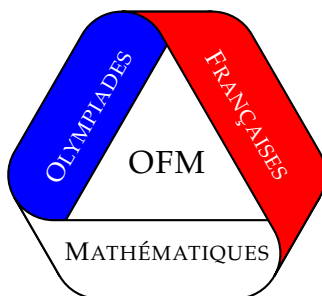


OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 23 FÉVRIER
DURÉE : 4 HEURES

Instructions

- ▷ Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Exercice 1. Prouver que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :
$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} \geq \frac{n-1}{2n+2}.$$

N.B. Si $a > 0$, on note $\sqrt[k]{a}$ l'unique nombre réel $b > 0$ tel que $b^k = a$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle non rectangle tel que $AB < AC$. On note H le projeté de A sur (BC) , et E, F les projetés respectifs de H sur (AB) et (AC) . La droite (EF) coupe (BC) au point D . On considère le demi-cercle de diamètre $[CD]$ situé dans le même demi-plan délimité par (CD) que A . Soit K le point de ce demi-cercle qui se projette sur B . Montrer que (DK) est tangente au cercle KEF .

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier. Un groupe de $2n$ personnes se réunit. Chacune de ces personnes possède au moins n amies dans ce groupe (en particulier, si A est amie avec B alors B est amie avec A , et on n'est pas ami avec soi-même). Prouver que l'on peut disposer ces $2n$ personnes autour d'une table ronde de sorte que chacune soit entre deux de ses amies.