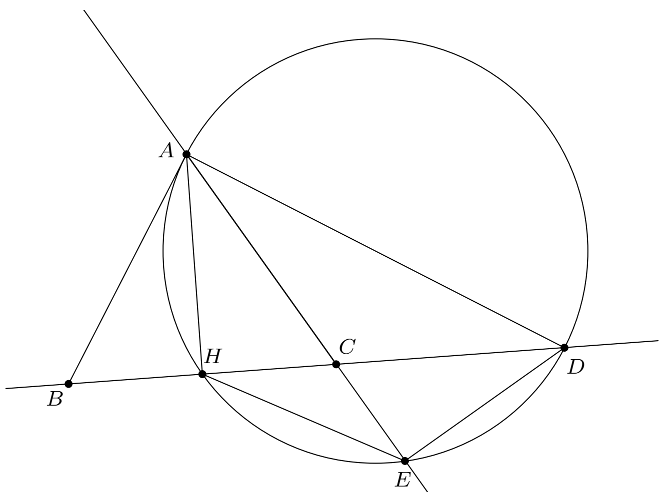
OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE JANVIER 2016
Corrigé

Exercice 1. Soit ABC un triangle isocèle en A, dont l'angle en A n'est pas droit. Soit D le point de (BC) tel que $(AD) \perp (AB)$. Soit E le projeté orthogonal de D sur (AC). Soit enfin H le milieu de $[BC]$. Montrer que $AH = HE$.

Solution de l'exercice 1



Tout d'abord, comme les angles $\widehat{AHD}$ et $\widehat{AED}$ sont droits, les points A, H, E, D sont sur le cercle de diamètre $[AD]$.
Notons $\theta = \widehat{CBA} = \widehat{ACB}$. Comme AHC est rectangle en H, $\widehat{HAC} = 90° - \theta$. Comme BAD est rectangle en A, $\widehat{ADB} = 90° - \theta$, et donc $\widehat{ADH} = \widehat{HAE}$.
Par cocyclicité de A, H, E, D, les angles $\widehat{ADH}$ et $\widehat{AEH}$ sont égaux ou supplémentaires, donc $\widehat{HAE} = \widehat{AEH}$ ou $\widehat{HAE} + \widehat{AEH} = 180°$.
Le deuxième cas ne peut pas se produire car la somme des angles du triangle AEH vaut $180°$, donc on a $\widehat{HAE} = \widehat{AEH}$. On en déduit que HAE est isocèle en H, d'où $HA = HE$.
Autre approche avec les angles de droites. On sait que si T est une tangente en un point A à un cercle (C) et si B et M sont deux autres points de (C), alors $(T, AB) = (MA, MB)$.
Dans l'exercice, comme (AB) est perpendiculaire au diamètre (AD), elle est tangente au cercle donc d'après ce qui précède on a $(AB, AH) = (EA, EH)$. Or, comme ABC est isocèle on a $(AB, AH) = (AH, AC)$ donc $(AH, AE) = (AH, AC) = (AB, AH) = (EA, EH)$. On en conclut que HAE est isocèle en H, d'où $HA = HE$.

Exercice 2. Trouver tous les entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ tels que $\dfrac{5^m + 2^{n+1}}{5^m - 2^{n+1}}$ soit le carré d'un entier.

Solution de l'exercice 2 La démonstration qui suit est valable pour $m, n \in \mathbb{N}$.
Déjà, $5^m - 2^{n+1}$ doit diviser $5^m + 2^{n+1}$, donc divise $5^m + 2^{n+1} - (5^m - 2^{n+1}) = 2^{n+2}$, par conséquent c'est une puissance de 2. Or, $5^m - 2^{n+1}$ est impair, donc $5^m - 2^{n+1} = 1$.
Ecrivons $5^m + 2^{n+1} = a^2$. On a donc $(a-1)(a+1) = a^2 - 1 = 5^m + 2^{n+1} - 5^m + 2^{n+1} = 2^{n+2}$, donc $a-1$ et $a+1$ sont des puissances de 2.
Ecrivons $a - 1 = 2^c$ et $a + 1 = 2^d$ avec $c + d = n + 2$. Alors $c < d$ donc $a - 1 = 2^c$ divise $2^d - 2^c = (a+1) - (a-1) = 2$, donc $a - 1 = 1$ ou $a - 1 = 2$.
Si $a = 2$ alors $2^d = a + 1 = 3$, ce qui est impossible.
On en déduit que $a = 3$, $c = 1$, $d = 2$ et $n + 2 = 3$, ce qui donne $n = 1$ et $5^m = 1 + 2^{n+1} = 5$, puis $m = 1$.
Finalement, $m = n = 1$.

