2} \right) \left(a^2 + 2b^2 - 3c^2 - 2ab\sqrt{2} \right) \\ &= (a^2 + 2b^2 - 3c^2)^2 - 2(2ab)^2 \end{aligned}$$

est un entier.

Afin de montrer qu'il est non nul, on procède par l'absurde, et on suppose que

$$F_{1,1}F_{1,-1}F_{-1,1}F_{-1,-1} = 0.$$

Il s'ensuit que $x^2 = 2y^2$, avec $x = a^2 + 2b^2 - 3c^2$ et $y = 2ab$. Si x et y sont non nuls, en considérant la valuation 2-adique, il vient $2v_2(x) = 1 + 2v_2(y)$. C'est absurde, ce qui montre que $x = y = 0$. Puis :

- si $a = 0$, et puisque $x = 0$, on a $2b^2 = 3c^2$, et la valuation 2-adique montre de nouveau que $b = c = 0$;
- si $b = 0$, et puisque $x = 0$, on a $a^2 = 3c^2$, et la valuation 3-adique montre aussi que $a = c = 0$.

Par conséquent, si $(a, b, c) \neq 0$, l'entier $F_{1,1}F_{1,-1}F_{-1,1}F_{-1,-1}$ est non nul.

Ainsi, $|F_{1,1}F_{1,-1}F_{-1,1}F_{-1,-1}| \geq 1$, donc $|F_{1,1}| \geq \frac{1}{|F_{1,-1}F_{-1,1}F_{-1,-1}|} > 10^{-21}$.