OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES 2015-2016

ENVOI NO. 3

CORRIGÉ

Exercices du groupe B

Exercice 1. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Soit f une fonction vérifiant la condition de l'énoncé. En prenant $x = y = 0$, on obtient $f(0)(f(0) - 1) = 0$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Premier cas : supposons que $f(0) = 0$. En prenant $y = 0$ dans l'équation initiale, on obtient $0 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui est absurde.

Deuxième cas : supposons que $f(0) = 1$. En prenant $y = 0$ dans l'équation initiale, on obtient $f(x) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, on vérifie que la fonction $f(x) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est solution car on a bien $(x + 1)(y + 1) - (xy + 1) = x + y$ pour tous $x, y, \in \mathbb{R}$.

Remarque. Il est important de vérifier que réciproquement, la fonction $f(x) = x + 1$ convient. En effet, nous avons raisonné par implications successives et non pas par équivalences. Par exemple, si l'énoncé était "Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $f(2) = 2$", nous aurions conclu que réciproquement, la fonction $f(x) = x + 1$ ne convient pas (car $f(2) = 3$) et que dans ce cas il n'y a pas de solution.

Exercice 2. Soit $n \geqslant 3$ un nombre entier et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels.

(a) On suppose que $a_i < \max(a_{i-1}, a_{i+1})$ pour tout $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$. Montrer que $a_i < \max(a_1, a_n)$ pour tout $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$.

(b) On suppose que $a_i \leqslant \max(a_{i-1}, a_{i+1})$ pour tout $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$. Est-il vrai que $a_i \leqslant \max(a_1, a_n)$ pour tout $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$?

N.B. Si x et y sont deux nombres réels, on note $\max(x, y)$ le plus grand des deux.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> (a) Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ un entier tel que $a_i = \max(a_1, \ldots, a_n)$. L'énoncé indique que $i \notin \{2, 3, \ldots, n-1\}$. Cela montre à la fois que $i \in \{1, n\}$, donc que $a_i = \max(a_1, a_n)$, et que $a_k < a_i$ si $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, ce qui était l'inégalité demandée.

(b) Le résultat est clairement vrai pour $n = 3$. Montrons qu'il n'est pas toujours vrai pour $n \geqslant 4$ en exhibant un contre-exemple : prenons $a_1 = a_n = 1$ et $a_i = 2$. La consigne de l'énoncé est respectée mais $a_i > \max(a_1, a_n)$ pour tout $2 \leqslant i \leqslant n-1$.

Autre solution pour (a). L'idée est de regarder où la suite "remonte" pour la première fois. Pour cela, nous allons distinguer deux cas :

Premier cas : il existe un plus petit entier $1 \leqslant i_0 \leqslant n-1$ tel que $a_{i_0} \leqslant a_{i_0+1}$. Ainsi, $a_1 > \cdots > a_{i_0}$ et $a_{i_0} \leqslant a_{i_0+1}$. En particulier, si $i_0 = n-1$, on remarque qu'on a bien le résultat voulu (car alors $a_{n-1} < a_1$ at $a_{n-1} \leqslant a_n$). Supposons maintenant que $i_0 < n-1$ et montrons que $a_j < a_{j+1}$ pour tout entier $i_0 + 1 \leqslant j \leqslant n-1$ par récurrence sur j.

Initialisation : on a $a_{i_0+1} < \max(a_{i_0}, a_{i_0+2})$. Comme $a_{i_0} \leqslant a_{i_0+1}$, on doit avoir $\max(a_{i_0}, a_{i_0+2}) = a_{i_0+2}$, ce qui implique que $a_{i_0+1} < a_{i_0+2}$.
Hérédité : soit $i_0 + 1 \leqslant j < n - 1$ un entier tel que $a_j < a_{j+1}$. Montrons que $a_{j+1} < a_{j+2}$. Comme $a_{j+1} < \max(a_j, a_{j+2})$ et $a_j < a_{j+1}$, on doit avoir $\max(a_j, a_{j+2}) = a_{j+2}$, ce qui implique que $a_{j+1} < a_{j+2}$.
On a donc :

$$a_1 > \cdots > a_{i_0} \leqslant a_{i_0+1} < a_{i_0+2} < a_{i_0+3} < \cdots < a_n,$$

ce qui implique que $a_i < \max(a_1, a_n)$ pour tout $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$.

