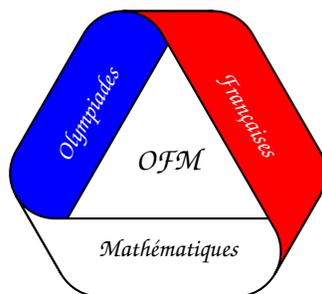


# *Olympiades Françaises de Mathématiques 2016-2017*



## *Envoi Numéro 1*

*À renvoyer au plus tard le samedi 19 novembre*

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2002 ou après, avec les exceptions suivantes :

\* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,

\* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2015-2016 sont dans le groupe A.

Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

## Exercices du groupe B

*Exercice 1.* On définit une suite ainsi :

$$\begin{cases} u_0 = 15, u_1 = 57 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 2 \end{cases}$$

Trouver le plus grand entier  $k$  tel que  $3^k \mid u_{2017}$ .

*Exercice 2.* Trouver tous les entiers naturels  $n$  pour lesquels  $2^n + 12^n + 2011^n$  est un carré parfait.

*Exercice 3.* Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , il existe  $m$  un multiple de  $n$  tel que la somme des chiffres de  $m$  fasse  $n$ .

## Exercices Communs

*Exercice 4.* On dit qu'un entier naturel  $d$  est sympathique si, pour tout couple d'entiers  $(x, y)$ ,

$$d \mid (x + y)^5 - x^5 - y^5 \iff d \mid (x + y)^7 - x^7 - y^7.$$

Montrer qu'il existe une infinité de nombres sympathiques. Est-ce que 2017, 2018 sont sympathiques ?

*Exercice 5.* Soit  $m, n$  des entiers positifs tels que  $\text{pgcd}(m, n) = 1$ .  
Quelle(s) valeur(s) peut prendre :

$$\text{pgcd}(2^m - 2^n, 2^{m^2+mn+n^2} - 1) ?$$

*Exercice 6.* Trouver tous les triplets d'entiers naturels  $(x, y, z)$  tels que :

$$x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77.$$

## Exercices du groupe A

*Exercice 7.* Soit  $p$  un nombre premier,  $m$  un entier naturel. Trouver le plus petit entier  $d$  tel qu'il existe un polynôme unitaire  $Q$  de degré  $d$  à coefficients entiers tel que, pour tout entier  $n$ ,  $p^m \mid Q(n)$ .

*Exercice 8.* Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $d(n)$  son nombre de diviseurs. Quels sont les entiers strictement positifs tels que  $d(n)^3 = 4n$  ?

*Exercice 9.* Prouver qu'il existe une infinité d'entiers  $n$  tels que  $2^{2^n+1} + 1$  est divisible par  $n$ , mais  $2^n + 1$  ne l'est pas.