Olympiades Françaises de Mathématiques 2015-2016

Corrigé de l'envoi Numéro 4 – Combinatoire

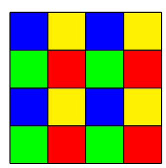
Exercices du groupe B

Exercice 1. Soit $n \geqslant 2$. On place une pièce sur chaque case d'un échiquier $n \times n$. Un *mouvement* consiste à déplacer chaque pièce sur une case qui touche la case de départ par un coin exactement (plusieurs pièces peuvent se retrouver sur la même case).
Quel est le plus petit entier k tel qu'il est possible qu'après un certain nombre de mouvements, seules k cases contiennent au moins une pièce ?

Solution de l'exercice 1 La réponse est 4.
On note A, B, C et D les quatre cases qui forment le carré 2×2 en haut à droite :

A	B		
C	D		

Chaque pièce peut être amenée sur une des cases A, B, C et D, puis osciller à chaque mouvement entre A et D ou entre B et C. Il est donc possible qu'après un certain nombre de mouvements, toutes les pièces soient sur une des quatre cases A, B, C et D.
Il reste à montrer qu'on ne peut pas faire mieux que 4. On considère le coloriage suivant de l'échiquier (ici pour $n = 4$) :



Comme $n \geqslant 2$, il y a au début au moins une pièce sur une case de chaque couleur. Mais à chaque mouvement, les pièces qui se trouvent sur des cases bleues passent sur des cases rouges, celles sur des cases rouges passent sur des bleues, celles sur des jaunes passent sur des vertes et celles sur des vertes passent sur des jaunes. A chaque étape, il y a donc des pièces sur au moins une case de chaque couleur, donc il y a toujours au moins 4 cases qui contiennent au moins une pièce.

Exercice 2. Soit A un ensemble de 13 entiers entre 1 et 37. Montrer qu'il existe quatre nombres deux à deux distincts dans A tels que la somme de deux d'entre eux est égale à la somme des deux autres.

Solution de l'exercice 2 A contient 13 entiers, donc il y a $\frac{13\times 12}{2} = 78$ manières de choisir deux nombres de A différents (13 manières de choisir le premier, 12 manières de choisir le deuxième et on divise par 2 car on a compté deux fois chaque ensemble de 2 nombres). Or, la somme de deux nombres de A vaut toujours au moins $1 + 2 = 3$ et au plus $36 + 37 = 73$, donc elle peut prendre 71 valeurs différentes. D'après le principe des tiroirs, il existe donc $a \neq d$ et $b \neq c$ dans A tels que $a + d = b + c$, et l'ensemble $\{a, d\}$ est différent de $\{b, c\}$. Pour conclure, il suffit de s'assurer que a, b, c et d sont deux à deux distincts.

Mais si par exemple $a = b$, alors comme $a + d = b + c$, on doit avoir $d = c$ donc $\{a, d\} = \{b, c\}$, ce qui est faux. On a donc bien trouvé 4 nombres qui vérifient la propriété voulue.

Exercice 3. Les sept nains ont des tailles deux à deux distinctes. Ils se rendent à la mine en colonne dans un certain ordre, de telle manière que le nain en tête est plus grand que le deuxième, qui est plus petit que le troisième, qui est plus grand que le quatrième et ainsi de suite...
Combien y a-t-il de telles manières d'arranger les nains ?

Solution de l'exercice 3 On note u_3 le nombre de manières d'arranger 3 nains de manière à ce que le premier est plus grand que le second, qui est plus grand que le troisième, u_5 le nombre de manières similaires d'arranger 5 nains et u_7 la solution de l'exercice.
Avec 3 nains, on est obligé de mettre le nain le plus petit au milieu et on peut ensuite placer comme on veut les deux autres.
Avec 5 nains, le nain le plus petit peut être en deuxième ou quatrième position :
— S'il est en position 2, n'importe quel nain peut être en premier, donc on a 4 choix pour le premier nain. Il reste à ordonner les trois derniers : il y a u_3 manières de le faire, donc on obtient $4u_3$ arrangements.
— S'il est en position 4, on a de même $4u_3$ arrangements (en choisissant d'abord le cinquième).

