Olympiades Françaises de Mathématiques 2016-2017

Corrigé de l'envoi Numéro 1 – Arithmétique

Exercices du groupe B

Exercice 1. On définit une suite ainsi :

$$\begin{cases} u_0 = 15,\ u_1 = 57 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 2 \end{cases}$$

Trouver le plus grand entier k tel que $3^k \mid u_{2017}$.

Solution de l'exercice 1 Soit k l'entier cherché. Les premiers termes de la suite sont $15, 57, 72, 129, 201, 330, 541$,... apparemment tous divisibles par 3. En effet, u_0 et u_1 sont multiples de 3, donc $u_2 = u_0 + u_1$ aussi. De même, u_3 est divisible par 3. Plus généralement, si u_{n-1} et u_{n-2} sont multiples de 3, alors u_n aussi. On prouve ainsi de proche en proche (par récurrence, en fait) que pour tout entier n, u_n est divisible par 3, donc $3 \mid u_{2017}$ et $k \geq 1$.

Raisonnons maintenant modulo 9 pour voir si $k \geq 2$. On trouve :

$u_0 \equiv 6 \pmod 9$
$u_1 \equiv 3 \pmod 9$
$u_2 \equiv 0 \pmod 9$
$u_3 \equiv 3 \pmod 9$
$u_4 \equiv 3 \pmod 9$
$u_5 \equiv 6 \pmod 9$
$u_6 \equiv 0 \pmod 9$
$u_7 \equiv 6 \pmod 9$
$u_8 \equiv 6 \pmod 9$
$u_9 \equiv 3 \pmod 9$

On constate que $u_8 \equiv u_0 \pmod 9$ et $u_9 \equiv u_1 \pmod 9$, donc $u_{10} \equiv u_2 \pmod 9$, car les modulos s'additionnent. Plus généralement, on établit comme précédemment que $u_{n+8} \equiv u_n \pmod 9$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la suite $(u_n \pmod 9)$ est périodique de période 8. Or $2017 = 252 \times 8 + 1$, donc $u_{2017} \equiv u_1 \equiv 3 \pmod 9$. Donc $k < 2$. Conclusion : $k = 1$.

Remarque. Si l est un entier naturel quelconque, alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_n \pmod l$ est périodique artir d'un certain rang. En effet, il y a $l \times l = l^2$ possibilités pour le couple (v_n, v_{n+1}). Donc, si on regarde $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \cdots, (v_{l^2}, v_{l^2+1})$, cela fait $l^2 + 1$ couples. D'après le principe des tiroirs (ie si on range $c + 1$ chaussettes dans c tiroirs, un tiroir contiendra au moins 2 chaussettes), deux couples sont égaux, il existe donc $0 \leqslant i < j \leqslant l^2$ tels que $(v_i, v_{i+1}) = (v_j, v_{j+1})$. Autrement dit, $u_i \equiv u_j \pmod l$ et $u_{i+1} \equiv u_{j+1} \pmod l$. Donc $u_{i+2} \equiv u_{j+2} \pmod l$, soit $(v_{i+1}, v_{i+2}) = (v_{j+1}, v_{j+2})$. On en déduit de même que $v_{i+3} = v_{j+3}$, $v_{i+4} = v_{j+4}$, etc. Ainsi, (v_n) est périodique artir du rang i (au plus tard), de période $i - j$.

Elle peut toutefois avoir une période plus petite (exercice : montrer que la période minimale divise $i - j$).

Exercice 2. Trouver tous les entiers naturels n pour lesquels $2^n + 12^n + 2011^n$ est un carré parfait.

