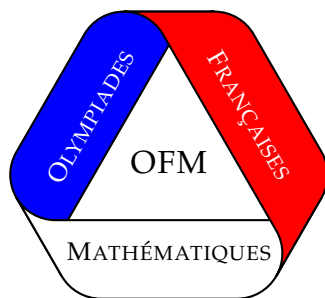


OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 26 FÉVRIER
CORRIGÉ

Exercice 1. Les cases d'une grille à 10 lignes et 10 colonnes sont coloriées en blanc et en noir. Un coloriage de ces cases est dit *homogène* s'il contient un carré 3×3 monochrome, et *inhomogène* sinon. Montrer qu'il existe plus de coloriages inhomogènes que de coloriages homogènes.

Solution de l'exercice 1 Il y a 2^{100} coloriages possibles. Si c est un carré 3×3 , le nombre de coloriages tels que c soit monochrome est égal à $2 \times 2^{91} = 2^{92}$. Or, il y a 64 carrés 3×3 , donc il y a au plus $64 \times 2^{92} = 2^{98}$ coloriages homogènes.

Exercice 2. Montrer que si a, b, c sont des nombres réels positifs vérifiant $a + b + c = 1$ alors

$$\frac{7 + 2b}{1 + a} + \frac{7 + 2c}{1 + b} + \frac{7 + 2a}{1 + c} \geq \frac{69}{4}.$$

Solution de l'exercice 2 Comme $7 + 2b = 5 + 2(1 + b)$, on écrit le membre de gauche sous la forme

$$5\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) + 2\left(\frac{1+b}{1+a} + \frac{1+c}{1+b} + \frac{1+a}{1+c}\right).$$

En utilisant l'inégalité $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$, on minore le premier terme par $\frac{45}{4}$.

En utilisant l'inégalité $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, on minore le second terme par 6. L'assertion à démontrer en découle.

Exercice 3. Soit ABC un triangle, et M le milieu de $[BC]$. On note I_b et I_c les centres des cercles inscrits à AMB et AMC . Montrer que le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABI_b et ACI_c se situe sur la droite (AM) .

Solution de l'exercice 3 Soit T l'intersection entre le cercle de diamètre $[BC]$ et la demi-droite $[MA)$. Il suffit de montrer que T appartient au cercle ABI_b (par symétrie des rôles de B et C , ceci montrera qu'il appartient également au cercle ACI_c).

Comme \widehat{BTC} est droit, on a $\widehat{ATB} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{AMB} = \widehat{AI_bB}$.

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ un entier. On suppose qu'il existe exactement 2005 couples (x, y) d'entiers naturels tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$. Montrer que n est le carré d'un entier.

N.B. Si $x \neq y$ alors $(x, y) \neq (y, x)$.

Solution de l'exercice 4 On remarque que $x > n$ et $y > n$.

L'équation s'écrit $xy = n(x+y)$, ou encore $n^2 = (x-n)(y-n)$. On en déduit qu'il y a exactement 2005 couples d'entiers naturels (u, v) tels que $n^2 = uv$.

Si $n^2 = uv$ alors u est un diviseur de n^2 . Réciproquement, si u est un diviseur de n^2 alors l'équation $n^2 = uv$ détermine uniquement v . On en déduit que n^2 admet exactement 2005 diviseurs.

Ecrivons $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ avec p_i premiers distincts et α_i entiers. On a donc $n^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdots p_r^{2\alpha_r}$. On sait que le nombre de diviseurs de n^2 est égal à $(2\alpha_1 + 1) \cdots (2\alpha_r + 1)$. Or, la décomposition en facteurs premiers de 2005 est 5×401 , donc soit $r = 1$ et $2\alpha_1 + 1 = 2005$, soit $r = 2$ et $2\alpha_1 + 1 = 5$, $2\alpha_2 + 1 = 401$. Dans tous les cas, les α_i sont pairs donc n est un carré parfait.