Deuxième cas : il n'existe pas d'entier $1 \leqslant i_0 \leqslant n-1$ tel que $a_{i_0} \leqslant a_{i_0+1}$. Alors $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$ et on a bien le résultat voulu.

Exercice 3. Soient $0 \leqslant a, b, c, d, e \leqslant 1$ des nombres réels. Montrer que

$$(1 + a + b + c + d + e)^2 \geqslant 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2).$$

Solution de l'exercice 3 L'idée est d'utiliser l'inégalité $(x + y)^2 \geqslant 4xy$ pour $x = 1$ et une valeur particulière de y.

Plus précisément, pour tous $x, y \geqslant 0$, on a $(x - y)^2 \geqslant 0$, et donc $(x + y)^2 \geqslant 4xy$ (cette inégalité est aussi l'inégalité arithmético-géométrique à deux variables). En évaluant cette inégalité avec $x = 1$ et $y = a + b + c + d + e$, on obtient :

$$(1 + a + b + c + d + e)^2 \geqslant 4(a + b + c + d + e).$$

Or pour tout nombre réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $x \geqslant x^2$. Donc

$$4(a + b + c + d + e) \geqslant 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2),$$

ce qui montre finalement que $(1 + a + b + c + d + e)^2 \geqslant 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$.

Exercices communs

Exercice 4. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(f(x) + 3y) = 12x + f(f(y) - x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 4 Soit f une fonction satisfaisant à la condition de l'énoncé. L'idée est de montrer que f est injective en utilisant le fait qu'elle est surjective. Montrons d'abord que f est surjective. En prenant $y = -f(x)/3$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient $f(f(y) - x) = f(0) - 12x$. En faisant varier x, on voit que le membre de droite de cette dernière égalité peut prendre pour valeur n'importe quel nombre réel, et donc le membre de gauche aussi, ce qui implique que f est surjective.

Montrons que f est injective. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = f(b)$. Nous allons montrer que $a = b$. En prenant $y = a$ et $y = b$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(f(x) + 3a) = 12x + f(f(a) - x) = 12x + f(f(b) - x) = f(f(x) + 3b) \qquad (1)$$

où on a utilisé le fait que $f(a) = f(b)$ pour la deuxième égalité. Ceci implique que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f(y) = f(y + 3(b - a)). \qquad (2)$$

En effet, si on fixe $y \in \mathbb{R}$, par surjectivité il existe x tel que $f(x) = y - 3a$ et en injectant dans (1), ceci donne (2). En particulier, $f(0) = f(3(b - a))$. Alors

$$f(f(0)) = f(f(3(b-a)) + 3 \cdot 0) = 12 \cdot 3(b-a) + f(f(0) - 3(b-a)) = 12 \cdot 3(b-a) + f(f(0)),$$

où pour la première égalité on utilise le fait que $f(0) = f(3(b - a))$, pour la deuxième on utilise l'équation fonctionnelle de l'énoncé (avec $x = 3(b - a)$ et $y = 0$), pour la troisième égalité on utilise (2) (avec $y = f(0) - 3(b - a)$). Donc $3(b - a) = 0$ et $a = b$.

Pour conclure, en prenant $x = 0$ dans l'équation de départ et en utilisant l'injectivité de f, on obtient

$$f(y) = f(0) + 3y$$

pour tout réel y.

Réciproquement, on vérifie que les fonctions de la forme $f(x) = a + 3x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{R}$ vérifient l'équation fonctionnelle de l'énoncé.