Solution de l'exercice 2 Posons $u_n = 2^n + 12^n + 2011^n$. On regarde modulo 3: $2 \equiv -1 \pmod 3$, $12 \equiv 0 \pmod 3$ et $2011 \equiv 1 \pmod 3$, donc

$$u_n \equiv (-1)^n + 0^n + 1^n \equiv (-1)^n + 1 \pmod 3.$$

Si n est pair, $u_n \equiv 2 \pmod 3$. Or aucun carré ne peut être congru $2 modulo 3 : en effet, si$ x $\equiv 0 \pmod 3$, $x^2 \equiv 0 \pmod 3$, si $x \equiv 1 \pmod 3$, $x^2 \equiv 1 \pmod 3$, et si $x \equiv 2 \pmod 3$, $x^2 \equiv 1 \pmod 3$. Si n est impair, on remarque que $u_1 = 2 + 12 + 2011 = 2025 = 45^2$ donc $n = 1$ convient. Si $n \geq 3$, $2^n \equiv 12^n \equiv 0 \pmod 4$. Et $2011 \equiv 3 \pmod 4$. En écrivant $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \equiv 3^{2k+1} \equiv (3^2)^k \times 3 \equiv 9^k \times 3 \equiv 1^k \times 3 \equiv 3 \pmod 4.$$

Or un carré n'est jamais congru $3 modulo 4, si on fait un tableau de congruence$:

$x \pmod 4$	$x^2 \pmod 4$
0	0
1	1
2	0
3	1

$Donc$u$_n$ ne peut pas être un carré si $n \geq 3$ est impair. Conclusion : $n = 1$ est la seule solution.

Exercice 3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe m un multiple de n tel que la somme des chiffres de m fasse n.

Solution de l'exercice 3 La suite des puissances de 10, donc $1, 10, 100, \cdots$ contient une infinité de termes, qui peuvent prendre un nombre fini de résidus modulo n. Il existe donc un résidu k tel qu'une infinité de puissances de 10 soient congrues k$modulo n. Soient donc 0 \leqslant a_1 < a_2 < a_n$ des entiers tels que

$$10^{a_i} \equiv k \pmod n$$

pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. On pose $m = 10^{a_n} + 10^{a_{n-1}} + \cdots + 10^{a_2} + 10^{a_1}$. m s'écrit avec n chiffres "1" et un certain nombre de zéros, donc sa somme des chiffres vaut n.
Et $m \equiv k + \cdots + k \equiv kn \equiv 0 \pmod n$, donc m est divisible par n, donc cet entier satisfait aux conditions de l'énoncé.

Exercices Communs

Exercice 4. On dit qu'un entier naturel d est sympathique si, pour tout couple d'entiers (x, y),

$$d \mid (x+y)^5 - x^5 - y^5 \iff d \mid (x+y)^7 - x^7 - y^7.$$

Montrer qu'il existe une infinité de nombres sympathiques. Est-ce-que 2017, 2018 sont sympathiques ?

Solution de l'exercice 4 On remarque que :

$$(x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)$$
$$(x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)^2$$

Ainsi, si on prend p un nombre premier différent de 5 et de 7 :

- si p divise $(x+y)^5 - x^5 - y^5$, comme p et 5 sont premiers entre eux, d'après le lemme de Gauß, p divise aussi $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$, a fortiori p divise $(x+y)^7 - x^7 - y^7$.
- si p divise $(x+y)^7 - x^7 - y^7$, comme p et 7 sont premiers entre eux, p divise également $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$. Si p divise x^2+xy+y^2, alors p divise $(x+y)^5 - x^5 - y^5$ (car c'est bien un multiple de x^2+xy+y^2). Sinon, comme p premier, cela signifie que p et x^2+xy+y^2 sont premiers entre eux, donc d'après le lemme de Gauß, p divise $xy(x+y)$, d'où l'on déduit que p divise $(x+y)^5 - x^5 - y^5$.

Donc un tel nombre p est sympathique
Comme il y a une infinité de nombres premiers différents de 5 et de 7, il y a bien une infinité de nombres sympathiques.
En particulier, le nombre 2017 est premier, différent de 5 et de 7, donc sympathique.
De plus, si a et b sont deux entiers sympathiques premiers entre eux, comme on a en général, pour tout entier n,

$$ab \text{ divise } n \Leftrightarrow a \text{ divise } n \text{ et } b \text{ divise } n,$$

ab est aussi sympathique. Donc $2018 = 2 \cdot 1009$ est sympathique.

