Olympiades Françaises de Mathématiques 2015-2016

Envoi Numéro 5 – Pot-Pourri

Solutions

Exercice 1. Déterminer tous les entiers naturels a pour lesquels il existe des nombres premiers p, q, r, pas forcément distincts, tels que

$$a = \frac{p+q}{r} + \frac{q+r}{p} + \frac{r+p}{q}.$$

Solution de l'exercice 1 Tout d'abord, si $p = q = r$, alors on obtient $a = 6$, qui est bien une solution. Montrons qu'il s'agit de la seule solution, et supposons qu'il existe une solution $a = \frac{p+q}{r} + \frac{q+r}{p} + \frac{r+p}{q}$ avec p, q, r premiers et non tous égaux.

— Si deux des nombres p, q, r sont égaux, disons $p = q \neq r$, alors :

$$a = 2\left(\frac{p}{r} + \frac{r}{p}\right) + 2 = \frac{2(p^2+r^2)}{pr} + 2.$$

Ainsi, $\frac{2(p^2+r^2)}{pr}$ est un entier. On en déduit que le nombre premier p divise $2r^2$ tout en étant premier avec r, et donc que $p = 2$. Le raisonnement s'adapte mot pour mot pour prouver que $r = 2$, ce qui contredit que $r \neq p$. Il n'y a donc pas de solution dans ce cas.

— Si p, q, r sont deux à deux distincts alors, sans perte de généralité, on peut supposer que $p > q > r$ (on note qu'alors p et q sont impairs), et alors

$$apqr = pq(p+q) + qr(q+r) + rp(r+p).$$

Ainsi, p divise $qr(q+r)$. Puisque p est premier avec qr, il divise donc $q+r$. Mais $0 < q+r < 2p$ donc $p = q + r$. Cela implique que r est pair, et donc que $r = 2$. On a alors $p = q + 2$ et $a = (q+1) + 1 + \frac{q+4}{q} = q + 3 + \frac{4}{q}$. En particulier, $\frac{4}{q}$ soit être un entier, ce qui est impossible pour $q > 1$ impair. Il n'y a ainsi pas de solution dans ce cas, ce qui conclut.

Exercice 2. Au club théâtre d'un lycée, on a formé 14 groupes de 4 élèves afin de travailler les scènes d'une pièce. Deux groupes différents ont toujours un et un seul élève en commun.

a) Prouver qu'il existe un élève qui appartient à au moins 5 groupes.

b) Chaque élève du club théâtre est membre d'au moins un groupe. Combien y a-t-il d'élèves dans ce club ?

Solution de l'exercice 2

a) Soit G un des groupes. Chacun des 13 autres groupes a un élève en commun avec G. Or $13 = 3 \times 4 + 1$ donc, d'après le principe des tiroirs, un des quatre élèves de G, disons x, appartient à au moins 4 des neuf autres groupes. Avec G, cela signifie que x appartient à au moins 5 groupes.

b) Prouvons que x appartient à tous les groupes. On note $G = G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$ des groupes auxquels appartient x, puis on procède par l'absurde : supposons qu'il existe un groupe G' tel que $x \notin G'$.

Puisque G' a un élève en commun avec chacun des groupes G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 et, comme G' ne contient que quatre élèves, c'est que l'un des membres de G', disons y, appartient à deux de ces cinq groupes, disons G_i et G_j, avec $1 \leqslant i < j \leqslant 5$. Clairement, on a $x \neq y$, car $x \notin G'$ et $y \in G'$. Mais alors les groupes G_i et G_j ont x et y en commun, en contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé.

Ainsi, x appartient à tous les groupes. En enlevant x de chacun de ces 14 groupes, on obtient alors 14 groupes deux à deux disjoints de 3 élèves, soit $14 \times 3 = 42$ élèves. Il faut encore y ajouter x et, puisque chaque membre du club appartient à un des groupes, les membres sont alors bien tous comptés une et une seule fois.

Il y a donc exactement 43 membres dans le club.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les diagonales ne sont pas perpendiculaires et tel que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles. On note O le point d'intersection de $[AC]$ et $[BD]$. Soit H_1 et H_2 les orthocentres respectifs des triangles AOB et COD. On désigne par M et N les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

Prouver que les droites (H_1H_2) et (MN) sont parallèles si et seulement si $AC = BD$.

