OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE JANVIER

MERCREDI 6 JANVIER 2016

DURÉE : 4 HEURES

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Le groupe B est constitué des collégiens et des élèves de seconde qui n'étaient pas à l'OFM en 2014-2015 (néanmoins, tout élève de seconde peut demander à passer dans le groupe A). Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- L'exercice classé « commun » est à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soit ABC un triangle isocèle en A, dont l'angle en A n'est pas droit. Soit D le point de (BC) tel que $(AD) \perp (AB)$. Soit E le projeté orthogonal de D sur (AC). Soit enfin H le milieu de $[BC]$. Montrer que $AH = HE$.

Exercice 2. Trouver tous les entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ tels que $\dfrac{5^m + 2^{n+1}}{5^m - 2^{n+1}}$ soit le carré d'un entier.

Exercice 3. On considère 7 îles $A_1, \ldots, A_7$. On est autorisé à construire des ponts, soit entre une île A_i et l'île suivante A_{i+1} (pour $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$), soit entre une île A_i et la dernière A_7 (pour $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$). De combien de manières peut-on réaliser ces constructions avec le moins de ponts possible de sorte que l'on puisse se rendre d'une île à n'importe quelle autre ?

Exemple pour 3 îles au lieu de 7 : les trois constructions possibles utilisant deux ponts sont
1) un pont entre A_1 et A_2, et un pont entre A_1 et A_3
2) un pont entre A_1 et A_2, et un pont entre A_2 et A_3
3) un pont entre A_1 et A_3, et un pont entre A_2 et A_3.

Exercice commun

Exercice 4. Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous x et y réels, on ait l'égalité

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy)).$$

Exercices du groupe A

Exercice 5. a) Trouver tous les entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ tels que $\dfrac{5^m + 2^{n+1}}{5^m - 2^{n+1}}$ soit le carré d'un entier.

b) Plus généralement, trouver tous les entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, ainsi que les nombres premiers p, tels que $\dfrac{5^m + 2^n p}{5^m - 2^n p}$ soit le carré d'un entier.

Exercice 6. Soit I le centre du cercle inscrit à un triangle ABC. Soit D le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit. On suppose que le point E de la demi-droite $[BA)$ et le point F de la demi-droite $[CA)$ satisfont la condition

$$BE = CF = \frac{AB + BC + CA}{2}.$$

Montrer que $(EF) \perp (DI)$.