Exercice 5. Soit m, n des entiers positifs tels que $pgcd(m,n) = 1$, où $a \wedge b$ désigne le plus grand diviseur commun de a et b. Quelle(s) valeur(s) peut prendre

$$(2^m - 2^n \wedge 2^{m^2+mn+n^2} - 1) \ ?$$

Solution de l'exercice 5 On utilise la propriété suivante : si $m \geq 1$ et $a, b \in \mathbb{N}$, alors $(m^a - 1) \wedge (m^b - 1) = m^{a \wedge b} - 1$. On se ramène ainsi tudier $(m^2+mn+n^2) \wedge (m-n)$. Si $d | m^2+mn+n^2$ et $d | m-n$, alors $d | m^2+mn+n^2-(m-n)^2 = 3mn$. Donc $d | 3mn - 3n(m-n) = 3n^2$ et $d | 3mn + 3m(m-n) = 3m^2$, donc $d | (3m^2, 3n^2)$, donc $d | 3$. Ainsi, $(m^2+mn+n^2) \wedge (m-n) | 3$, et ne peut prendre qu'au plus deux valeurs, 1 et 3. Vérifions qu'elles sont réalisées.
Si $m = 2$ et $n = 1$, $(m^2+mn+n^2) \wedge (m-n) = 1$ et

$$(2^m - 2^n) \wedge (2^{m^2+mn+n^2} - 1) = 2^{(m^2+mn+n^2) \wedge (m-n)} - 1 = 1.$$

Si $m = n = 1$, $(m^2+mn+n^2) \wedge (m-n) = 3$ et

$$(2^m - 2^n) \wedge (2^{m^2+mn+n^2} - 1) = 2^{(m^2+mn+n^2) \wedge (m-n)} - 1 = 7.$$

Donc les valeurs possibles sont 1 et 7.
Preuve de la propriété : on peut supposer $a \geq b$. On écrit $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b. Soit $d := (m^a - 1) \wedge (m^b - 1)$. $d | (m^b - 1) + (m^{2b} - m^b) + (m^{3b} - m^{2b}) + \cdots + (m^{qb} - m^{(q-1)b})$, soit $d | m^{qb} - 1$. Donc $d | m^a - m^{qb}$. Or $m^a - m^{qb} = m^{qb}(m^r - 1)$. Comme d est un diviseur de $m^b - 1$ qui est premier avec m, alors d est premier avec m^{qb}. D'après le lemme de Gauss, $d | m^r - 1$. Ainsi, $d | (m^b - 1) \wedge (m^r - 1)$. On procède de même en faisant la division euclidienne de b par r et ainsi de

suite. On reproduit ainsi l'algorithme d'Euclide. Ce dernier termine sur $a \wedge b$, donc on obtient a fin que d divise $m^{a\wedge b} - 1$. Pour conclure, il reste rouver que $m^{a\wedge b} - 1$ est un diviseur de $m^b - 1$ et de $m^a - 1$. Or, si $i = kj$ pour des entiers i, j, k, $m^j - 1$ divise $m^i - 1$, car :

$$m^i - 1 = (m^j)^k - 1 = (m^j - 1)((m^j)^{k-1} + (m^j)^{k-2} + \cdots + m^j + 1).$$

Ceci permet de conclure.

Exercice 6. Trouver tous les triplets d'entiers naturels (x, y, z) tels que :

$$x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77.$$

Solution de l'exercice 6 Soit un triplet solution (x, y, z). Que peut-on en dire de façon nécessaire ?
Si $z = 0$, on a $x^2 + y^2 = 80$. On fait une table de congruence modulo 4 : on montre ainsi que, si une somme de deux carrés est congrue modulo 4, c'est que les deux carrés en question sot tous les deux pairs. On peut donc poser $x = 2x_0, y = 2y_0$ avec x_0, y_0 entiers et $x_0^2 + y_0^2 = 20$. Par le même argument modulo 4, on arrive x=4x$_1, y = 4y_1$ avec x_1, y_1 entiers et $x_1^2 + y_1^2 = 5$. Les seuls couples vérifiant cela sont $(x_1, y_1) = (1, 2)$ ou $(2, 1)$.
Si $z > 0$, comme $7 \mid 2016$, on a modulo 7 $x^2 + y^2 = 0$, ce qui donne, en écrivant la table des carrés modulo 7, x et$y$ congrus modulo 7. On peut donc poser $x = 7x_1$ et $y = 7y_1$ avec x_1, y_1 entiers. Donc $49 \mid x^2 + y^2$, c'est-dire $49 \mid 3 \cdot 2016^z + 77$ donc $z = 1$. Il vient alors $x_1^2 + y_1^2 = 125$. On teste les cas restants un par un pour voir ceux qui marchent a main : $(x_1, y_1) = (5, 10), (2, 11), (10, 5), (11, 2)$.
Ainsi, tous les triplets solutions sont dans l'ensemble :