On a donc $u_5 = 4u_3 + 4u_3 = 8 \times 2 = 16$.
Avec 7 nains, le nain le plus petit peut être en position 2, 4 ou 6 :
— S'il est en position 2, n'importe quel nain peut être en premier (soit 6 choix), puis il y a u_5 manières d'ordonner les cinq derniers, soit $6u_5$ ordres possibles.
— S'il est en position 6, n'importe quel nain peut être en dernier (soit 6 choix), puis il y a u_5 manières d'ordonner les cinq premiers, soit $6u_5$ ordres possibles.
— S'il est en position 4, on peut d'abord trier les nains qui seront devant lui de ceux qui seront derrière. Il y a $\binom{6}{3} = 20$ manières de faire ce tri. Puis il y a u_3 manières d'ordonner les trois nains de devant et u_3 manières d'ordonner les trois de derrière, soit $20u_3^2$ ordres popssibles.

On a donc $u_7 = 6u_5 + 6u_5 + 20u_3^2 = 6 \times 16 + 6 \times 16 + 20 \times 2^2 = 272$.

Exercices communs

Exercice 4. Soit $n \geqslant 1$. On a un nombre fini de bouteilles, chacune contenant une quantité d'eau inférieure à 1 litre, telles que la quantité totale d'eau est de $\frac{n}{2}$ litres. On dispose également de n seaux vides.
Montrer qu'il est possible de vider chaque bouteille dans un seau (on peut vider plusieurs bouteilles dans le même seau, mais pas vider une bouteille en partie dans un seau et en partie dans un autre) de manière à avoir au plus 1 litre d'eau dans chaque seau.

Solution de l'exercice 4 On raisonne par récurrence sur n : pour $n = 1$, il suffit de tout vider dans l'unique seau.
Supposons le résultat vrai au rang n : si on arrive à vider dans un seau un certain nombre de bouteilles représentant au total au moins $\frac{1}{2}$ litre et au plus 1 litre, alors il restera $\frac{n-1}{2}$ litres à vider dans les $n - 1$ seaux restants, et on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure.

Si il existe une bouteille contenant au moins $\frac{1}{2}$ litre, on peut donc la vider dans le premier seau. Sinon, toutes les bouteilles contiennent moins de $\frac{1}{2}$ litre. On les vide donc une par une dans le premier seau, et on s'arrête dès que le contenu du seau dépasse $\frac{1}{2}$ litre : le seau contient alors plus de $\frac{1}{2}$ litre. De plus, juste avant de vider la dernière bouteille, il contenait moins de $\frac{1}{2}$ litre, et on a ajouté une bouteille, donc moins de $\frac{1}{2}$ litre. Le seau contient donc moins de 1 litre, et on peut conclure par hypothèse de récurrence.

Exercice 5. On note S l'ensemble des entiers de 1 à 2016. Combien y a-t-il de manières de partitionner S en deux sous-ensembles A et B de telle manière que ni A ni B ne contient deux entiers dont la somme est une puissance de 2 ?

Remarque. On dit que A et B forment une partition de S si ni A ni B n'est vide, A et B sont d'intersection vide et si leur union est égale à S.