Exercice 5. Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

Solution de l'exercice 5 L'idée est d'utiliser inégalité arithmético-géométrique pour minorer $\frac{1}{\sqrt{x+y}}$. Plus précisément, on a, par inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \geqslant \frac{a}{(a+b+c)/2} \geqslant \frac{2a}{a+b+c}.$$

On procède de même pour montrer que $\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geqslant \frac{2b}{a+b+c}$ et que $\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geqslant \frac{2c}{a+b+c}$. On en déduit que

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geqslant 2.$$

Il y a égalité seulement si et seulement si on est dans le cas d'égalité de chacune des trois inégalités arithmético-géométrique utilisées, soit : $a = b + c$, $b = a + c$ et $c = a + b$, ce qui est impossible.

Exercice 6. Soit $n > 1$ un entier. Trouver tous les polynômes P non constants à coefficients réels tels que

$$P(x) P(x^2) P(x^3) \cdots P(x^n) = P\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$$

pour tout nombre réel x.

Solution de l'exercice 6 Nous allons montrer que les solutions sont de la forme $P(x) = x^a$ avec $a \geqslant 0$ un entier si n est pair, et $P(x) = x^a$ ou $P(x) = -x^a$ avec $a \geqslant 0$ un entier si n est impair. Comme $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, on vérifie tout d'abord que ces polynômes vérifient l'équation de l'énoncé.

Soit maintenant P un polynôme solution. Écrivons d'abord P sous la forme $P(x) = x^a Q(x)$ avec $a \geqslant 0$ un entier et Q un polynôme tel que $c = Q(0) \neq 0$. Écrivons Q' sous la forme $Q' = x^b S(x)$ avec $b \geqslant 0$ un entier et S un polynôme tel que $S(0) \neq 0$ (et donc S n'est pas divisible par le polynôme x), et posons

$$R(x) = Q(x) Q(x^2) Q(x^3) \cdots Q(x^n).$$

L'idée est de considérer la quantité $R'(x)/R(x)$, où R' est le polynôme dérivé de R. En effet, comme $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, Q doit aussi vérifier l'égalité

$$Q(x) Q(x^2) Q(x^3) \cdots Q(x^n) = Q\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right). \tag{3}$$

En faisant $x = 0$, on trouve $c^{n-1} = 1$, de sorte que $c = 1$ si n est pair et $c = \pm 1$ si n est impair. Supposons par l'absurde que Q n'est pas constant (de sorte que Q' n'est pas le polynôme nul), et dérivons (3) :

$$R(x)\left(\frac{Q'(x)}{Q(x)} + 2x\frac{Q'(x^2)}{Q(x^2)} + \cdots + nx^{n-1}\frac{Q'(x^n)}{Q(x^n)}\right) = \frac{n(n+1)}{2} x^{\frac{n(n+1)}{2}-1} Q'(x^{\frac{n(n+1)}{2}}). \tag{4}$$

Notons que $R(0) = c^n \neq 0$ (et donc R n'est pas divisible par le polynôme x). La plus grande puissance de x qui divise le membre de droite de (4) est $x^{\frac{n(n+1)}{2}-1+b\frac{n(n+1)}{2}}$ tandis que la plus grande puissance de x qui divise celui de gauche est x^b (car tous les termes de la somme sont divisibles par x^{b+1} sauf $\frac{Q'(x)}{Q(x)}$). Donc

$$b = \frac{n(n+1)}{2} - 1 + b\frac{n(n+1)}{2}.$$

Or $n \geqslant 2$, donc

$$b < b\frac{n(n+1)}{2} < \frac{n(n+1)}{2} - 1 + b\frac{n(n+1)}{2},$$

ce qui est absurde. Donc Q est constant, ce qui conclut.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier et soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels positifs tels que $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Montrer que

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+x_n} \leqslant 1.$$

Solution de l'exercice 7 En réduisant au même dénominateur, il s'agit de montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{j \neq k} (x_j + n - 1) \leqslant \prod_{k=1}^{n} (x_k + n - 1). \tag{5}$$