Exercice 3. On considère 7 îles $A_1, \ldots, A_7$. On est autorisé à construire des ponts, soit entre une île A_i et l'île suivante A_{i+1} (pour $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$), soit entre une île A_i et la dernière A_7 (pour $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$). De combien de manières peut-on réaliser ces constructions avec le moins de ponts possibles de sorte que l'on puisse se rendre d'une île vers n'importe quelle autre ?

Exemple pour 3 îles au lieu de 7 : les trois constructions possibles utilisant deux ponts sont
1) un pont entre A_1 et A_2, et un pont entre A_1 et A_3
2) un pont entre A_1 et A_2, et un pont entre A_2 et A_3
3) un pont entre A_1 et A_3, et un pont entre A_2 et A_3.

Solution de l'exercice 3 On dira qu'une configuration est **bonne** si elle satisfait les conditions de l'énoncé.
Notons a_n le nombre de bonnes configurations avec n îles. On a $a_1 = a_2 = 1$ et $a_3 = 3$.
Partant d'une bonne configuration avec n îles telle que A_{n-1} et A_n ne soient pas reliées, alors A_{n-1} et A_{n-2} sont nécessairement reliées, donc si on supprime l'île A_{n-1} on obtient une bonne configuration avec $n-1$ îles. Réciproquement, toute bonne configuration avec $n-1$ îles provient d'une et une seule bonne configuration avec n îles dont les deux dernières ne sont pas reliées : il suffit en effet d'intercaler une île entre les deux dernières et de mettre un pont entre celle-ci et la $n-2$-ième.
On en déduit qu'il y a a_{n-1} bonnes configurations avec n îles telles que A_{n-1} et A_n ne soient pas reliées.

D'autre part, partant d'une bonne configuration avec des ponts entre A_n et A_{n-1}, A_{n-1} et A_{n-2},. . . , A_{n-k+1} et A_{n-k} ($k \geqslant 1$) mais pas entre A_{n-k} et A_{n_k-1}, si on supprime les îles $A_{n-1}, \ldots, A_{n-k}$ alors on obtient une bonne configuration avec $n-k$ îles. On en déduit comme ci-dessus qu'il y a $a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1$ bonnes configurations comportant un pont entre A_n et A_{n-1}.
On voit donc que $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1$.
On en déduit de proche en proche que $a_4 = 8$, $a_5 = 21$, $a_6 = 55$ et $a_7 = 144$.

Exercice 4. Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous x et y réels, on ait l'égalité

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy)).$$

Solution de l'exercice 4 Pour $y = 0$ on trouve que $f(x) = f(x) + f(f(1))$ donc $f(f(1)) = 0$.
Pour $x = 0$ on trouve $f(y) = f(-y) + f(f(1))$ donc $f(y) = f(-y)$ pour tout y.
Pour $y = 1$ on obtient $f(x+1) = f(x-1) + f(f(1-x))$. En remplaçant x par $-x+2$, il vient $f(-x+3) = f(-x+1) + f(f(x-1))$.