Solution de l'exercice 5 La réponse est $2^{11} = 2048$. Plus précisément, on va montrer qu'il est possible de répartir comme on veut les nombres $1, 2, 4, 8, \ldots, 1024 = 2^{10}$ comme on veut entre A et B et qu'une fois ces nombres placés il existe une unique manière de répartir les autres. On peut alors conclure car il y a $2^{11} = 2048$ manières de répartir ces 11 nombres entre A et B.
Le fait que la répartition de $1, 2, 4, 8, \ldots, 1024$ impose la position de k se montre par récurrence forte sur k : la position de 1 et 2 a déjà été fixée, et 3 doit être dans l'ensemble qui ne contient pas 1 car $3+1 = 2^2$. Supposons maintenant que toutes les positions de nombres de 1 à $k-1$ soient fixées : si k est une puissance de 2, alors la position de k est fixée par hypothèse. Sinon, il existe a tel que $2^{a-1} < k < 2^a$. Mais alors $0 < 2^a - k < k$ donc $2^a - k$ est dans A ou B, et sa position a déjà été fixée. k est donc nécessairement dans l'autre ensemble. Il existe donc au plus une partition qui convient une fois fixée la répartition des puissances de 2.
Il reste à montrer qu'une telle répartition existe bien. Mais la preuve précédente fournit un algorithme qui permet de répartir les entiers qui ne sont pas des puissances de 2 entre A et B de telle manière que pour tous k et a tel que $2^{a-1} < k < 2^a$, les nombres k et $2^a - k$ ne sont pas dans le même ensemble. Or, si deux nombres $x \neq y$ ont pour somme une puissance de 2 notée 2^a, on peut supposer $x > y$. On a alors $x > \frac{x+y}{2} = 2^{a-1}$, donc $2^{a-1} < x < 2^a$ et $y = 2^a - x$, donc x et y ne sont pas dans le même ensemble, donc il existe bien toujours une répartition qui convient.

Exercice 6. Sur chaque sommet d'un n-gone régulier on place un signe $+$ ou $-$. A chaque étape, on a le droit de changer les signes de trois sommets consécutifs du n-gone.
Quels sont les n pour lesquels quelle que soit la configuration de départ on peut obtenir en un nombre fini d'étapes des $+$ sur tous les sommets ?

Solution de l'exercice 6 On va montrer que ce sont exactement les n qui ne sont pas divisibles par 3.
Si n est divisible par 3, on note $A_1, \ldots, A_n$ les sommets du polygone, et on note P le nombre de k qui ne sont pas divisibles par 3 et tels qu'il y a un signe $-$ sur A_k. On montre qu'à chaque étape la parité de P ne change pas : à chaque étape, on change les signes de 3 sommets consécutifs A_k, A_{k-1} et A_{k+1} (avec la convention $A_0 = A_n$ et $A_{n+1} = A_1$). Exactement un de des nombres $k-1$, k et $k+1$ est divisible par 3, donc on change exactement les signes de 2 sommets non divisibles par 3. P peut donc varier de -2 (si deux $-$ deviennent des $+$), de 0 (si un $-$ devient un $+$ et un $+$ devient un $-$) ou de 2 (si deux $+$

deviennent deux $-$), donc sa parité ne change jamais. En particulier, si $P = 1$ au départ, il est impossible d'obtenir $P = 0$ donc il est impossible de n'avoir que des $+$.
Si n n'est pas divisible par 3, on montre qu'il est possible de modifier exactement un signe. On peut alors facilement conclure car il suffit de modifier un par un les signes $-$:

— Si n est de la forme $3k-1$, on peut modifier les signes de A_1, A_2, A_3 puis de A_4, A_5, A_6 et ainsi de suite jusqu'à A_{3k-2}, A_{3k-1}, A_1, ce qui modifie le signe de tout le monde sauf A_1 (qui a été touché deux fois). On peut ensuite modifier le signe de tout le monde sauf A_2, puis modifier les signes de A_1, A_2, A_3. Cela revient à ne changer que le signe de A_3.

