Olympiades Françaises de Mathématiques 2015-2016

Envoi Numéro 4 – Combinatoire

À renvoyer au plus tard le Vendredi 12 Février

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué :
* des collégiens ;
* des élèves de Seconde qui n'étaient pas à l'OFM en 2014-2015.

Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soit $n \geqslant 2$. On place une pièce sur chaque case d'un échiquier $n \times n$. Un *mouvement* consiste à déplacer chaque pièce sur une case qui touche la case de départ par un coin exactement (plusieurs pièces peuvent se retrouver sur la même case).
Quel est le plus petit entier k tel qu'il est possible qu'après un certain nombre de mouvements, seules k cases contiennent au moins une pièce ?

Exercice 2. Soit A un ensemble de 13 entiers entre 1 et 37. Montrer qu'il existe quatre nombres deux à deux distincts dans A tels que la somme de deux d'entre eux est égale à la somme des deux autres.

Exercice 3. Les sept nains ont des tailles deux à deux distinctes. Ils se rendent à la mine en colonne dans un certain ordre, de telle manière que le nain en tête est plus grand que le deuxième, qui est plus petit que le troisième, qui est plus grand que le quatrième et ainsi de suite...
Combien y a-t-il de telles manières d'arranger les nains ?

Exercices communs

Exercice 4. Soit $n \geqslant 1$. On a un nombre fini de bouteilles, chacune contenant une quantité d'eau inférieure à 1 litre, telles que la quantité totale d'eau est de $\frac{n}{2}$ litres. On dispose également de n seaux vides.
Montrer qu'il est possible de vider chaque bouteille dans un seau (on peut vider plusieurs bouteilles dans le même seau, mais pas vider une bouteille en partie dans un seau et en partie dans un autre) de manière à avoir au plus 1 litre d'eau dans chaque seau.

Exercice 5. On note S l'ensemble des entiers de 1 à 2016. Combien y a-t-il de manières de partitionner S en deux sous-ensembles A et B de telle manière que ni A ni B ne contient deux entiers dont la somme est une puissance de 2 ?

Remarque. On dit que A et B forment une partition de S si ni A ni B n'est vide, si A et B sont d'intersection vide et si leur union est égale à S.

Exercice 6. Soit $n \geqslant 3$. Sur chaque sommet d'un n-gone régulier on place un signe $+$ ou $-$. A chaque étape, on a le droit de changer les signes de trois sommets consécutifs du n-gone.
Quels sont les n pour lesquels quelle que soit la configuration de départ on peut obtenir en un nombre fini d'étapes des $+$ sur tous les sommets ?

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit $n \geqslant 2$. On trace un circuit sur un échiquier $n \times n$ qui passe exactement une fois par chaque case et forme une boucle (deux cases consécutives sur le circuit doivent avoir un côté commun).
Montrer qu'il existe deux cases voisines sur l'échiquier telles que, si on "coupe" le circuit en ces deux cases, les deux chemins obtenus ont pour longueur au moins le quart de la longueur du circuit de départ.

Remarque. La *longueur* d'un chemin est le nombre de fois où il change de case. En particulier, si le circuit est découpé en deux chemins, la somme des longueurs des deux chemins vaudra toujours n^2.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On place des rectangles $1 \times n$ et $n \times 1$ sur un échiquier $2n \times 2n$, de telle manière que deux rectangles ne s'intersectent jamais et que chaque rectangle recouvre exactement n cases. Un ensemble de tels rectangles est dit *saturé* s'il est impossible d'ajouter un rectangle sans intersecter un rectangle déjà en place.
Trouver le plus petit k tel qu'il existe un ensemble saturé de k rectangles.

Exercice 9. Soient $n \geqslant 2$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels strictement positifs. On suppose qu'il est possible de séparer les a_i en deux sous-ensembles de même somme, et de même pour les b_i.
Montrer qu'il existe un $2n$-gone simple ayant exactement n côtés horizontaux et n côtés verticaux, dont les longueurs des côtés horizontaux sont exactement les a_i et dont les longueurs des côtés verticaux sont exactement les b_i.

Remarque. Un polygone simple est un polygone dont les côtés ne s'intersectent pas, sauf bien sûr deux côtés consécutifs en leur extrémité commune.