Or, $f(x-1) = f(1-x)$ donc $f(f(1-x)) = f(f(x-1))$. Par conséquent, $f(x+1) = f(x-1) + f(-x+3) - f(-x+1) = f(x-3)$ puisque $f(-t) = f(t)$ pour tout t.
On en déduit, en remplaçant x par $x+1$, que $f(x+2) = f(x-2)$ pour tout x.
Prenons $y = 2$ dans l'équation fonctionnelle. On a $f(x+2) = f(x-2) + f(f(1-2x))$, donc $f(f(1-2x)) = 0$ pour tout x. En remplaçant x par $(1-t)/2$, on trouve que $f(f(t)) = 0$ pour tout r.
On revient à l'équation fonctionnelle : $f(x+y) = f(x-y)+f(f(1-xy))$, donc $f(x+y) = f(x-y)$ pour tous x et y. On prend $x = y = t/2$: il vient $f(t) = f(0)$, donc f est constante. Comme $f(f(1)) = 0$, cette constante est nulle, et finalement $f(x) = 0$ pour tout x.

Exercice 5. a) Trouver tous les entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ tels que $\dfrac{5^m + 2^{n+1}}{5^m - 2^{n+1}}$ soit le carré d'un entier.
b) Plus généralement, trouver tous les entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, ainsi que les nombres premiers p, tels que $\dfrac{5^m + 2^n p}{5^m - 2^n p}$ soit le carré d'un entier.

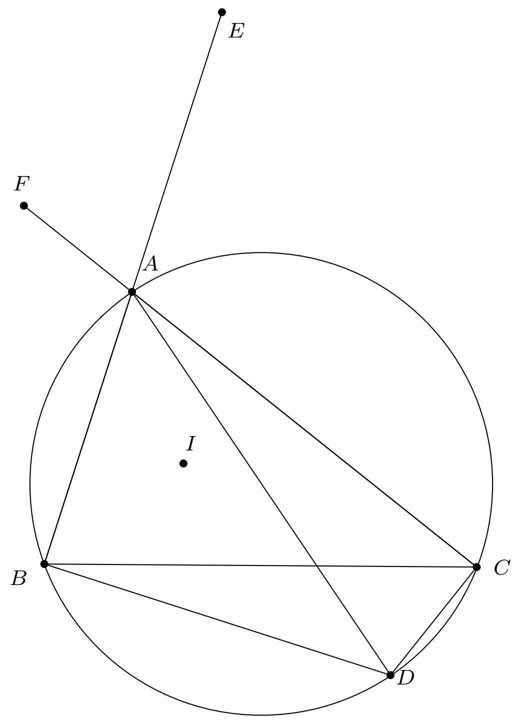
Solution de l'exercice 5 a) Voir exercice 2 ci-dessus.
b) Supposons que $p = 5$. Alors $\dfrac{5^{m-1} + 2^n}{5^{m-1} - 2^n}$ est le carré d'un entier. D'après la partie a) (qui marchait aussi dans le cas d'entiers $\geqslant 0$, on a $\boxed{m = n = 2}$.
Supposons enfin $p \neq 2$ et $p \neq 5$. Soit d le PGCD de $5^m + 2^n p$ et de $5^m - 2^n p$. Alors d divise $5^m + 2^n p + 5^m - 2^n p = 2 \times 5^m$. Comme d est le PGCD de deux nombres impairs, il est impair, donc il divise 5^m.
De plus, d divise $5^m + 2^n p - (5^m - 2^n p) = 2^{n+1} p$ et il est impair, donc il divise p. Comme p et 5 sont premiers entre eux, en en déduit que $d = 1$ et que $5^m - 2^n p = 1$; de plus, $5^m + 2^n p = a^2$ pour un certain entier a.
On a donc $(a-1)(a+1) = a^2 - 1 = 2^{n+1} p$.
Le PGCD de $a-1$ et de $a+1$ divise $(a+1) - (a-1) = 2$, donc il vaut 1 ou 2. De plus, $a-1$ et $a+1$ sont de même parité, et leur produit est pair, donc leur PGCD vaut 2. On en déduit que ($a - 1 = 2$, $a + 1 = 2^n p$) ou ($a - 1 = 2p$, $a + 1 = 2^n$) ou ($a - 1 = 2^n$, $a + 1 = 2p$).
Dans le premier cas on aurait $a = 3$, donc $4 = a + 1 = 2^n p$, ce qui est impossible.
Dans le deuxième cas, on a $p = 2^{n-1} - 1$. Comme p est premier, $n = 1$ et $n = 2$ ne conviennent pas donc $n \geqslant 3$. Par conséquent, $5^m = 2^n p + 1 \equiv 1\,[8]$. Comme $5^{2\ell+1} = 5 \times 25^\ell \equiv 5 \times 1^\ell = 5\,[8]$, l'entier m est nécessairement pair. Posons $m = 2\ell$, alors $(5^\ell - 1)(5^\ell + 1) = 2^n p$. L'un des facteurs est égal à $2p$ et l'autre à 2^{n-1}. Comme leur différence est égale 2, on a $\pm 2 = 2p - 2^{n-1} = 2p - (p+1) = p - 1$, donc $\boxed{p = 3,\ n = 3 \text{ et } m = 2}$.
Dans le troisième cas, on a $p = 2^{n-1} + 1$. On ne peut pas avoir $n = 1$, sinon $p = 2$. Si $n = 2$ alors $p = 3$ et $5^m = 1 + 2^n p = 13$. Impossible. Donc $n \geqslant 3$. Le même raisonnement que plus haut conduit à $m = 2\ell$ avec $\pm 2 = 2p - 2^{n-1} = 2p - (p-1) = p + 1$, ce qui contredit $p \geqslant 3$.