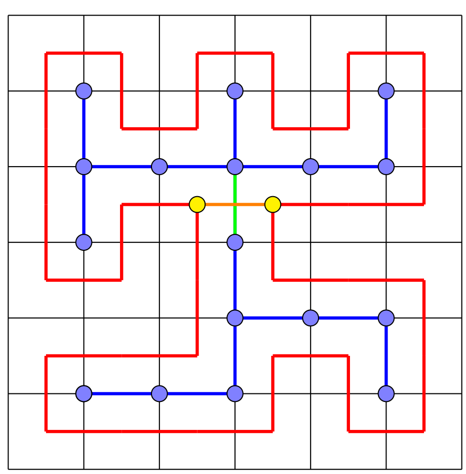
— Si n et de la forme $3k+1$, on peut modifier les signes de A_1, A_2, A_3 puis de A_4, A_5, A_6 et ainsi de suite jusqu'à $A_{3k-2}, A_{3k-1}, A_{3k}$, ce qui modifie le signe de tout le monde sauf A_{3k+1} et on conclut comme ci-dessus.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit $n \geqslant 2$. On trace un circuit sur un échiquier $n \times n$ qui passe exactement une fois par chaque case et revient à son point de départ (deux cases consécutives sur le circuit doivent avoir un côté commun).
Montrer qu'il existe deux cases voisines sur l'échiquier telles que, si on "coupe" le circuit en ces deux cases, les deux chemins obtenus ont pour longueur au moins le quart de la longueur du circuit de départ.

Remarque. La *longueur* d'un chemin est le nombre de fois où il change de case. En particulier, si le circuit est découpé en deux chemins, la somme des longueurs des deux chemins vaudra toujours n^2.

Solution de l'exercice 7 Remarquons tout d'abord que si l'échiquier est pavé en noir et blanc de la manière habituelle, le circuit doit alterner des cases noires et blanches et revenir à sa case de départ donc sa longueur doit être paire donc n^2 et pair. On écrit donc $n = 2m$.



On considère l'ensemble des coins des carrés qui se trouvent à l'intérieur du circuit (ce sont les points bleus sur la figure), et on relie deux de ces points quand ils sont à distance 1 l'un de l'autre (ce sont les

arêtes bleues sur la figure). Le graphe obtenu est un arbre : il est connexe car le circuit l'est, et il n'a pas de cycle car un cycle soit créerait un deuxième circuit à l'intérieur du premier, soit enfermerait le centre d'une case qui ne serait donc pas dans le circuit rouge. De plus, dans cet arbre, chaque sommet a au plus 4 voisins.
Le lemme suivant permet de faire le lien entre la longueur du chemin rouge et le nombre de sommets de l'arbre bleu :

Lemme (Lemme 1)**.** Soit T un arbre dont les sommets sont sur les coins d'un quadrillage, et C un circuit passant par les centres des cases et faisant le tour de l'arbre. On note $|C|$ la longueur de ce circuit. Alors $|C| = 2|T| + 2$.

Preuve du lemme 1. Chaque sommet de l'arbre est le centre d'un carré de côté 1. On calcule de deux manières différentes la somme S des périmètres de ces carrés. D'un part on a $S = 4|T|$. Mais d'autre part, pour calculer S, on prend en compte une fois chaque arête de C, et deux fois chaque arête qui sépare deux sommets de l'arbre. Comme l'arbre a $|T| - 1$ arêtes, on a donc $S = |C| + 2(|T| - 1)$. On en déduit le lemme. $\square$

On sait que $|C| = n^2 = 4m^2$. On en déduit $|T| = \frac{1}{2}(|C| - 1) = 2m^2 - 1$. De plus, couper le circuit en deux cases voisines revient essentiellement à couper une arête de l'arbre. On va donc montrer le lemme suivant :