On note

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

le k-ème polynôme élémentaire (de degré k donc) en $x_1, \cdots, x_n$. Alors, en développant les deux côtés de (5), on voit que le coefficient de σ_k est $(n-1)^{n-k}$ dans celui de droite pour $1 \leqslant k \leqslant n$, et $(n-k)(n-1)^{n-k-1}$ dans celui de gauche pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Le coefficient constant vaut $(n-1)^n$ à droite et $n(n-1)^{n-1}$ à gauche. Autrement dit,

$$\prod_{k=1}^{n} (x_j + n - 1) = \sum_{k=1}^{n} (n-1)^{n-k} \sigma_k + (n-1)^n$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{j \neq k} (x_j + n - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-1)^{n-k-1} \sigma_k + n(n-1)^{n-1}.$$

En notant $D = \prod_{k=1}^{n} (x_k + n - 1) - \sum_{k=1}^{n} \prod_{j \neq k} (x_j + n - 1)$, on a donc

$$D = x_1 x_2 \cdots x_n + \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)(n-1)^{n-k-1} \sigma_k - (n-1)^{n-1}.$$

Or $\sigma_k \geqslant \binom{n}{k}$ par l'inégalité arithmético-géométrique (car $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$,) de sorte que :

$$D \geqslant \sum_{k=1}^{n} (k-1)(n-1)^{n-k-1} \binom{n}{k} - (n-1)^{n-1},$$

ou encore, en divisant les deux côtés par $(n-1)^{n-1}$,

$$\frac{D}{(n-1)^{n-1}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} (k-1)(n-1)^{-k} \binom{n}{k} - 1 = \sum_{k=1}^{n} k(n-1)^{-k} \binom{n}{k} - \sum_{k=1}^{n} (n-1)^{-k} \binom{n}{k} - 1.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(n-1)^{-k} = \frac{n}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\cdot\left(\frac{1}{n-1}\right)^{k-1} = \frac{n}{n-1}\times\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n}(n-1)^{-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(n-1)^{-k}\binom{n}{k} - 1 = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} - 1.$$

On en déduit que $D \geqslant 0$, ce qui conclut.

Exercice 8. On note $S(k)$ la somme des chiffres d'un nombre entier k. On dit qu'un entier a est d'ordre n s'il existe une suite d'entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que $a_n = a$ et $a_{i+1} = a_i - S(a_i)$ pour tout $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe un entier b qui soit d'ordre n mais qui ne soit pas d'ordre $n+1$.

Solution de l'exercice 8 On pose $F(x) = x - S(x)$, et on considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{i+1} = 10^{u_i}$ pour $i \geqslant 0$. Soit $n \geqslant 1$ fixé, et considérons un entier $N > u_{n+1}$. Nous allons montrer que $X = F^{(n)}(10^N - 5N)$ (on itère n fois F) est d'ordre n mais pas $n+1$. Pour cela, il suffit de montrer que X n'est pas d'ordre $n+1$.

On remarque pour commencer que $F(a) - F(b)$ est toujours divisible par 9, et que si a et b ne diffèrent que sur leurs k derniers chiffres, alors $|a-b| \leqslant 10^k$.

Établissons maintenant une sorte de réciproque à cette remarque. Soient a, b deux entiers et écrivons $a = \sum_{i\geqslant 0} c_i 10^i$ et $b = \sum_{i\geqslant 0} c_i' 10^i$. On a $F(a) - F(b) = \sum_{i\geqslant 0}(c_i - c_i')(10^i - 1)$. Si j est le plus grand indice tel que $c_j > c_j'$, alors

$$F(a) - F(b) \geqslant \left(10^j - 1\right) + \sum_{i=0}^{j-1}(c_i - c_i')(10^i - 1) \geqslant \left(10^j - 1\right) - 9\sum_{i=0}^{j-1}(10^i - 1) = 9j.$$

On en déduit que si $|F(a) - F(b)| = 9k$, alors $j \leqslant k$, et donc

$$\text{si } |F(a)-F(b)| = 9k, \quad \text{alors } a \text{ et } b \text{ ne peuvent différer que sur leurs } k+1 \text{ derniers chiffres.} \quad (6)$$

Montrons maintenant le lemme suivant :

Lemme. Si $F^{(n)}(a) = F^{(n)}(b)$ alors a et b ne peuvent différer que sur leurs u_n derniers chiffres.

