OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 26 FÉVRIER

CORRIGÉ

Exercice 1. Les cases d'une grille à 10 lignes et 10 colonnes sont coloriées en blanc et en noir. Un coloriage de ces cases est dit *homogène* s'il contient un carré 3×3 monochrome, et *inhomogène* sinon. Montrer qu'il existe plus de coloriages inhomogènes que de coloriages homogènes.

Solution de l'exercice 1 Il y a 2^{100} coloriages possibles. Si c est un carré 3×3, le nombre de coloriages tels que c soit monochrome est égal à $2\times 2^{91}=2^{92}$. Or, il y a 64 carrés 3×3, donc il y a au plus $64\times 2^{92}=2^{98}$ coloriages homogènes.

Exercice 2. Montrer que si a,b,c sont des nombres réels positifs vérifiant $a+b+c=1$ alors

$$\frac{7+2b}{1+a}+\frac{7+2c}{1+b}+\frac{7+2a}{1+c}\geqslant\frac{69}{4}.$$

Solution de l'exercice 2 Comme $7+2b=5+2(1+b)$, on écrit le membre de gauche sous la forme

$$5\Big(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\Big)+2\Big(\frac{1+b}{1+a}+\frac{1+c}{1+b}+\frac{1+a}{1+c}\Big).$$

En utilisant l'inégalité $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant\frac{9}{x+y+z}$, on minore le premier terme par $\frac{45}{4}$.
En utilisant l'inégalité $x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$, on minore le second terme par 6. L'assertion à démontrer en découle.

Exercice 3. Soit ABC un triangle, et M le milieu de $[BC]$. On note I_b et I_c les centres des cercles inscrits à AMB et AMC. Montrer que le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABI_b et ACI_c se situe sur la droite (AM).

Solution de l'exercice 3 Soit T l'intersection entre le cercle de diamètre $[BC]$ et la demi-droite $[MA)$. Il suffit de montrer que T appartient au cercle ABI_b (par symétrie des rôles de B et C, ceci montrera qu'il appartient également au cercle ACI_c).
Comme $\widehat{BTC}$ est droit, on a $\widehat{ATB}=90°+\frac{1}{2}\widehat{AMB}=\widehat{AI_bB}$.

Exercice 4. Soit $n\geqslant 1$ un entier. On suppose qu'il existe exactement 2005 couples (x,y) d'entiers naturels tels que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$. Montrer que n est le carré d'un entier.
N.B. Si $x\neq y$ alors $(x,y)\neq(y,x)$.

Solution de l'exercice 4 On remarque que $x>n$ et $y>n$.
L'équation s'écrit $xy=n(x+y)$, ou encore $n^2=(x-n)(y-n)$. On en déduit qu'il y a exactement 2005 couples d'entiers naturels (u,v) tels que $n^2=uv$.
Si $n^2=uv$ alors u est un diviseur de n^2. Réciproquement, si u est un diviseur de n^2 alors l'équation $n^2=uv$ détermine uniquement v. On en déduit que n^2 admet exactement 2005 diviseurs.
Ecrivons $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$ avec p_i premiers distincts et α_i entiers. On a donc $n^2=p_1^{2\alpha_1}\cdots p_r^{2\alpha_r}$. On sait que le nombre de diviseurs de n^2 est égal à $(2\alpha_1+1)\cdots(2\alpha_r+1)$. Or, la décomposition en facteurs premiers de 2005 est 5×401, donc soit $r=1$ et $2\alpha_1+1=2005$, soit $r=2$ et $2\alpha_1+1=5$, $2\alpha_2+1=401$. Dans tous les cas, les α_i sont pairs donc n est un carré parfait.