Olympiades Françaises de Mathématiques 2016-2017

Envoi Numéro 1

À renvoyer au plus tard le samedi 19 novembre

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2002 ou après, avec les exceptions suivantes :
* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2015-2016 sont dans le groupe A.
Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B »ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. On définit une suite ainsi :

$$\begin{cases} u_0 = 15,\ u_1 = 57 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \ \text{ pour tout } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Trouver le plus grand entier k tel que $3^k \mid u_{2017}$.

Exercice 2. Trouver tous les entiers naturels n pour lesquels $2^n + 12^n + 2011^n$ est un carré parfait.

Exercice 3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe m un multiple de n tel que la somme des chiffres de m fasse n.

Exercices Communs

Exercice 4. On dit qu'un entier naturel d est sympathique si, pour tout couple d'entiers (x, y),

$$d \mid (x+y)^5 - x^5 - y^5 \iff d \mid (x+y)^7 - x^7 - y^7.$$

Montrer qu'il existe une infinité de nombres sympathiques. Est-ce-que 2017, 2018 sont sympathiques ?

Exercice 5. Soit m, n des entiers positifs tels que $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$.
Quelle(s) valeur(s) peut prendre :

$$\mathrm{pgcd}(2^m - 2^n,\ 2^{m^2+mn+n^2} - 1)\ ?$$

Exercice 6. Trouver tous les triplets d'entiers naturels (x, y, z) tels que :

$$x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77.$$

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit p un nombre premier, m un entier naturel. Trouver le plus petit entier d tel qu'il existe un polynôme unitaire Q de degré d à coefficients entiers tel que, pour tout entier n, $p^m \mid Q(n)$.

Exercice 8. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ son nombre de diviseurs. Quels sont les entiers strictement positifs tels que $d(n)^3 = 4n$?

Exercice 9. Prouver qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $2^{2^n+1} + 1$ est divisible par n, mais $2^n + 1$ ne l'est pas.