Exercice 6. Soit I le centre du cercle inscrit à un triangle ABC. Soit D le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit. On suppose que le point E de la demi-droite $[BA)$ et le point F de la demi-droite $[CA)$ satisfont la condition

$$BE = CF = \frac{AB + BC + CA}{2}.$$

Montrer que $(EF) \perp (DI)$.

Solution de l'exercice 6



Notons a, b, c les longueurs des côtés, r le rayon du cercle inscrit et $p = (a+b+c)/2$.
Comme $[AD]$ est un diamètre, les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ACD}$ sont droits donc

$$\begin{aligned} DE^2 - DF^2 &= (DB^2 + BE^2) - (DC^2 + CF^2) = DB^2 - DC^2 \\ &= (AD^2 - DC^2) - (AD^2 - DB^2) = AC^2 - AB^2 \\ &= b^2 - c^2. \end{aligned}$$

D'autre part, si C' est le point de contact du cercle inscrit avec $[AB]$, on sait que $BC' = p - b$, donc $C'E = BE - BC' = b$. Il vient $IE^2 = (IC')^2 + (C'E)^2 = r^2 + b^2$, et de même $IF^2 = r^2 - c^2$, donc

$$DE^2 - DF^2 = IE^2 - IF^2.$$

Ceci signifie que les points D et I ont la même différence de puissances par rapport à E et F (considérés comme des cercles de rayon nul), donc $(DI) \perp (EF)$.

Précision : expliquons pourquoi si C et C' sont deux cercles de centres O et O', et si $P_C(A) - P_{C'}(A) = P_C(B) - P_{C'}(B)$ alors $(AB) \perp (OO')$. Notons R et R' les rayons des cercles et C, D les projetés respectifs de A et B sur (OO').
On a $P_C(A) - P_{C'}(A) = OA^2 - O'A^2 - (R^2 - (R')^2) = OC^2 - O'C^2 - (R^2 - (R')^2)$, donc $OC^2 - O'C^2 = OD^2 - O'D^2$. Ceci s'écrit encore $(\overline{OC} - \overline{O'C})(\overline{OC} + \overline{O'C}) = (\overline{OD} - \overline{O'D})(\overline{OD} + \overline{O'D})$, ou encore $2\overline{O'O} \cdot \overline{MC} = 2\overline{O'O} \cdot \overline{MD}$ où M est le milieu de $[O'O]$. Par conséquent, $C = D$, et donc $(AB) = (AC) \perp (OO')$.