Revenons maintenant à la preuve du lemme en raisonnant par récurrence sur n. L'initialisation pour $n = 1$ provient de (6) appliqué avec $k = 0$. Pour l'hérédité, soit $n \geqslant 1$ tel que le lemme est vrai jusqu'au rang n. Soient a, b deux entiers tels que $F^{(n+1)}(a) = F^{(n+1)}(b)$. Alors $F^{(n)}(F(a)) = F^{(n)}(F(b))$, et donc $|F(a) - F(b)| \leqslant 10^{u_n}$ par hypothèse de récurrence. Comme $|F(a) - F(b)|$ est divisible par 9, écrivons $|F(a) - F(b)| = 9k$ (avec $9k \leqslant 10^{u_n}$). Alors d'après (6), a et b ne peuvent différer que sur leurs $k+1$ derniers chiffres. Comme $k + 1 \leqslant 10^{u_n}/9 + 1 \leqslant 10^{u_n}$, a et b ne peuvent différer que sur leurs $10^{u_n} = u_{n+1}$ derniers chiffres, ce qui conclut.

Revenons à l'exercice. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un entier y tel que $X = F^{(n+1)}(y) = F^{(n)}(10^N - 5N)$. Alors

$$F^{(n)}(10^N - 5N) = F^{(n)}(F(y)),$$

et donc d'après le lemme

$$|10^N - 5N - F(y)| \leqslant 10^{u_n} \leqslant N.$$

Donc

$$10^N - 4N \leqslant F(y) \leqslant 10^N - 6N. \tag{7}$$

Or on constate que si $y \geqslant 10^N$, alors $F(y) \geqslant 10^N - 1$ (en effet, on vérifie aisément que F est croissante et que $F(10^N) = 10^N - 1$). De plus, si $y \leqslant 10^N - 1$, alors $F(y) \leqslant 10^N - 9N - 1$; en effet si $y = \sum_{i=0}^{N-1} c_i 10^i$, alors

$$F(y) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i(10^i - 1) \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} 9(10^i - 1) = 10^N - 9N - 1.$$

Ceci contredit (7), et X vérifie bien la condition cherchée.

Autre solution, un peu plus courte : Comme ci-dessus, on pose $F(x) = x - S(x)$. Il vient immédiatement que $F(a+1) = F(a)$ si $a \not\equiv 9 \pmod{10}$ et que $F(a+1) > F(a)$ si $a \equiv 9 \pmod{10}$. Par conséquent, tout entier k a au plus 10 antécédents par F, et a fortiori il a au plus 10^n antécédents par $F^{(n)}$, où $F^{(n)}$ est la $n^{\text{ème}}$ itérée de F. Il s'ensuit que $F^{(n)}(k + 10^n) > F^{(n)}(k)$ pour tout entier $k \geqslant 1$ (en effet, si $F^{(n)}(k+10^n) = F^{(n)}(k)$ pour un certain entier $k \geqslant 1$, on aurait $F^{(n)}(k) = F^{(n)}(i)$ pour tout $k \leqslant i \leqslant k + 10^n$, de sorte que l'entier $F^{(n)}(k)$ aurait au moins $10^n + 1$ antécédents qui sont $k, k+1, k+2, \ldots, k+10^n$).