$$\{(4, 8, 0), (8, 4, 0), (35, 70, 1), (70, 35, 1), (14, 77, 1), (77, 14, 1)\}$$

et on vérifie que, réciproquement, tous ces triplets sont bien des solutions.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit p un nombre premier, m un entier naturel. Trouver le plus petit entier d tel qu'il existe un polynôme unitaire Q de degré d à coefficients entiers tel que, pour tout entier n, $p^m \mid Q(n)$.

Solution de l'exercice 7 Montrons que d est le plus petit entier tel que $p^m \mid d!$. Soit k le plus petit entier tel que $p^m \mid k!$.
Tout d'abord, montrons que $k \geq d$. On considère le polynôme $Q(x) = X(X + 1) \cdots (X + k - 1)$: il est unitaire, de degré k, oefficients entiers. Qui plus est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = k!\binom{n}{k}$ (c'est une propriété des coefficients binomiaux), d'où $p^m \mid k! \mid Q(n)$. Donc k est un entier pour lequel on dispose d'un polynôme Q unitaire oefficients entiers de degré k tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p^m \mid Q(n)$. Donc $k \geq d$.
Reste ontrer le sens réciproque. Autrement dit, soit Q un polynôme unitaire oefficients entiers de degré l tel que pour tout entier n, $p^m \mid Q(n)$. Montrons que $k \leq l$. Il suffit de montrer que $p^m \mid l!$ (car, par définition, k est le plus petit entier érifier cela).

On introduit la famille des polynômes $P_i := X(X+1)\cdots(X+i-1)$ pour $i \in \{0,\dots l\}$ ($P_0 := 1$). En effectuant les divisions euclidiennes successives de Q par P_l, P_{l-1},…,P_0, on montre que Q s'écrit :

$$Q = \sum_{i=0}^{l} c_i P_i,$$

où $c_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i.
On montre alors par récurrence sur $i \in \{0\dots l\}$ la propriété suivante :

$$p^m \mid c_i P_i(-i) \mid c_i P_i(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

- pour $i = 0$, le seul des P_i qui ne s'annule pas en zéro est P_0, donc $Q(0) = c_0$, d'où $p^m \mid c_0 = c_0 P_0(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

- soit $i < l$. Supposons que la propriété est vraie pour tous les éléments de $\{0,\dots,i\}$ et montrons-la pour $i+1$. On constate que si $j > i+1$, $(X+i+1) \mid P_j$ donc $P_j(-i-1) = 0$. Ainsi,

$$\underbrace{Q(-i-1)}_{p^m|} = \underbrace{\sum_{j=0}^{i} c_j P_j(-i-1)}_{p^m|} + c_{i+1}P_{i+1}(-i-1),$$

  par hypothèse de récurrence et par définition de Q. Donc $p^m \mid c_{i+1}P_{i+1}(-i-1)$, et comme $P_{i+1}(-i-1) = (i+1)!$ divise tout produit de $i+1$ entiers consécutifs (on peut encore le voir grâce aux coefficients binomiaux), il divise $P_{i+1}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, on obtient en particulier $p^m \mid P_l(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $p^m \mid l!$. Donc $k \leq l$, d'où $k \leq d$.
Par double encadrement, on a donc bien montré que $k = d$.

Exercice 8. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ son nombre de diviseurs. Quels sont les entiers strictement positifs tels que $d(n)^3 = 4n$?