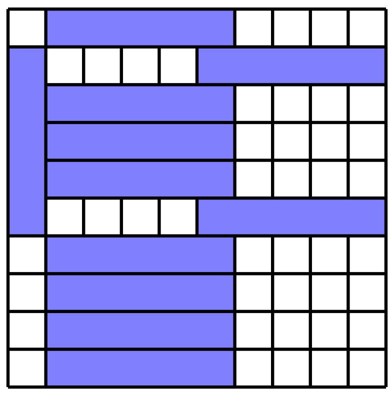
Lemme (Lemme 2)**.** On note $|T|$ le nombre de sommets d'un arbre. Soit T un arbre ayant au moins deux sommets et dont tous les sommets sont de degré au plus 4. Il existe une arête e de T telle qu'en coupant l'arête e, l'arbre T est coupé en deux arbres T_1 et T_2 tels que $|T_1| \geqslant \frac{1}{4}(|T|-1)$ et $|T_2| \geqslant \frac{1}{4}(|T| - 1)$.

Preuve du lemme 2. On raisonne par l'absurde. On fixe x_0 un sommet de T : supprimer x_0 divise T en T_1, T_2, T_3 et T_4 (si x n'a pas quatre voisins, certains de ces arbres ont un nombre de sommets nul). D'après le principe des tiroirs, il existe i tel que $|T_i| \geqslant \frac{1}{4}(|T| - 1)$. On suppose que c'est T_1, et on note x_1 le sommet de T_1 qui est relié à x_0. Mais si T ne vérifie pas le lemme, alors $|T_1| > |T| - \frac{1}{4}(|T| - 1) = \frac{3}{4}(|T| - 1) + 1$.
On peut maintenant effectuer le même raisonnement avec x_1 : il a au plus trois voisins différents de x_0 qui correspondent à trois arbres T_1', T_2' et T_3', et le nombre total de sommets de ces trois arbres vaut au moins $\frac{3}{4}(|T|-1)$. Par le principe des tiroirs il existe i tel que $|T_i'| \geqslant \frac{1}{4}(|T|-1)$ donc, comme T ne vérifie pas le lemme, $|T_1'| > \frac{3}{4}(|T| - 1) + 1$. On note x_2 le sommet par lequel T_1' est relié à x_1. Comme on n'a considéré que les voisins de x_1 qui sont différents de x_0, on a $x_2 \neq x_0$.
On peut alors itérer cet argument. Comme T ne vérifie pas le lemme, le procédé ne s'arrête jamais et on construit une suite (x_n) de sommets telle que $x_{n+2} \neq x_n$ pour tout n. Comme T est un arbre, (x_n) ne passe jamais deux fois par le même sommet donc T est infini, ce qui est absurde. $\square$

D'après le lemme 2, il existe donc une arête e de l'arbre (en vert sur la figure) telle que, si on coupe e, on obtient T_1 et T_2 tels que $|T_1|, |T_2| \geqslant \frac{1}{4}(|T| - 1) = \frac{m^2-1}{2}$. Si on note C_1 et C_2 les circuits qui font le tour de T_1 et de T_2, on a donc d'après le lemme 1 les inégalités $|C_1|, |C_2| \geqslant m^2 + 1$. Mais les deux parties du circuit obtenues en le coupant ont pour longueurs $|C_1| - 1$ et $|C_2| - 1$ (on retire l'arête orange) qui valent au moins m^2, d'où le résultat.

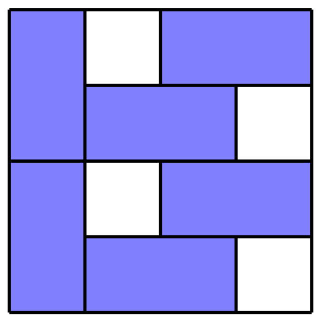
Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On place des rectangles $1 \times n$ et $n \times 1$ sur un échiquier $2n \times 2n$, de telle manière que deux rectangles ne s'intersectent jamais et que chaque rectangle recouvre exactement n cases. Un ensemble de tels rectangles est dit *saturé* s'il est impossible d'ajouter un rectangle sans intersecter un rectangle déjà en place.
Trouver le plus petit k tel qu'il existe un ensemble saturé de k rectangles.

