OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE DÉCEMBRE 2015 : CORRIGÉ

Exercice 1. Soit $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ des réels tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 0$.
Prouver qu'il existe au moins $2n-1$ couples (a_i, a_j) avec $i < j$ tels que $a_i + a_j \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 1 Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2n}$. On distingue deux cas :

• Si $a_n + a_{2n-1} \geq 0$ alors on a $a_i + a_{2n-1} \geq 0$ pour $i = n, \cdots, 2n-2$, et $a_i + a_{2n} \geq 0$ pour $i = n \cdots, 2n-1$. Cela fournit bien $2n-1$ sommes positives ou nulles.

• Si $a_n + a_{2n-1} < 0$ alors

$$a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_{n+1} + \cdots a_{2n-2} + a_{2n} > 0. \qquad (1)$$

D'autre part, on a $0 > a_n + a_{2n-1} \geq a_{n-1} + a_{2n-2} \geq \cdots \geq a_2 + a_{n+1}$, donc

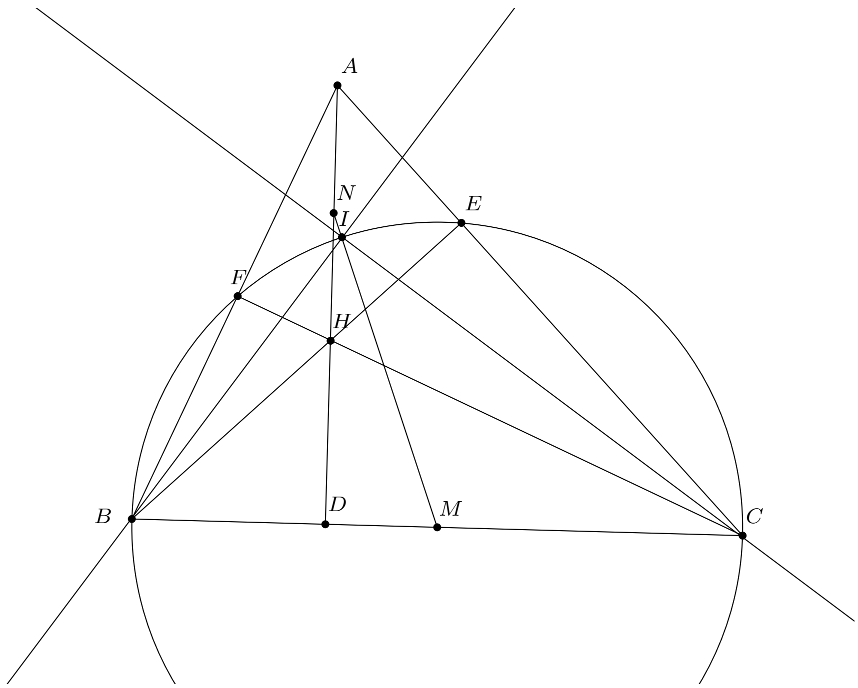
$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-2} < 0. \qquad (2)$$

De (1) et (2), on déduit que $a_1 + a_{2n} \geq 0$, ce qui assure que $a_i + a_{2n} \geq 0$ pour $i = 1, \cdots 2n-1$.

Autre solution. Notons $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_\ell$ les entiers positifs ou nuls parmi $a_1, \dots, a_{2n}$.
Premier cas : $\ell > n$. Alors il y a au moins $\frac{\ell(\ell-1)}{2} \geq \frac{n(n+1)}{2}$ couples (a_i, a_j) avec $i < j$, $a_i \geqslant 0$ et $a_j \geqslant 0$. Or, $\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1) = \frac{n^2-3n+2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \geqslant 0$, donc il y a au moins $2n-1$ couples (a_i, a_j) avec $i < j$ tels que $a_i + a_j \geqslant 0$.
Deuxième cas : $\ell \leqslant n$. Notons $c_1 \leqslant \cdots \leqslant c_\ell$ les plus petits entiers parmi $a_1, \dots, a_{2n}$. Comme $\ell \leqslant n$, on a $c_\ell < 0$. De plus, $\sum_{i=1}^{2n} a_i$ est égal à la somme de $\sum_{i=1}^{\ell}(b_i + c_i)$ et de termes négatifs, donc $\sum_{i=1}^{\ell}(b_i + c_i) \geqslant 0$. Or, $b_\ell + c_\ell \geqslant b_i + c_i$ pour tout i, donc $b_\ell + c_\ell \geqslant 0$.
On forme ainsi déjà $2n - \ell$ couples (a_i, a_j) en prenant $a_j = b_\ell$ et a_i autre que $c_1, \dots, c_{\ell-1}, b_\ell$.
De plus, pour tout $k = 1, \dots, \ell-1$, on a $\sum_{i=1}^{\ell}(b_i + c_{i+k}) \geqslant 0$ (où par convention $c_{\ell+1} = c_1$, $c_{\ell+2} = c_2$, etc.), donc pour tout k il existe i tel que $b_i + c_{i+k} \geqslant 0$. Ceci fournit encore $\ell - 1$ couples supplémentaires.

Exercice 2. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus, et H son orthocentre. Les bissectrices de $\widehat{ABH}$ et $\widehat{ACH}$ se coupent en un point I. Montrer que I est aligné avec les milieux de $[BC]$ et de $[AH]$.

