Olympiades Françaises de Mathématiques 2015-2016

Envoi Numéro 5 – Pot-Pourri

À renvoyer au plus tard le mardi 15 mars

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué :

* des collégiens ;
* des élèves de Seconde qui n'étaient pas à l'OFM en 2014-2015.

Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Déterminer tous les entiers naturels a pour lesquels il existe des nombres premiers p, q, r, pas forcément distincts, tels que

$$a = \frac{p+q}{r} + \frac{q+r}{p} + \frac{r+p}{q}.$$

Exercice 2. Au club théâtre d'un lycée, on a formé 14 groupes de 4 élèves afin de travailler les scènes d'une pièce. Deux groupes différents ont toujours un et un seul élève en commun.

a) Prouver qu'il existe un élève qui appartient à au moins 5 groupes.

b) Chaque élève du club est membre d'au moins un groupe. Combien y a-t-il d'élèves dans ce club ?

Exercice 3. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les diagonales ne sont pas perpendiculaires et tel que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles. On note O le point d'intersection de $[AC]$ et $[BD]$. Soit H_1 et H_2 les orthocentres respectifs des triangles AOB et COD. On désigne par M et N les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.
Prouver que les droites (H_1H_2) et (MN) sont parallèles si et seulement si $AC = BD$.

Exercice 4. Soit S un ensemble d'entiers strictement positifs tel que

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{y} \rfloor \text{ pour tous } x, y \in S.$$

Prouver que si $x, y, z, t \in S$ avec $(x, y) \neq (z, t)$ et $(x, y) \neq (t, z)$, alors $xy \neq zt$.
($\lfloor .. \rfloor$ désigne la partie entière.)

Exercices du groupe A

Exercice 5. Soit $n \geqslant 5$ un entier, et $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{1, 2, \cdots, n\}$. Prouver que les nombres $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \cdots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ donnent au moins $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ restes distincts modulo n.
($\lfloor .. \rfloor$ désigne la partie entière.)

Exercice 6. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle acutangle ABC, et H' le symétrique de H par rapport au milieu de $[BC]$. Les tangentes au cercle circonscrit à ABC en B et en C se rencontrent en X. La perpendiculaire à (XH') en H' rencontre la droite (AB) en Y, et la droite (AC) en Z.
Prouver que $\widehat{YXB} = \widehat{ZXC}$.

Exercice 7. Soit a_1, a_2 et a_3 des entiers strictement positifs. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on pose

$$a_{n+1} = \text{ppcm}(a_n, a_{n-1}) - \text{ppcm}(a_{n-1}, a_{n-2}),$$

étant entendu que l'on a $\text{ppcm}(0, x) = 0$ pour tout entier x.
Prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $k \leqslant a_3 + 4$ et $a_k \leqslant 0$.

Exercice 8. Un ensemble E fini et non vide de réels strictement positifs est dit *puissant* lorsque, pour tous $a, b \in E$ distincts, l'un au moins des nombres a^b et b^a appartient aussi à E. Déterminer le nombre maximal d'éléments que peut contenir un ensemble puissant.