Solution de l'exercice 8 Commençons par le cas $n \geqslant 3$: la réponse est $k = 2n + 1$. L'ensemble suivant (dans le cas $n = 5$, la construction se généralisant facilement) convient :



Il reste à montrer qu'avec $2n$ rectangles il est toujours possible d'en ajouter un qui ne les intersecte pas. Si les $2n$ rectangles sont orientés dans le même sens, par exemple tous horizontaux, alors il doit y en avoir exactement un sur chaque ligne (sinon il y aurait une ligne vide), et il ne peut pas être tout au bout de la ligne (s'il était tout à gauche, on pourrait ajouter un rectangle à sa droite). Par conséquent, la première et la dernière colonne sont vides, et il est possible d'ajouter un rectangle vertical.
S'il y a des rectangles dans les deux sens, on peut supposer qu'il y a au plus n rectangles verticaux. Supposons que la configuration soit saturée. Soit $1 \leqslant k \leqslant n$ tel que la colonne k contient un rectangle vertical noté r. En décalant r d'une case vers la gauche, on doit intersecter un rectangle déjà en place, noté r' (sinon on pourrait ajouter un rectangle). Cependant, si r' était horizontal, il devrait intersecter r car il n'y a pas assez de place pour un rectangle horizontal à gauche de r. Le rectangle r' est donc vertical, donc la colonne $k - 1$ contient un rectangle vertical et de même pour les colonnes $k - 2, \ldots, 2, 1$.
De même, si $n + 1 \leqslant k \leqslant 2n$ est tel que la colonne k contient un rectangle vertical, alors toutes les colonnes à sa droite contiennent un rectangle vertical. L'ensemble des colonnes ne contenant pas de rectangle vertical est donc un ensemble d'au moins n colonnes consécutives. Il y a donc un rectangle $n \times 2n$ qui ne rencontre aucun des rectangles verticaux. Si la configuration est saturée, il faut donc $2n$ rectangles horizontaux pour "bloquer" chaque ligne dans ce rectangle $n \times 2n$. Comme on a supposé qu'il y avait au moins un rectangle vertical, il y a donc au moins $2n + 1$ rectangles, ce qui est absurde.
Passons aux cas $n = 1$ et $n = 2$: le cas $n = 1$ est trivial et la réponse est 4 (il faut tout couvrir, sinon on pourrait ajouter un carré 1. Pour $n = 2$, il n'y a pas d'ensemble saturé de 5 rectangles.

Pour le montrer, on peut soit effectuer une disjonction de cas un peu fastidieuse, soit adapter la preuve précédente : si tous les rectangles ont la même direction, ce n'est pas possible (une seule ligne contient 2 rectangles donc un seul rectangle peut intersecter la première colonne donc il reste la place pour un domino vertical dans la première colonne). Sinon, on peut supposer qu'il y a au plus 2 dominos verticaux. La preuve pour $n \geqslant 3$ montre qu'il y a deux colonnes consécutives libres, donc au moins 4 dominos horizontaux, donc un seul vertical. De plus, les colonnes sans domino vertical sont consécutives donc on peut supposer que le domino vertical est dans la colonne 1. Il doit être au milieu de la colonne pour ne pas laisser une place, et il est alors facile de voir qu'il est impossible de "boucher tous les trous" avec 4 dominos horizontaux.
Enfin, la configuration suivante marche avec $k = 6$:



Exercice 9. Soient $n \geqslant 2$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels strictement positifs. Les a_i sont supposés deux à deux distincts, de même que les b_i. On suppose qu'il est possible de séparer les a_i en deux sous-ensembles de même somme, et de même pour les b_i.
Montrer qu'il existe un $2n$-gone simple ayant exactement n côtés horizontaux et n côtés verticaux, dont les longueurs des côtés horizontaux sont exactement les a_i et dont les longueurs des côtés verticaux sont exactement les b_i.

