OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE DÉCEMBRE

Mercredi 2 décembre 2015

Durée : 4 heures

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**

- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Exercice 1. Soit $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ des réels tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 0$.
Prouver qu'il existe au moins $2n-1$ couples (a_i, a_j) avec $i < j$ tels que $a_i + a_j \geq 0$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus, et H son orthocentre. Les bissectrices de $\widehat{ABH}$ et $\widehat{ACH}$ se coupent en un point I. Montrer que I est aligné avec les milieux de $[BC]$ et de $[AH]$.

Exercice 3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_3(n)$ la valuation 3-adique de n, c'est-à-dire le plus grand entier k tel que n est divisible par 3^k. On pose $u_1 = 2$ et $u_n = 4v_3(n) + 2 - \frac{2}{u_{n-1}}$ pour tout $n \geqslant 2$ (si tant est que u_{n-1} soit défini et non nul).
Montrer que, pour tout nombre rationnel strictement positif q, il existe un et un seul entier $n \geqslant 1$ tel que $u_n = q$.