Solution de l'exercice 3 Soit A' et B' les pieds des hauteurs issues respectivement de A et B dans AOB. Soit C' et D' les pieds des hauteurs issues respectivement de C et D dans COD.

Les points A' et D' appartiennent donc au cercle Γ_1 de diamètre $[AD]$, et les points B' et C' appartiennent au cercle Γ_2 de diamètre $[BC]$. Les points A' et B' appartiennent donc au cercle Γ_3 de diamètre $[AB]$. En utilisant la puissance de H_1 par rapport à Γ_3, il vient $H_1A \cdot H_1A' = H_1B \cdot H_1B'$.

On en déduit que H_1 a la même puissance par rapport à Γ_1 et Γ_2, donc que H_1 appartient à l'axe radical de ces deux cercles, que l'on note Δ. De même, on a $H_2 \in \Delta$. Or, l'axe radical de deux cercles étant perpendiculaire à la droite qui relie leur centres, on a $(H_1H_2)\perp(PQ)$, où P et Q sont les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$.

Ainsi, $(H_1H_2) /\!/ (MN)$ si et seulement si $(MN)\perp(PQ)$. Or, d'après le théorème des milieux, il est facile de vérifier que $PMQN$ est un parallélogramme et que $MP = \frac{1}{2}BD$ et $MQ = \frac{1}{2}AC$. Par suite, $(MN)\perp(PQ)$ si et seulement si $PMQN$ est un losange, ce qui équivaut à $MP = MQ$, c'est-à-dire $AC = BD$.

Solution alternative Les points considérés étant définis uniquement par des intersections de droite et de relations d'orthogonalité (mais ne faisant intervenir ni égalités d'angles ni intersections de cercles ou de cercle et droite), on peut tenter une approche analytique, qui sera pénible mais humainement faisable.

Plaçons-nous dans un repère orthonormé de centre O et tel que les points A, B, C, D, O aient pour coordonnées respectives

$$\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}d\\bd\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Alors les points H_1, H_2, M, N ont pour coordonnées respectives

$$\begin{pmatrix}-1\\y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}d\\y_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-(a+1)/2\\-b/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(c+d)/2\\bd/2\end{pmatrix},$$

avec $\overrightarrow{AH_1} \cdot \overrightarrow{OB} = -(a-1) - y_1 b = 0$ et $\overrightarrow{CH_2} \cdot \overrightarrow{OD} = (d-c)d + y_2 bd = 0$, c'est-à-dire