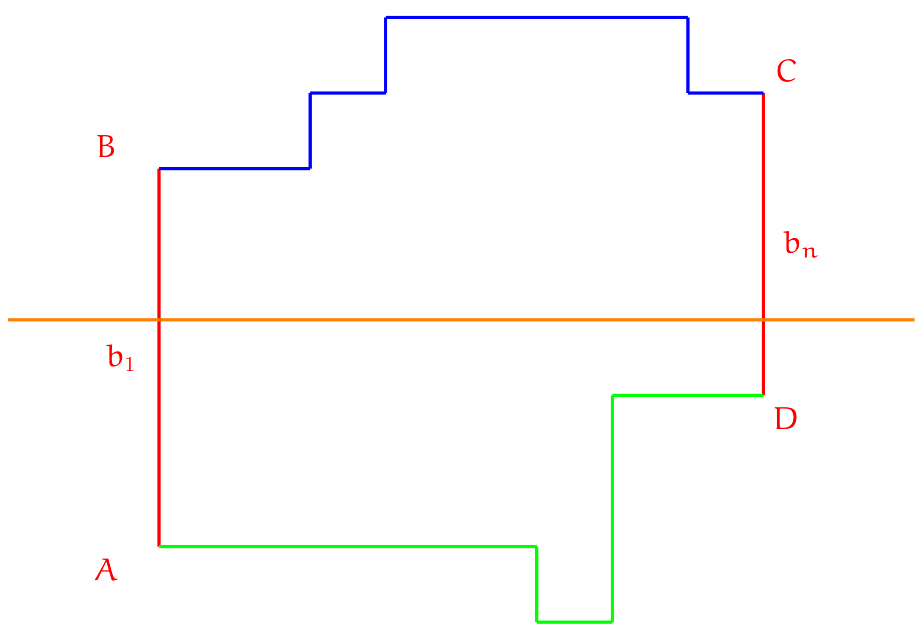
Remarque. Un polygone simple est un polygone dont les côtés ne s'intersectent pas, sauf bien sûr deux côtés consécutifs en leur extrémité commune.

Solution de l'exercice 9 Quitte à changer les indices et éventuellement à échanger les rôles de a et b, on peut supposer qu'il existe $\ell \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}$ tels que $a_1 + \cdots + a_\ell = a_{\ell+1} + \cdots + a_n = S_a$ et $b_1 + \cdots + b_m = b_{m+1} + \cdots + b_n$, que $b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_m$ et que $b_{m+1} \leqslant \cdots \leqslant b_n$. Quand on fait le tour de notre polygone dans le sens horaire, les a_i avec $i \leqslant \ell$ correspondront aux longueurs des côtés où on va vers la droite, les a_i avec $i \geqslant \ell + 1$ à ceux où on va vers la gauche, les b_i avec $i \leqslant m$ à ceux où on va vers le haut et les b_i avec $i \geqslant m + 1$ à ceux où on va vers le bas. Il reste à placer ces côtés correctement les uns par rapport aux autres, de manière à ce qu'ils ne s'intersectent pas.
On note $b'_i = b_i$ pour $i \leqslant m$ et $b'_i = -b_i$ pour $i \geqslant m + 1$, de manière à avoir $\sum_{i=1}^{n} b'_i = 0$ (ce changement de notation permettra de mesurer la variation d'ordonnée quand on passe d'un sommet du polygone à un autre). Les b'_i sont alors rangés dans l'ordre décroissant.

Lemme. Il existe un sous-ensemble $I \subset [\![2, n-1]\!]$ de cardinal $\ell - 1$ tel que $b'_1 + \sum_{i \in I} b'_i > 0$ et $b'_n + \sum_{i \in I} b'_i < 0$.