Maintenant, soit ℓ un entier tel que $9\ell \geqslant 2 \cdot 10^n$. On observe que $F(10^\ell) = 10^\ell - 1$ et que $F(10^\ell - 1) = 10^\ell - 1 - 9\ell$, puis on pose $a_k = F^{(k)}(10^\ell - 10^n - 1)$ et $b_k = F^{(k)}(10^\ell - 1)$, pour $k \geqslant 0$. Puisque $b_0 \geqslant a_0 + 10^n$, on en déduit que $b_n > a_n$. De même, puisque $a_0 \geqslant b_1 + 10^n$, on en déduit que $a_n > b_{n+1}$. Cela montre que $b_0 > i > b_1$ pour tout entier i tel que $a_n = F^{(n)}(i)$.

Or, on a $F(k) \geqslant b_0$ pour tout $k \geqslant 10^\ell$ et $F(k) \leqslant b_1$ pour tout $k \leqslant 10^\ell - 1$, ce qui montre que les éléments de l'ensemble $\{b_1 + 1, \ldots, b_0 - 1\}$ sont tous d'ordre 0 mais pas d'ordre 1. Il s'ensuit que a_n est d'ordre n mais pas d'ordre $n+1$, ce qui conclut.

Exercice 9. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) f\left(yf(x) - 1\right) = x^2 f(y) - f(x)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 9 Tout d'abord, on remarque que la fonction nulle est solution.

Soit maintenant une fonction f solution. En prenant $x = 0$, on obtient $f(0)(f(yf(0)-1)+1) = 0$. Si $f(0) \neq 0$, alors $f(yf(0) - 1) = -1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Comme $yf(0) - 1$ parcourt $\mathbb{R}$ quand

y parcourt $\mathbb{R}$, on en déduit qu'alors f est constante égale à -1. En prenant $x = 1$, on obtient $(-1)^2 = -1^2 + 1$, ce qui est absurde. Donc $f(0) = 0$.

Supposons maintenant que f n'est pas la fonction nulle. Il existe alors $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(a) \neq 0$. En prenant $x = a$ et $y = 0$, on obtient $f(-1) = -1$.

Si $f(x) = 0$, en prenant $y = a$, on obtient $x^2 f(a) = 0$, et donc $x = 0$. Ainsi, $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

En prenant $x = y = 1$, on obtient $f(1)f(f(1) - 1) = 0$, et donc, comme $f(1) \neq 0$, $f(1) = 1$.

En prenant $x = 1$, on obtient $f(y-1) = f(y) - 1$, et en utilisant ceci dans l'équation initiale on obtient

$$f(x)f(yf(x)) = x^2 f(y). \tag{8}$$

En prenant $x = -1$ dans cette dernière équation, on obtient $f(-y) = -f(y)$, et donc f est impaire. Combiné avec le fait que $f(y-1) = f(y) - 1$, on en déduit par récurrence que

$$f(y-n) = f(y) - n \tag{9}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$, puis que $f(n) = n$ pour tout nombre entier relatif n. En prenant $x = n$ dans (8), on obtient

$$f(yn) = nf(y), \tag{10}$$

et on en déduit que $f(r) = r$ pour tout nombre rationnel r.

En prenant $y = 1$ dans (8), on obtient $f(x)f(f(x)) = x^2$. En prenant $x = y = f(x)$ dans (8), on obtient $f(f(x))f(f(x)f(f(x)) = f(x)^2 f(f(x))$. Pour $x \neq 0$, $f(f(x)) \neq 0$, et donc en simplifiant par $f(f(x))$ on obtient $f(x^2) = f(f(x)f(f(x)) = f(x)^2$. Ainsi, $f(x) > 0$ pour $x > 0$.

Soit maintenant $z > 0$ un nombre irrationnel, et supposons par l'absurde que $f(z) > z$. Soit $r = n/m$ un nombre rationnel tel que $f(z) > r > z$. Comme $m(r-z) > 0$, on a $f(m(r-z)) > 0$. Or f est impaire (prendre $n = -1$ dans (10)), donc $mf(z) - n = f(mz) - n = f(mz - n) < 0$, ce qui contredit le fait que $f(z) > r$. Le cas où $f(z) < z$ se traite de la même manière. Donc $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, on vérifie qu'elle convient.

Les solutions sont donc la fonction nulle et la fonction identité.