$$y_1 = \frac{1-a}{b} \text{ et } y_2 = \frac{c-d}{b}.$$

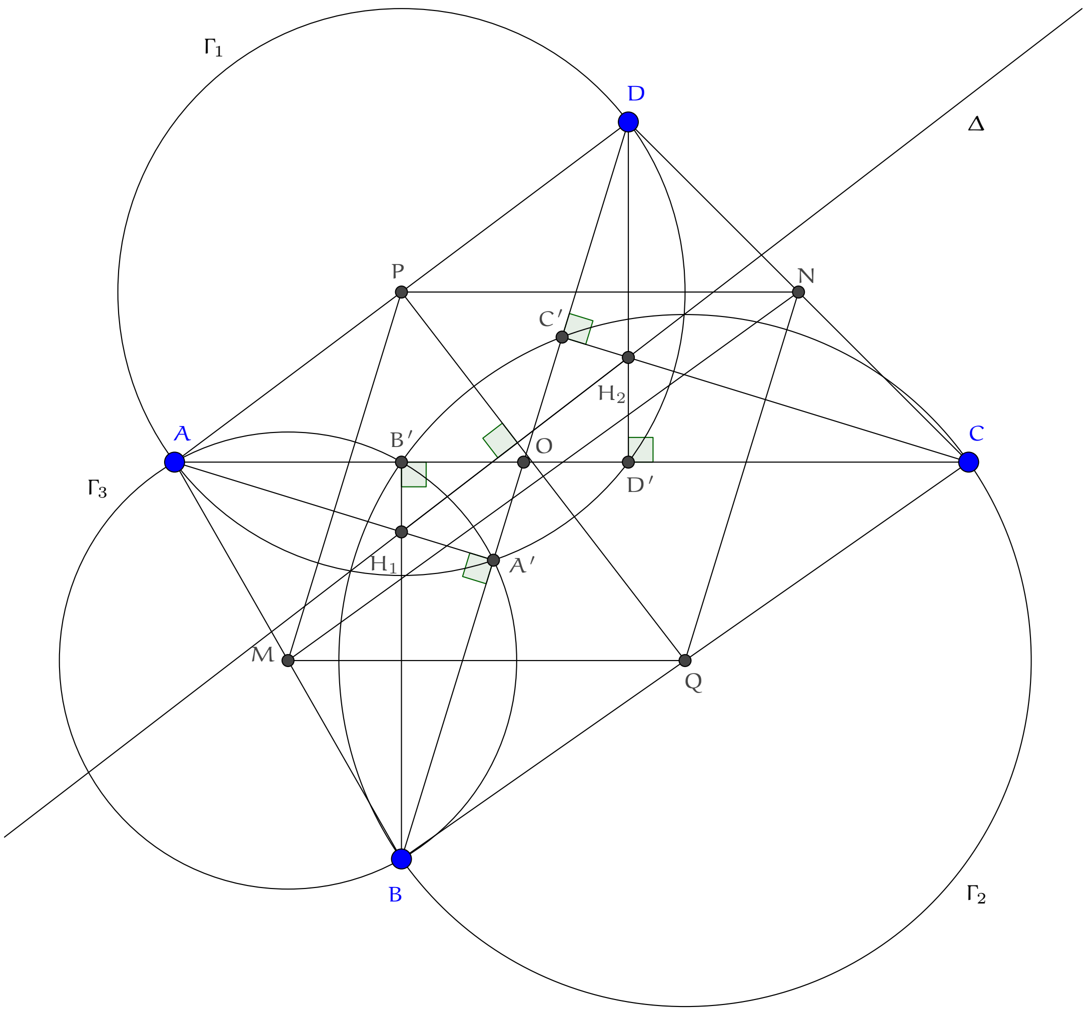
Les droites (H_1H_2) et (MN) sont parallèles si et seulement si elles ont même pente, c'est-à-dire si l'égalité

$$\frac{y_2 - y_1}{d+1} = \frac{bd+b}{c+d+a+1} \tag{1}$$

est vérifiée. On calcule donc que

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad b(d+1)^2 = (c+d+a+1)(y_2-y_1) = \frac{1}{b}(c+d+a+1)(c-d+a-1) \\
&\Leftrightarrow \quad b^2(d+1)^2 = (c+a)^2-(d+1)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad BD^2 = (d+1)^2(b^2+1) = (c+a)^2 = AC^2,
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.



Exercice 4. Soit S un ensemble d'entiers strictement positifs tel que

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \lfloor\sqrt{y}\rfloor \text{ pour tous} x, y \in S.$$

Prouver que si $x, y, z, t \in S$ avec $(x, y) \neq (z, t)$ et $(x, y) \neq (t, z)$, alors $xy \neq zt$.

($\lfloor..\rfloor$ désigne la partie entière.)

Solution de l'exercice 4 Supposons tout d'abord qu'il existe des entiers x_1, x_2, x_3, x_4 dans S tels que $x_1x_2 \leqslant x_3x_4$ et $x_1 + x_2 > x_3 + x_4$. Puisqu'il s'agit d'entiers, on a donc $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \geqslant 1$. Soit $n = \lfloor\sqrt{x_1}\rfloor$. Par définition de S, pour $i = 1, 2, 3, 4$, il existe donc un entier w_i tel que $0 \leqslant w_i \leqslant 2n$ et $x_i = n^2 + w_i$.

Les inégalités $x_1x_2 \leqslant x_3x_4$ et $x_1 + x_2 > x_3 + x_4$ deviennent respectivement

$$w_1 + w_2 - w_3 - w_4 \geqslant 1 \quad \text{et} \quad (w_1 + w_2 - w_3 + w_4)n^2 \leqslant w_3w_4 - w_1w_2.$$

En particulier, on doit avoir $w_3 > 0$, et donc

$$\begin{aligned} n^2 &\leqslant (w_1 + w_2 - w_3 + w_4)n^2 \leqslant w_3w_4 - w_1w_2 \\ &< w_3(w_1 + w_2 - w_3) - w_1w_2 = (w_1 - w_3)(w_3 - w_2) \\ &< \frac{((w_1 - w_3) + (w_3 - w_2))^2}{4} = \frac{(w_1 - w_2)^2}{4} \leqslant n^2, \end{aligned}$$

d'où la contradiction.

