OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 23 FÉVRIER : CORRIGÉ

Exercice 1. Prouver que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} \geq \frac{n-1}{2n+2}$.

N.B. Si $a > 0$, on note $\sqrt[k]{a}$ l'unique nombre réel $b > 0$ tel que $b^k = a$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On raisonne par récurrence sur $n \geq 2$.

Pour $n = 2$, on a bien $\dfrac{1}{\sqrt{24}} > \dfrac{1}{6}$.

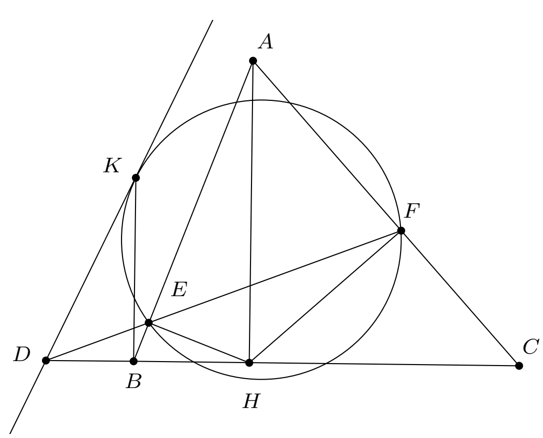
Supposons que l'inégalité désirée soit vraie pour la valeur $n-1 \geq 2$. Pour la valeur n, le membre de droite augmente de $\dfrac{n-1}{2n+2} - \dfrac{n-2}{2n} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, il suffit donc de prouver que $\dfrac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} \geq \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Or, pour $k = 1, 2, \cdots, n$, on a $(n-k)(n-k+1) \geq 0$,
donc $0 \leq k(2n-k+1) \leq n(n+1)$.
En multipliant ces inégalités membre à membre, il vient $(2n)! \leq (n(n+1))^n$, d'où la conclusion.

Exercice 2. Soit ABC un triangle non rectangle tel que $AB < AC$. On note H le projeté de A sur (BC), et E, F les projetés respectifs de H sur (AB) et (AC). La droite (EF) coupe (BC) au point D. On considère le demi-cercle de diamètre $[CD]$ situé dans le même demi-plan délimité par (CD) que A. Soit K le point de ce demi-cercle qui se projette sur B. Montrer que (DK) est tangente au cercle KEF.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>



Comme $AEHF$ sont cocycliques (sur le cercle de diamètre $[AH]$), on a $(EF, EA) = (HF, HA) = (HF, CA) + (CA, CB) + (CB, HA) = (CA, CB) = (CF, CB)$, donc $(EF, EB) = (CF, CB)$. Par conséquent, B, E, F, C sont cocycliques. D'après la puissance d'un point par rapport à un cercle, on a $DE \cdot DF = DB \cdot DC$. D'autre part, comme DKC est rectangle en K, les triangles DKB et DCK sont semblables, ce qui implique $\frac{DK}{DB} = \frac{DC}{DK}$, ou encore $DK^2 = DB \cdot DC$.
Il vient $DK^2 = DE \cdot DF$, et donc d'après la puissance de D par rapport au cercle KEF, on en déduit que (DK) est tangente en K au cercle KEF.

Remarque : le choix du demi-cercle n'a pas d'importance.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier. Un groupe de $2n$ personnes se réunit. Chacune de ces personnes possède au moins n amies dans ce groupe (en particulier, si A est amie avec B alors B est amie avec A, et on n'est pas ami avec soi-même). Prouver que l'on peut disposer ces $2n$ personnes autour d'une table ronde de sorte que chacune soit entre deux de ses amies.

Solution de l'exercice 3 Considérons une disposition arbitraire des invités :

$$AB....A.$$

où A, B désignent des personnes différentes, mais les deux A représentent la même personne (on est autour d'une table ronde).
Dans ce qui suit, on considérera la disposition comme une suite de personnes, ordonnée de gauche à droite.
Si deux voisins ne sont pas amis, on dira que c'est une *tension*.

S'il n'y a aucune tension, c'est fini.
S'il existe une tension, par symétrie circulaire, on peut toujours supposer que A et B ne sont pas amis.
Comme B a au moins n amis, plus lui-même, on en déduit que B a au plus $n - 1$ "ennemis".

Supposons que dans la disposition ci-dessus et après B, on ne trouve jamais deux voisins A' et B' (dans cet ordre) qui sont amies respectivement de A et de B.
Alors, comme une telle disposition n'arrive pas non plus avant B, on en déduit qu'elle n'apparaît jamais, et donc qu'à droite de chaque ami de A doit se trouver un ennemi de B. Donc, le nombre d'ennemis de B est au moins égal au nombre d'amis de A, ce qui implique $n - 1 \geq n$. Contradiction.

Par suite, on peut trouver deux voisins A' et B' (dans cet ordre) qui sont amies respectivement de A et de B.
La disposition est alors de la forme :

$$AB...A'B'...A.$$

Dans ces conditions, on peut éliminer la tension entre A et B en renversant l'ordre des personnes entre B et A' :

$$A(B...A')B'...A \to A(A'...B)B'...A.$$

Cela fournit une nouvelle disposition mais avec au moins une tension de moins que dans la précédente, puisque clairement la modification ne crée pas de nouvelle tension (par contre, elle peut éliminer une tension éventuelle entre A' et B').
En répétant cette procédure autant que nécessaire (un nombre fini de fois en tout cas, puisque le nombre initial de tensions est fini), on fait disparaître toutes les tensions, et l'objectif est atteint.