Preuve du lemme. L'énoncé du lemme revient à trouver I de cardinal $\ell - 1$ avec $\sum_{i \in I} b'_i \in]-b'_1, -b'_n[$. Soient $I_{max} = \{2, \dots, \ell\}$ et $I_{min} = \{n-\ell+1, \dots, n-1\}$. Il est clair que $\sum_{i \in I_{max}} b'_i > -b'_1$ (si on a n nombres de somme nulle, la somme des ℓ plus grand est positive) et que $\sum_{i \in I_{min}} b'_i < -b'_n$.
Si on remplace un par un les éléments de I_{min} par ceux de I_{max}, la somme augmente à chaque étape d'un nombre de la forme $b'_i - b'_j < b'_1 - b'_n$ (l'inégalité est stricte car les b_i sont deux à deux distincts). On passe donc d'un nombre inférieur à $-b'_n$ à un nombre supérieur à $-b'_1$ en augmentant à chaque étape d'un nombre strictement inférieur à $b'_1 - b'_n$ donc à un moment la somme se trouvera strictement entre $-b'_1$ et $-b'_n$. $\square$

On veut construire notre polygone de la manière suivante : b_1 sera la longueur du côté vertical le plus à gauche (on note A le sommet en bas et B le sommet en haut de ce côté) et b_n celle du côté vertical le plus à droite (on nomme C le sommet en haut et D le sommet en bas de ce côté), et l'écart horizontal entre ces deux côtés vaut S_a. Pour passer de B à C, on utilise les côtés horizontaux de longueur a_i avec $1 \leqslant i \leqslant \ell$ entre lesquels on intercale les $\ell - 1$ côtés de longueurs b_i avec $i \in I$, en commençant par ceux tels que $i \leqslant m$. On obtient ainsi une ligne brisée (en bleu) qui relie le haut de b_1 au haut de b_n en alternant les déplacements vers la droite et vers le haut, puis les déplacements vers la droite et vers le bas.
Puis, pour relier D à A, on utilise les $n - \ell$ côtés horizontaux de longueur a_i avec $\ell + 1 \leqslant i \leqslant n$, entre lesquels on intercale les b_i restants, cette fois en commençant par les $i \geqslant m+1$ pour descendre avant de remonter (cela correspond à la ligne verte sur la figure).



Le polygone ainsi construit a bien les longueurs de côtés voulues. il reste à vérifier que ces côtés ne s'intersectent pas. Les deux côtés rouges n'en coupent aucun autre car par construction, ils sont respec-

tivement plus à gauche et plus à droite que tous les autres. De plus, deux côtés bleus ne peuvent pas s'intersecter car il y en a toujours un plus à gauche que l'autre, et de même pour deux côtés verts.
Il suffit donc de vérifier qu'un côté bleu ne peut pas intersecter un sommet vert. On va montrer qu'en fait, la ligne bleue est entièrement située au-dessus de la ligne verte. Comme la ligne bleue monte puis redescend, son ordonnée est partout supérieure à $\min\{y_B, y_C\}$. De même, l'ordonnée sur la ligne verte est partout inférieure à $\max\{y_A, y_D\}$. Il suffit donc de montrer que $\min\{y_B, y_C\} > \max\{y_A, y_D\}$. Comme il est évident que $y_B > y_A$ et $y_C > y_D$, il suffit de montrer $y_C > y_A$ et $y_B > y_D$. Or, $y_C - y_A = b_1 + \sum_{i \in I} b'_i$, qui est strictement positive d'après le lemme. De même, $y_D - y_B = \sum_{i \in I} b'_i - b'_n$ qui est strictement négative d'après le lemme. On peut donc tracer une ligne horizontale (en orange sur la figure) telle que la ligne bleue soit strictement au-dessus et la verte strictement en-dessous.

Remarque. L'énoncé original omettait la condition "les b_i sont deux à deux distincts". Un contre-exemple assez simple sans cette hypothèse est le suivant : $n = 4$ avec $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ et $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$. En revanche, la preuve ci-dessus peut être adaptée dès que les a_i ne sont pas tous égaux ou que les b_i ne sont pas tous égaux.