Soit alors x_1, x_2, x_3, x_4 dans S tels que $x_1x_2 = x_3x_4 = a$. D'après le lemme ci-dessus, on a donc $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = b$. Les nombres x_1 et x_2 d'une part, x_3 et x_4 d'autre part, sont alors les racines du polynôme $X^2 - aX + b$. On a alors $x_1 = x_3$ et $x_2 = x_4$, ou $x_1 = x_4$ et $x_2 = x_3$, ce qui conclut.

Exercice 5. Soit $n \geqslant 5$ un entier, et $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{1, 2, \cdots, n\}$. Prouver que les nombres $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \cdots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ donnent au moins $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ restes distincts modulo n.

($\lfloor .. \rfloor$ désigne la partie entière.)

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Pour $i = 1, \cdots, n$, on pose $b_i = a_1 + \cdots + a_i$. Procédons par l'absurde et supposons que les nombres $b_1, \cdots, b_n$ ne donnent qu'au plus $\sqrt{n}$ restes distincts modulo n.

Notons que, pour $i = 1, \cdots, n-1$, on a $a_{i+1} = b_{i+1} - b_i$, et seul celui des a_i qui vaut n peut donc conduire à $b_{i+1} - b_i \equiv 0 \pmod n$. Les nombres $b_{i+1} - b_i$ ne peuvent donc prendre, modulo n, qu'au plus $\sqrt{n}(\sqrt{n} - 1)$ valeurs non nulles distinctes. En tenant compte du a_i qui est égal à n et de a_n (qui n'est pas de la forme $b_{i+1} - b_i$), et puisque $n \geqslant 5$, les a_i prennent donc au plus

$$n - \sqrt{n} + 2 \leqslant n - \sqrt{5} + 2 < n$$

valeurs distinctes modulo n. Or, les a_i forment une permutation de $\{1, \cdots, n\}$ donc ils représentent tous les restes modulo n : il y a là une contradiction.

Les nombres $b_1, \cdots, b_n$ donnent donc au moins $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ restes distincts modulo n.

Exercice 6. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle acutangle ABC, et H' le symétrique de H par rapport au milieu de $[BC]$. Les tangentes au cercle circonscrit à ABC en B et en C se rencontrent en X. La perpendiculaire à (XH') en H' rencontre la droite (AB) en Y, et la droite (AC) en Z.

Prouver que $\widehat{YXB} = \widehat{ZXC}$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Soit P, Q et M les projetés orthogonaux respectifs de X sur (AB), (AC) et (BC). Clairement M est le milieu de $[BC]$. Les points X, H', Y, P sont sur le cercle de diamètre $[XY]$, et les points X, H', Z, Q sont sur le cercle de diamètre $[XZ]$ donc

$$\widehat{H'XY} = \widehat{YPH'} = \widehat{APH'} \quad \text{et} \quad \widehat{H'XZ} = \widehat{ZQH'} = \widehat{AQH'},$$

ce qui montre que $\widehat{ZXY} = \widehat{ZXH'} + \widehat{H'XY} = \widehat{AQH'} + \widehat{APH'} = \widehat{PH'Q} - \widehat{ABC}$.

Puisque $\widehat{BXC} = 180° - 2\widehat{BAC}$, pour conclure il suffit donc de prouver que $\widehat{PH'Q} = 180° - \widehat{BAC}$. Or, les points B, P, X, M sont sur le cercle de diamètre $[BX]$, donc