Solution de l'exercice 8 Soit $f(n) := \frac{d(n)^3}{n}$, l'énoncé revient rouver les antécédents de 4 par f. On remarque que $f(ab) = f(a)f(b)$ si a et b sont premiers entre eux. Ceci nous incite écomposer n en produit de facteurs premiers :

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \cdots \times p_l^{a_l},$$

où les p_i, $1 \leqslant i \leqslant l$, sont premiers et $a_i \geqslant 1$. On a donc $f(n) = \prod_{i=1}^{l} f(p_i^{a_i})$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant l'énoncé, $n^3 = 2 \times (d(n)/2)^3$ est le double d'un cube parfait ($d(n)$ est nécessairement pair). On en déduit que $v_p(n) \equiv 0 \pmod 3$ pour p nombre premier impair, et $v_2(n) \equiv 1 \pmod 3$. Ici, $v_p(n)$ désigne la valuation p-adique de n, soit le plus grand entier k tel que $p^k | n$, donc $v_{p_i}(n) = a_i$ avec nos notations. On peut écrire

$$f(n) = \frac{((a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_l+1))^3}{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_l^{a_l}}.$$

D'après la remarque précédente, le numérateur n'est pas divisible par 3, donc aucun des p_i ne peut valoir 3. Et n est le produit de puissances de cubes de nombres premiers impairs que multplie le double d'une puissance de 2^3.
On montre aisément que si m est puissance du cube d'un nombre premier strictement plus grand que 3, alors $f(m) \geqslant \frac{64}{125}$ avec égalité si et seulement si $m = 5^3$. On prouve ette fin que pour tout premier $p \geqslant 5$, $k \to f(p^{3k})$ est strictement décroissante, et que pour tout $k \geqslant 1$, $p \to f(p^{3k})$ l'est aussi. Pour avoir $f(n) = 4$, il faut donc utiliser des puissances de 2. On a
$f(2) = f(2^7) = 4$, $f(2^4) = \frac{125}{16}$ et $f(2^{3k+1}) < 1$ pour $k > 2$.
Ainsi, 2 et 128 sont solution. Et pour en avoir une autre, il faut trouver m un produit de puissances de cubes de nombres premiers impairs tel que $f(m) = \frac{64}{125}$. D'après l'étude précédente, seul $m = 5^3$ convient. Donc il y a 3 entiers n solution au problème : $n = 2$, $n = 2^7$ et $n = 2^4 \times 5^3$.

Exercice 9. Prouver qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $2^{2^n+1} + 1$ est divisible par n, mais $2^n + 1$ ne l'est pas.

Solution de l'exercice 9 Pour $m \geqslant 1$, posons $a_m = 2^{3^m} + 1$. On a
$a_m = (2^{3^{m-1}} + 1)((2^{3^{m-1}})^2 - 2^{3^{m-1}} + 1) = a_{m-1}((2^{3^{m-1}})^2 - 2^{3^{m-1}} + 1)$.
Notons que pour $a \in \mathbb{N}^*$, si $p|a+1$ et $p|a^2 - a + 1$, alors $p|2a - 1$ car $2a - 1 = a(a+1) - (a^2 - a + 1)$. Et $p|2a + 2$, donc $p|3$. Donc $(a_{m-1} \wedge a_m)|3$ pour tout $m \in \mathbb{N}*$. Donc a_m possède un facteur premier impair (car a_m impair) autre que 3 qui ne divise pas a_{m-1}, sauf éventuellement si a_m est une puissance de 3, auquel cas a_{m+1} possède un facteur premier que n'a pas a_m.
Donc pour une infinité d'entiers $m \in \mathbb{N}^*$, a_m possède un facteur premier $p_m > 3$ qui ne divise pas a_{m-1}.
Posons $b_m = 3^{m-1} p_m$. D'après le petit théorème de Fermat,

$$2^{b_m} + 1 \equiv 2^{3^{m-1}} + 1 \equiv a_{m-1} \pmod{p}_m.$$

Donc $p_m \nmid 2^{b_m} + 1$, donc $b_m \nmid 2^{b_m} + 1$.
Comme p_m et 3 sont premiers entre eux, il suffit de montrer que $p_m | 2^{2^{b_m}+1} + 1$ et que $3^{m_1} | 2^{2^{b_m}+1} + 1$. Cela se fait assez directement avec LTE mais on peut peut-être trouver une solution alternative. Recherche en cours.
Ainsi, une infinité d'entiers b_m satisfont la condition de l'énoncé.