Solution de l'exercice 2



Notons D, E, F les pieds des hauteurs, O le centre du cercle circonscrit, M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[AH]$. On a $2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.
Or, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OA}$. Par conséquent, il suffit de montrer que (MI) est parallèle à (OA).
Comme BCF est un triangle rectangle en F, le point F est situé sur le cercle de centre M passant par B et C. Il en va de même pour le point E. La bissectrice de $\widehat{ABH}$ passe par le milieu de l'arc EF, et de même pour la bissectrice de $\widehat{ACH}$, donc I est le milieu de l'arc EF. En notant C' le milieu de $[AB]$, on en déduit les égalités d'angles de droites $(MI, MB) = 2(CI, CB) = (CE, CB) + (CF, CB) = (CA, CB) + (CF, AB) + (AB, CB)$.
D'autre part, $(OA, MB) = (OA, OC') + (OC', AB) + (AB, MB) = (CA, CB) + (CF, AB) + (AB, CB)$ car (OC') et (CF) sont parallèles.
Par conséquent, $(OA, MB) = (MI, MB)$, ce qui prouve que (OA) et (MI) sont parallèles.

Exercice 3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_3(n)$ la valuation 3-adique de n, c'est-à-dire le plus grand entier k tel que n est divisible par 3^k. On pose $u_1 = 2$ et $u_n = 4v_3(n) + 2 - \frac{2}{u_{n-1}}$ pour tout $n \geqslant 2$ (si tant est que u_{n-1} soit défini et non nul).
Montrer que, pour tout nombre rationnel strictement positif q, il existe un et un seul entier $n \geqslant 1$ tel que $u_n = q$.

Solution de l'exercice 3
Tout d'abord, notons que $u_1 = 2$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$, $u_4 = \frac{3}{2}$, $u_5 = \frac{2}{3}$ et $u_6 = 3$. On prouve par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $0 < u_n$ et

$$0 < u_{3n-1} < 1 < u_{3n-2} < 2 < u_{3n} = 2 + u_n :$$

c'est déjà vrai pour $n = 2$.
Puisque $u_{3n} = u_n + 2$, on montre successivement que u_{3n+1}, u_{3n+2} et u_{3n+3} sont bien définis, avec

$$u_{3n+1} = 2 - \tfrac{2}{u_{3n}} = 1 + \tfrac{u_n}{2+u_n}, \text{ donc } 1 < u_{3n+1} < 2\ ;$$
$$u_{3n+2} = 2 - \tfrac{2}{u_{3n+1}} = 1 + \tfrac{u_n}{1+u_n}, \text{ donc } 0 < u_{3n+2} < 1\ ;$$
$$u_{3n+3} = 4v_3(3(n+1)) + 2 - \tfrac{2}{u_{3n+2}} = 4v_3(n) + 4 - \tfrac{2}{u_n} = 2 + u_{n+1}.$$

Ceci conclut la récurrence.
Maintenant, considérons la fonction $\varphi : \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \text{ et } x \notin \{1,2\}\} \mapsto \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x\}$ telle que

$$\begin{aligned}\varphi : x &\mapsto \tfrac{x}{1-x} \text{ si } 0 < x < 1\,; \\ x &\mapsto 2\tfrac{x-1}{2-x} \text{ si } 1 < x < 2\,; \\ x &\mapsto x - 2 \text{ si } 2 < x.\end{aligned}$$

En outre, pour toute fraction irréductible $\frac{p}{q}$, avec $p \geq 0$ et $q > 0$, on pose $\left\|\frac{p}{q}\right\| = p + q$. Alors :

- $\left\|\varphi\left(\frac{p}{q}\right)\right\| = \left\|\frac{p}{q-p}\right\| = p < p + q = \left\|\frac{p}{q}\right\|$ si $0 < p < q$;
- $\left\|\varphi\left(1 + \frac{p}{q}\right)\right\| = \left\|2\frac{p}{q-p}\right\| \leq 2q < (p+q) + q = \left\|1 + \frac{p}{q}\right\|$ si $0 < p < q$;
- $\left\|\varphi\left(2 + \frac{p}{q}\right)\right\| = \left\|\frac{p}{q}\right\| = p + q < (p+2q) + q = \left\|2 + \frac{p}{q}\right\|$ si $0 < p$ et $0 < q$.

Dans tous les cas, si x est un rationnel strictement positif tel que $x \notin \{1, 2\}$, on a $\|\varphi(x)\| < \|x\|$.
Or, pour tout rationnel strictement positif x et pour tout entier $n \geq 1$:

- si $0 < x < 1$, alors $u_n = \varphi(x) \Leftrightarrow u_{3n+2} = x$;
- si $1 < x < 2$, alors $u_n = \varphi(x) \Leftrightarrow u_{3n+1} = x$;
- si $2 < x$, alors $u_n = \varphi(x) \Leftrightarrow u_{3n} = x$.

Une récurrence sur $\|x\|$ montre donc immédiatement que, pour tout rationnel strictement positif x, il existe un entier unique entier $n \geq 1$ tel que $u_n = x$, ce qui conclut l'exercice.