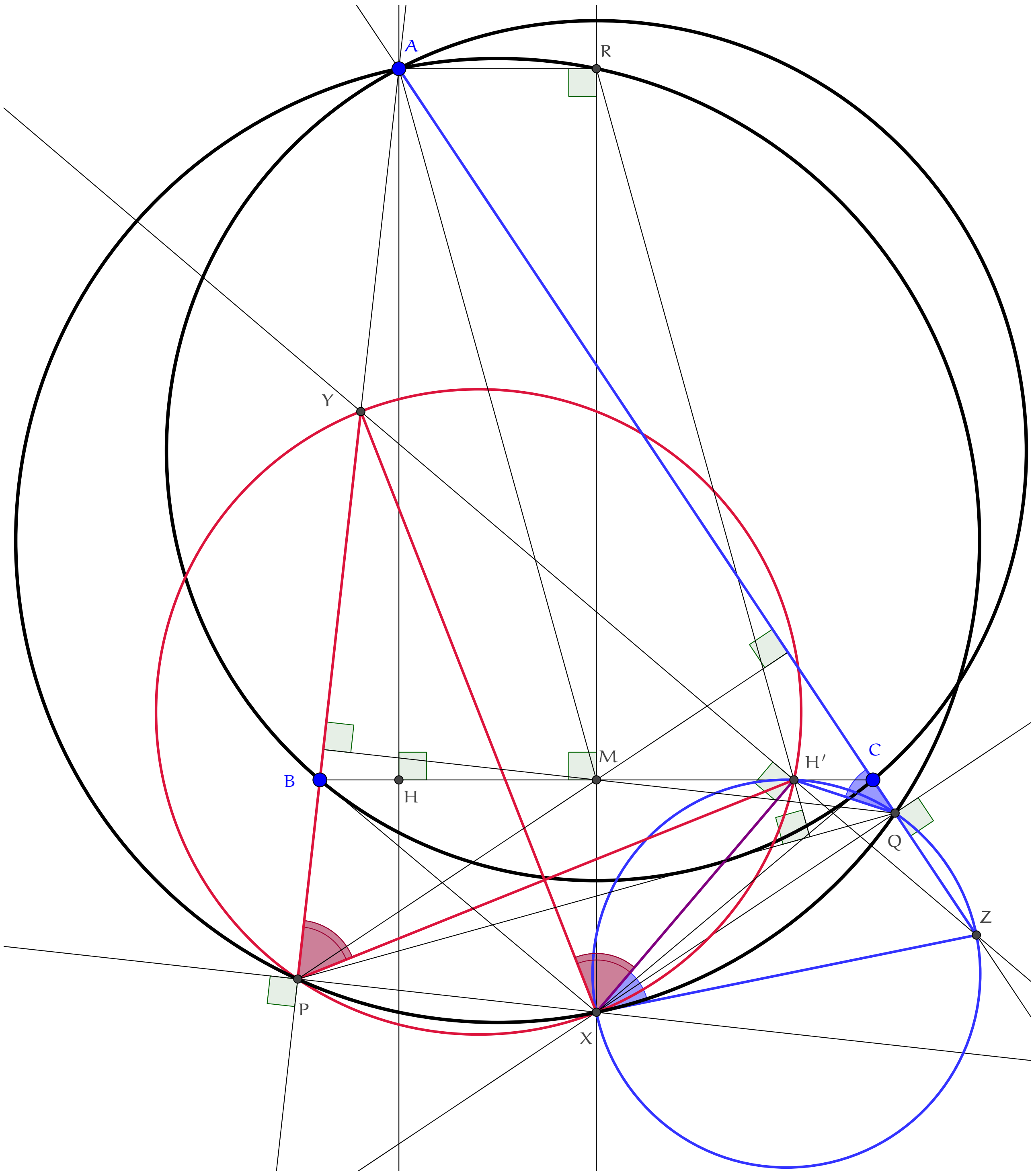
$$\widehat{APM} = \widehat{BPM} = \widehat{BXM} = 90° - \widehat{BAC},$$

ce qui montre que $(PM)\perp(AQ)$.

De même, (QM) est perpendiculaire à (AP), et M est donc l'orthocentre du triangle APQ. Cela assure que $(AM)\perp(PQ)$ et que $AM = 2r\cos(\widehat{PAQ})$, où r est le rayon du cercle circonscrit à APQ.

Soit R le projeté orthogonal de A sur (XM). Alors $ARMH$ est un parallélogramme, donc $ARH'M$ est aussi un parallélogramme. Les droites (RH') et (AM) sont alors parallèles, et ainsi (RH') et (PQ) sont perpendiculaires. D'autre part, puisque A, R, Q, X et P sont tous sur le cercle de diamètre $[AX]$, on a $\widehat{PRQ} = \widehat{PAQ} = \widehat{BAC}$. Par suite $RH' = AM = 2r\cos(\widehat{PAQ}) = 2r\cos(\widehat{PRQ})$, ce qui prouve que H' est en fait l'orthocentre de PRQ.

En particulier, on a $\widehat{PH'Q} = 180° - \widehat{PRQ} = 180° - \widehat{BAC}$, ce qui achève la démonstration.


A
R
Y
B
H
M
H′
C
Q
Z
P
X

Exercice 7. Soit $a_1, a_2 a_3$ des entiers strictement positifs. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on pose

$$a_{n+1} = \mathrm{ppcm}(a_n, a_{n-1}) - \mathrm{ppcm}(a_{n-1}, a_{n-2}),$$

étant entendu que l'on a $\mathrm{ppcm}(0, x) = 0$ pour tout entier x.

Prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $k \leqslant a_3 + 4$ et $a_k \leqslant 0$.

Solution de l'exercice 7 Si x et y sont des entiers, on note $x \vee y = \mathrm{ppcm}(x, y)$ et $x \wedge y = \mathrm{pgcd}(x, y)$, avec $\mathrm{pgcd}(0, x) = x$ pour tout x. On rappelle qu'alors $xy = (x \vee y)(x \wedge y)$.

Pour tout entier $n \geqslant 3$, a_{n-1} divise $a_n \vee a_{n-1}$ et $a_{n-1} \vee a_{n-2}$, donc que a_{n-1} divise a_{n+1} également. Mais alors, pour tout $n \geqslant 4$, le nombre a_{n-2} divise a_n, donc divise $a_n \vee a_{n-1}$ et $a_{n-1} \vee a_{n-2}$, et enfin divise a_{n+1}. Le nombre a_{n+1} est donc divisible par $a_{n-1} \vee a_{n-2}$. On pose maintenant $c_4 = \dfrac{a_5}{a_2 \vee a_3}$.

Montrons alors l'égalité (E_n) suivante pour tout entier $n \geqslant 4$ tel que $a_4, \ldots, a_n > 0$:

$$(a_{n-1} \vee a_{n-2})(4 + c_4 - n) = a_{n+1}.$$

Tout d'abord, par construction, l'égalité (E_4) est vraie. Supposons maintenant que l'égalités (E_{n-1}) est vraie, et déduisons-en que, si $a_4, \ldots, a_n > 0$, alors (E_n) est vraie aussi. Puisque a_{n-3} divise a_{n-1}, on observe que

$$\begin{aligned}
(a_{n-1} \wedge a_n)(a_{n-1} \vee a_{n-2}) &= (a_{n-1} \wedge (a_{n-1} \vee a_{n-2} - a_{n-2} \vee a_{n-3})) \cdot (a_{n-1} \vee a_{n-2} \vee a_{n-3}) \\
&= (a_{n-1} \wedge (a_{n-2} \vee a_{n-3})) \cdot (a_{n-1} \vee (a_{n-2} \vee a_{n-3})) \\
&= a_{n-1}(a_{n-2} \vee a_{n-3}).
\end{aligned}$$

Or, puisque

$$\begin{aligned}
(E_n) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_{n-1} \vee a_{n-2}} = 4 + c_4 - n = \frac{a_n}{a_{n-2} \vee a_{n-3}} - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a_n \vee a_{n-1}}{a_{n-1} \vee a_{n-2}} = \frac{a_n}{a_{n-1} \vee a_{n-2}} + 1 = \frac{a_n}{a_{n-2} \vee a_{n-3}} \\
&\Leftrightarrow \quad (a_{n-1} \vee a_{n-2}) a_n = (a_{n-2} \vee a_{n-3})(a_n \vee a_{n-1}) \\
&\Leftrightarrow \quad (a_{n-1} \vee a_{n-2}) a_n (a_n \wedge a_{n-1}) = (a_{n-2} \vee a_{n-3}) a_n a_{n-1},
\end{aligned}$$

on en déduit que (E_n) est bien vraie.

Il s'ensuit qu'il existe un entier naturel k, minimal, tel que $k \leqslant c_4 + 5$ et $a_k \leqslant 0$. Si $k \leqslant 5$, alors on a bien $k \leqslant a_3 + 4$. Sinon, alors $0 < a_5 < a_3 \vee a_4$ et $0 < a_4 < a_2 \vee a_3$, donc

$$c_4 = \frac{a_5}{a_2 \vee a_3} < \frac{a_3 \vee a_4}{a_2 \vee a_3} \leqslant \frac{a_3 a_4}{a_2 \vee a_3} < a_3,$$

donc $k \leqslant c_4 + 5 \leqslant a_3 + 4$, ce qui conclut.

Exercice 8. Un ensemble E fini et non vide de réels strictement positifs est dit *puissant* lorsque, pour tous $a, b \in E$ distincts, l'un au moins des nombres a^b et b^a appartient aussi à E. Déterminer le nombre maximal d'éléments que peut contenir un ensemble puissant.

Solution de l'exercice 8 Tout d'abord, l'ensemble

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right\}$$

est un ensemble puissant qui contient quatre éléments. Soit S un ensemble puissant, et n son cardinal : nous allons montrer que $n \leqslant 4$.

Démontrons d'abord le lemme suivant : il n'existe pas d'éléments a et b de S tels que $a < 1 < b$. En effet, si l'on avait $a < 1 < b$, alors $a^b < a < 1 < b^a < b$; en prenant $a = \min S$ et $b = \min\{s \in S : 1 < s\}$, on s'assurerait donc que ni a^b ni b^a n'appartient à S, contredisant le fait que S est puissant.

D'autre part, si S est un ensemble puissant, alors $S \cup \{1\}$ l'est aussi. Notre recherche d'un ensemble puissant de cardinal maximal nous amène donc à considérer deux cas.

1. Si $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, avec $n \geqslant 5$ et $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, alors on observe que

$$a_n < a_n^{a_2} < a_n^{a_3} < \ldots < a_n^{a_{n-1}},$$

donc que S contient les éléments

$$a_2 < a_2^{a_n} < a_3^{a_n} < \ldots < a_{n-1}^{a_n}.$$

Cela montre que $a_{i+1} = a_i^{a_n}$ pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. On remarque cependant que

$$a_2 < a_2^{a_3} < a_2^{a_n} = a_3 < a_3^{a_2} < a_3^{a_n} = a_4,$$

ce qui montre que ni $a_2^{a_3}$ ni $a_3^{a_2}$ n'appartient à S, qui ne peut donc pas être puissant.

2. Si $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, avec $n \geqslant 5$ et $a_1 < a_2 < \cdots < a_n = 1$, alors on observe que

$$a_{n-1} < a_{n-1}^{a_{n-2}} < a_{n-1}^{a_{n-3}} < \ldots < a_{n-1}^{a_1} < a_n,$$

donc que S contient les éléments

$$a_1 < a_1^{a_{n-1}} < a_2^{a_{n-1}} < \ldots < a_{n-2}^{a_{n-1}} < a_n = 1.$$

Cela montre que $a_{i+1} = a_i^{a_{n-1}}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-2\}$. De même, on observe que

$$a_{n-1} = a_{n-2}^{a_{n-1}} < a_{n-2}^{a_{n-3}} < \ldots < a_{n-2}^{a_1} < a_n = 1,$$

donc que S contient les éléments

$$a_2 = a_1^{a_{n-1}} < a_1^{a_{n-2}} < a_2^{a_{n-2}} < \ldots < a_{n-3}^{a_{n-2}} < a_n = 1.$$

Cela montre aussi que $a_{i+2} = a_i^{a_{n-2}} = a_i^{a_{n-1}^2}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-3\}$.
On en déduit que $a_{n-1} = a_{n-2}^{a_{n-1}} = a_{n-1}^{2a_{n-1}}$ puis que $1 = 2a_{n-1}$, donc que $a_{n-i} = 2^{-2^i}$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Cependant, puisque $n \geqslant 5$, alors $a_{n-4}^{a_{n-3}} = 2^{-2^{-4}}$ et $a_{n-3}^{a_{n-4}} = 2^{-2^{-13}}$, donc S ne contient ni $a_{n-4}^{a_{n-3}}$ et $a_{n-3}^{a_{n-4}}$ et ne peut pas être puissant.